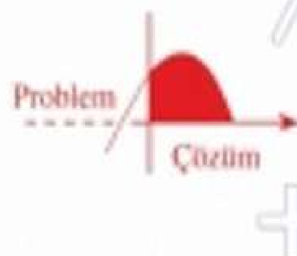
SCHAUM
serisi



İşletmeciler ve İktisatçılara Yönelik Matematiksel Yöntemler

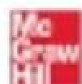
1.000 tamamı çözümlü problem

- Tüm Ders Kavramlarının Kısa ve Öz Açıklamaları
- Fonksiyonlar, Lineer Cebir, Doğrusal Programlama, İntegral ve Diferansiyel Hesap ile Çok Değişkenli Fonksiyonlar alanlarında bilgiler içerir

BU DERSLERLE BİRLİKTE KULLANINIZ

İşletmeciler için Matematik • Uygulamalı Matematik • Sosyal Bilimler için Matematik
Ekonomi Bilimi için Matematik

Edward T. Dowling



Çeviri Editörü: Durmuş Çağrı Yıldırım
Çevirenler: Mustafa Uğur Mirasedoğlu - Özge Yüksel





İşletmeciler ve İktisatçılara Yönelik Matematiksel Yöntemler

Mathematical Methods for Business and Economics

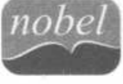
Edward T. Dowling

Çeviri Editörü
Durmuş Çağrı Yıldırım

Çevirenler
Mustafa Uğur Mırasedoğlu
Özge Yüksel

Mc Graw Hill

nobel



NOBEL AKADEMİK YAYINCILIK EĞİTİM DANIŞMANLIK TİC. LTD. ŞTİ.

Yayın No.: 1958
Matematik/İstatistik No: 095
ISBN: 978-605-320-865-5
© 1. Basımdan Çeviri, Nisan 2018

İŞLETMECİLER VE İKTİSATÇILARA YÖNELİK MATEMATİKSEL YÖNTEMLER
MATHEMATICAL METHODS FOR BUSINESS AND ECONOMICS
Edward T. Dowling
Çeviri Editörü: Durmuş Çağrı Yıldırım
Çevirenler: Mustafa Uğur Mirasedoğlu - Özge Yüksel

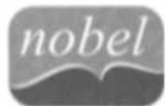


Genel Yayın Yönetmeni: Nevzat Argun -nargun@nobelyayin.com-
Dizi Editörü: Nilay Balin -nilay@nobelyayin.com-

Redaksiyon: Damla Aydın -damla@nobelyayin.com-
Sayfa Tasarım: Gülbeyaz Güler -gulbeyaz@nobelyayin.com-
Kapak Tasarım: Mehtap Yürümez -mehtap@nobelyayin.com-
Baskı ve Cilt: Genç Offset Sertifika No.: 32284
Süzgün Sokak No.:18/3 İskitler/Ankara

KÜTÜPHANE BİLGİ KARTI
Edward T. Dowling, Ph.D.
Mathematical Methods for Business and Economics / Edward T. Dowling, Ph.D.
İşletmeciler ve İktisatçılara Yönelik Matematiksel Yöntemler / *Durmuş Çağrı Yıldırım - Mustafa Uğur Mirasedoğlu - Özge Yüksel*
1. Basımdan Çeviri, viii + 384 s., 195x275 mm
Kaynakça yok, dizin var.
ISBN 978-605-320-865-5
1. İşletme 2. İktisat 3. Matematiksel Yöntemler

Dağıtım: Alfa Basım Dağıtım, Ana Basım Dağıtım (Kitabevleri), Arkadaş Kitabevi, Atlas Akademik Basım Dağıtım, Başarı Dağıtım, D&R mağazaları, Dost Dağıtım (Kitabevleri), Emekkitap.com (Arasta Bilgi), Final Dağıtım, Kida Dağıtım, Kitapsan (Kitabevleri), Nezih Kitabevleri, nobelkitap.com (Nobel Akademik), Prefix, Remzi Kitabevleri, TveK



NOBEL AKADEMİK YAYINCILIK EĞİTİM DANIŞMANLIK TİC. LTD ŞTİ.
Ankara Büro: Mithatpaşa Cad. No.: 74/4 Kızılay ANKARA
Tel: +90312 418 20 10 **Faks:** +90312 418 30 20
Rasimpaşa Mah. Rıhtım Cad. Nemlizade Sok. Güleryüz Apt.
No 9 Daire 3 Kadıköy / İSTANBUL **Tel-Faks:** +90216 418 20 10
nobel@nobelyayin.com · www.nobelyayin.com







ÖN SÖZ

İşletme ve iktisat öğrencilerinin ve yüksek lisans adaylarının bölümlerinin gereklerini yerine getirebilmeleri için ve öğrenim kariyerlerini başarıyla tamamlayabilmeleri için günümüzde iyi seviyede bir matematiksel yeterliliğe sahip olmaları gerekmektedir. Matematiksel yeterlilik yalnızca Genel Matematik ve benzeri tek bir dersin gerekliliği değildir. Öğrenciler İşletme ve İktisat alanlarındaki pek çok derste matematiksel yeterlilik gereksinimiyle karşı karşıya kalmaktadırlar ve yoğun programları içerisinde ek matematik derslerine zaman ayıramamaktadırlar. *İşletmeciler ve İktisatçılara Yönelik Matematiksel Yöntemler* kitabı, günümüzde iktisat ve işletme alanlarında başarılı olabilmek için gerekli olan en önemli araçları, konuları ve yöntemleri bir araya getirmek için hazırlanmıştır. Kitap aynı zamanda İşletme ve İktisat bölümlerindeki Genel Matematik gibi derslerde de gerek hocalar tarafından gerekse öğrenciler tarafından faydalı bir şekilde kullanılabilir.

Her bölümün teorik anlatım ve ayrıntılı şekilde çözülmüş pek çok sorudan oluşması konuların örnekler yardımıyla açıklanmasını ve daha rahat anlaşılmasını sağlamaktadır. Kitabın anlaşılması için lise seviyesinde bir matematik bilgisi yeterlidir. Kitapta kullanılan, uygulayarak öğrenme yöntemi sayesinde öğrenciler seviyelerinde ilerleme sağlamaktadırlar ve ihtiyaçları doğrultusunda kitabı kullanma imkanı bulmaktadırlar.

İşletmeciler ve İktisatçılara Yönelik Matematiksel Yöntemler kitabı tek başına bir ders kitabı olarak kullanılabileceği gibi yardımcı kaynak kitap olarak da kullanıma uygundur. Kitap büyük ölçüde tek başına yeterlidir. Birinci bölümde lise seviyesi matematiğinin temel düzeyde tekrarı yapılmaktadır. Ders materyali için gerekli olan tüm yöntem ve teknikler sonraki bölümlerde düzenli bir şekilde açıklanmıştır.

Kitapta ayrıntılı bir şekilde çözülmüş 1066 soru yer almaktadır. Kitaptan en iyi şekilde yararlanabilmek için öğrenciler mümkün oldukça soruları çözümlerden faydalanmadan çözmeye çalışmalıdır. Sorular kitap kapalı bir şekilde ayrı kağıtlara çözülmeli, zorlanılması halinde kitaptaki çözümlerden yardım alınmalıdır.

En iyi sonuca ulaşabilmek için öğrenciler pasif bilgiyle yetinmemelidirler. Yalnızca kitapta verilen çözüm yollarını öğrenmek pasif bilgidir. Konuda uzmanlaşmak ve sınavlarda başarılı olmak aktif bilgiyi gerektirir. Her türlü soruyu, farklı yollardan çözebilme yeteneği aktif bilgiyle sağlanır.

Geçmiş tecrübelerimi göstermiştir ki kitabın hazırlandığı format farklı bilgi birikimine ve farklı yeteneklere sahip öğrenciler için en uygun öğrenme imkanını sunmaktadır. Her türden öğrenciye uygun olarak hazırlanmış format sayesinde tüm öğrencilerin başarıya ulaşması hedeflenmiştir.

Kitabı hazırlama sürecindeki tüm yardımlarından dolayı Fordham Üniversitesi öğretim elemanları Sayın Dr. Dominick Salvatore'a ve Sayın Dr. Timothy Weithers'a; Fordham Üniversitesi doktora adayı Sayın Maria Cristina Cacdac-Ampil'e; eleştirmen Sayın Prof. Henry Mark Smith'e; McGraw-Hill'den Sayın John Carleo'ya, Sayın John Aliano'ya, Sayın Maureen Walker'a, Sayın Pat Koch'a ve Sayın Patty Andrews'a şükranlarımı sunarım.

Edward T. Dowling

ÇEVİRİ EDİTÖRÜNÜN ÖN SÖZÜ

İktisat ve işletme alanlarında öğrenim gören lisans ve lisansüstü öğrencilerin alanlarının gereksinimlerini tam anlamıyla karşılayabilmeleri ve mesleki yeterliliklere sahip olabilmeleri için iyi seviyede matematik bilgisine sahip olmaları gerekmektedir. Ancak günümüzün yoğun temposu içerisinde öğrenciler matematiksel gelişimlerini sürdürebilmek için ders yüklerine ilave bir yük üstlenememektedirler. Bu nedenle mevcut müfredat içerisinde öğrencilere iktisat ve işletme alanlarına yönelik matematiksel bilgi birikiminin sağlanması önem arz etmektedir. İşletmeciler ve İktisatçılara Yönelik Matematiksel Yöntemler kitabı bu alanda hazırlanmış en iyi örneklerden biridir. Kitap temelden başlayarak ileri seviyeye gidecek şekilde toplam 13 bölümden oluşmaktadır. Her bölümde ilgili konular öncelikle teorik olarak anlatılmıştır, konuyla ilgili önemli noktalar vurgulanmıştır, konuyla ilgili farklı türlerden pek çok örnek çözülmüştür ve her konunun iktisatçılar için ve işletmeciler için örnekleriyle alana yönelik uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Kitapta ayrıntılı çözümleri ile birlikte verilen toplam 1066 soru bulunmaktadır. Temelde basit bir dil kullanılmış olan İşletmeciler ve İktisatçılara Yönelik Matematiksel Yöntemler kitabı kolay anlaşılır bir yapıda kurgulanmıştır. Ancak lisansüstü öğrenciler de dahil olmak üzere ileri matematik derslerinde kullanılabilecek kalitede ve yeterlilikte bir kitaptır.

Çok yoğun ve özverili bir çalışma sürecine müteakip bu değerli eser Türkçeye kazandırıldı. Çeviri ekibimizde yer alarak kitabın hazırlanmasında özveriyle çalışan Doktora Öğrencimiz Sayın Özge Yüksel'e ve İktisat Bölümü Araştırma Görevlimiz Sayın Mustafa Uğur Mirasedoğlu'na da verdikleri emek ve gösterdikleri özveri için teşekkürlerimi sunarım. Bu yoğun çalışma döneminde benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen Sevgili Eşim Doç. Dr. Seda Yıldırım'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımız esnasında bizden kıymetli bilgilerini esirgemeyerek zaman ayıran ve yardımcı olan kıymetli hocalarımıza da kendim ve çeviri ekibim adıma teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak böyle başarılı bir çalışmanın Türkçe literatüre dahil edilmesinde, Türkiye'de öğrenimlerini sürdüren, gelecek neslimizin temellerini oluşturan değerli üniversite öğrencilerimizin istifadesine sunulmasında büyük katkıları bulunan Nobel Yayınevi'nin başta Sayın Hakkı Biroğlu olmak üzere tüm çalışanlarına teşekkürlerimi sunarım.

Kitabın, değerli üniversite öğrencilerimizin matematiksel yetilerinin gelişmesinde büyük katkı sağlamasını umuyorum. Tüm arkadaşlarımızla birlikte büyük bir özveriyle çalışmış olmamıza ve defalarca kontrolden geçmesine rağmen gözden kaçan hatalar bulunabileceğinin farkındayız. Tespit ettiğiniz hatalarımızı bizlerle paylaşırsanız çok mutlu oluruz.

Doç. Dr. Durmuş Çağrı Yıldırım

Namık Kemal Üniversitesi

İÇİNDEKİLER

Bölüm 1

GENEL TEKRAR

1.1 ÜSLÜ SAYILAR

n pozitif bir tam sayı olmak üzere x^n, *x* teriminin, *n* defa kendisi ile çarpılacağı anlamına gelmektedir. Burada *x* *taban* ve *n kuvvet* olarak adlandırılmaktadır. Üslü sayılarda 1 etkisiz elemandır: $x^{(1)} = x$, $8^{(1)} = 8$. Sıfır haricindeki tüm sayıların kuvveti 0 olduğunda sonuç 1'e eşittir: $x^0 = 1$, $3^0 = 1$ ve 0^0 tanımsızdır. *a* ve *b* pozitif tam sayı, *x* ve *y* reel sayılar olmak üzere, *üslü sayıların kuralları* aşağıda verilmiş, Örnek 1 ve Örnek 2'de örneklendirilmiş ve Problem 1.1, 1.24, 1.26 ve 1.27'de uygulanmıştır.

1. $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	4. $(xy)^a = x^a y^a$	7. $\sqrt{x} = x^{1/2}$
2. $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$	5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$	8. $\sqrt[a]{x} = x^{1/a}$
3. $(x^a)^b = x^{ab}$	6. $\dfrac{1}{x^a} = x^{-a}$	9. $x^0 = 1 \qquad (x \neq 0)$

ÖRNEK 1. Yukarıdaki kurallarda gösterildiği gibi, çarpma işleminde tabanları aynı olan değişkenlerin kuvvetleri toplanır; bölme işleminde tabanları aynı olan değişkenlerin kuvvetleri çıkarılır; üslü bir değişkenin kuvveti alınırken kuvvetler çarpılır. Aşağıda tüm kurallar ayrıntılı örneklerle gösterilmiştir.

(*a*) $x^2 \cdot x^5 = x^{2+5} = x^7 \neq x^{10}$ (Kural 1)

$$x^2 \cdot x^5 = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^7$$

(*b*) $\dfrac{x^8}{x^2} = x^{8-2} = x^6 \neq x^4$ (Kural 2)

$$\frac{x^8}{x^2} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x} = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^6$$

(*c*) $(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6 \neq x^9$ veya x^5 (Kural 3)

$$(x^3)^2 = (x \cdot x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x^6$$

(*d*) $(xy)^3 = x^3y^3 \neq xy^3$ veya x^3y (Kural 4)

$$(xy)^3 = (xy)(xy)(xy) = (x \cdot x \cdot x)(y \cdot y \cdot y) = x^3y^3$$

(*e*) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^5 = \dfrac{x^5}{y^5} \neq \dfrac{x^5}{y}$ veya $\dfrac{x}{y^5}$ (Kural 5)

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{x^5}{y^5}$$

(*f*) $\dfrac{x^2}{x^3} = x^{2-3} = x^{-1} = \dfrac{1}{x} \neq x^{2/3}$ (Kural 2 ve 6)

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x}$$

(*g*) $\sqrt{x} = x^{1/2}$ (Kural 7)

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ olduğu için ve Kural 1'de gösterildiği gibi tabanları aynı olan üslü sayılar çarpıldığında kuvvetleri toplandığı için buradaki $\sqrt{x}$'lerin kuvvetleri toplandığında sonuç 1'e eşit olmalıdır. Bu koşul $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, şeklinde sağlanabilmektedir bu nedenle $\sqrt{x}$'in kuvveti $\frac{1}{2}$ olmalıdır. Böylece $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^{1/2+1/2} = x^1 = x$'dir.

(*h*) $\sqrt[4]{x} = x^{1/4}$ (Kural 8)

Çünkü $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x} = x$, bu nedenle $x^{1/4} \cdot x^{1/4} \cdot x^{1/4} \cdot x^{1/4} = x^{1/4+1/4+1/4+1/4} = x^1 = x$.

Problem 1.1, 1.24, 1.26 ve 1.27'ye bakınız.

ÖRNEK 2. Kural 2'den herhangi bir değişken ya da sıfır haricindeki sayıların kuvveti sıfır alındığında sonucun neden 1 'e eşit olduğu kolaylıkla görülebilir. Örneğin, $x^3/x^3 = x^{3-3} = x^0 = 1$; $8^5/8^5 = 8^{5-5} = 8^0 = 1$.

1.2 POLİNOMLAR

$9x^5$ şeklinde bir ifade verildiğinde, burada x yerine herhangi bir değer yazılabildiğinden x değeri *değişken* olarak adlandırılır ve 9, x^5 in *katsayısı* olarak nitelendirilir. Yalnızca bir reel sayıdan oluşan ya da katsayı ile çarpılmış pozitif tam sayı kuvvete sahip bir veya daha fazla değişkenden oluşan gösterimler *tek terimli* olarak adlandırılmaktadır. *Polinomları* oluşturmak için tek terimliler toplanabilir ya da çıkarılabilir. Polinomu oluşturan her bir tek terimli *terim* olarak adlandırılır. Aynı değişken ve kuvvetten oluşan terimler *benzer terimler* olarak isimlendirilir. Bir tek terimlinin *derecesi* değişkenlerin kuvvetlerinin toplamıdır. Bir polinomun derecesi ise en yüksek dereceli teriminin derecesidir. Polinomlarda toplama, çıkarma, çarpma ve bölme kuralları aşağıda anlatılmıştır, Örnek 3, 4 ve 5'te açıklanmıştır ve Problem 1.3 ve 1.4'te uygulanmıştır.

1.2.1 Polinomlarda Toplama ve Çıkarma

Polinomlarda benzer terimlerin katsayıları toplanıp veya çıkarılarak toplama veya çıkarma işlemi yapılabilir. Benzer olmayan terimlerle toplama veya çıkarma işlemi yapılamaz.

ÖRNEK 3.

(*a*) $6x^3 + 15x^3 = 21x^3$

(*b*) $18xy - 7xy = 11xy$

(*c*) $(4x^3 + 13x^2 - 7x) + (11x^3 - 8x^2 - 9x) = 15x^3 + 5x^2 - 16x$

(*d*) $(22x - 19y) + (7x + 6z) = 29x - 19y + 6z$

Ayrıca Problem 1.3'e bakınız.

1.2.2 Terimlerde Çarpma ve Bölme

Benzer ve benzer olmayan değişkenler, değişkenlere ve katsayılara bölünerek veya değişkenlerle ve katsayılarla çarpılarak bölme veya çarpma işlemi yapılabilir.

ÖRNEK 4.

(*a*) $20x^4 \cdot 7y^6 = 140x^4y^6$

(*b*) $6x^2y^3 \cdot 8x^4y^6 = 48x^6y^9$

(*c*) $12x^3y^2 \cdot 5y^4z^5 = 60x^3y^6z^5$

(*d*) $3x^3y^2z^5 \cdot 15x^4y^3z^4 = 45x^7y^5z^9$

(*e*) $\dfrac{24x^5y^3z^7}{6x^3y^2z^4} = 4x^2yz^3$

(*f*) $\dfrac{35x^2y^7z^5}{5x^6y^4z^8} = 7x^{-4}y^3z^{-3} = \dfrac{7y^3}{x^4z^3}$

1.2.3 Polinomlarda Çarpma

İki polinomu çarpmak için, birinci polinomdaki her bir terim ikinci polinomdaki her bir terim ile çarpılır ve sonra çarpımlar toplanır.

ÖRNEK 5.

(*a*) $(5x+8y)(3x+7y) = 15x^2 + 35xy + 24xy + 56y^2$
$= 15x^2 + 59xy + 56y^2$

(*b*) $(4x+5y)(2x-7y-3z) = 8x^2 - 28xy - 12xz + 10xy - 35y^2 - 15yz$
$= 8x^2 - 18xy - 12xz - 15yz - 35y^2$

Ayrıca Problem 1.4'e bakınız.

1.3 ÇARPANLARA AYIRMA

Çarpanlara ayırma polinomları çarpan olarak adlandırılan daha küçük polinomların çarpımı olarak göstermeye yarayan işlemdir. 14 sayısı gibi bir *tek terimli*, $1\cdot14$, $2\cdot7$, $(-1)\cdot(-14)$ veya $(-2)\cdot(-7)$ şeklinde tam sayı çarpanlarının çarpımı biçiminde ifade edilerek kolaylıkla çarpanlarına ayrılır. $5x^4 - 45x^3$ gibi bir *iki terimli*, burada $5x^3$, olmak üzere, en büyük ortak çarpana ayrılarak veya paranteze alınarak $5x^3(x-9)$ şeklinde kolaylıkla çarpanlarına ayrılabilir. $mx^2 + nx + p$ şeklindeki bir üçterimliyi çarpanlarına ayırırken aşağıdaki kurallar uygulanmaktadır:

1. $mx^2 + nx + p$ için (1) $ab = m$, (2) $cd = p$ ve (3) $ad + bd = n$ olmak üzere, çarpanları $(ax + c)\ (bx + d)$'dır.
2. $(mx^2 + nxy + py^2)$ için yukarıdaki gibi (1) $ab = m$, (2) $cd = p$ ve (3) $ad + bd = n$ olmak üzere, çarpanları $(ax + cy)\ (bx + dy)$'dir.

ÖRNEK 6. $(x^2 + 11x+24)$ üçterimlisini çarpanlarına ayırmak için yukarıdaki Kural 1'e göre $m = 1$, $n = 11$ ve $p = 24$ değerlerini sağlayacak tam sayı çarpanları bulunmalıdır.

1) $a\cdot b = 1$. Tam sayı çarpanları $1\cdot1$ ve $(-1)\cdot(-1)$'dir. Basitleştirmek adına bu örnekte yalnızca pozitif tam sayı değerlerini alıyoruz ve ikinci adıma geçiyoruz.

2) $c\cdot d = 24$. Tam sayı değerleri $1\cdot24$, $2\cdot12$, $3\cdot8$, $4\cdot6$, $6\cdot4$, $8\cdot3$, $12\cdot2$, $24\cdot1$'dir.

3) $ad + bc = 11$. $a = b = 1$ olduğundan $c + d = 11$ olmalıdır.

2. adımdaki çarpanların farklı kombinasyonları toplandığında, $1 + 24 = 25$, $2 + 12 = 14$, $3 + 8 = 11$, $4 + 6 = 10$, $6 + 4 = 10$, $8 + 3 = 11$, $12 + 2 = 14$ ve $24 + 1 = 25$ sonuçları elde edilmektedir. Yukarıdaki tüm gereklilikleri sağlamak için 1. adımdaki $a = b = 1$ sonucunu kullandığımızda, 3. adımda yalnızca $3 + 8$ ve $8 + 3 = 11$ eşitliği sağladıkları için 2. adımdaki c ve d değerleri adaylarımız yalnızca 3 ve 8'dir ve sıralamanın bir önemi yoktur. Böylece,

$$(x^2 + 11x + 24) = (x+3)(x+8) \quad \text{veya} \quad (x+8)(x+3)\text{'dir.}$$

Problem 1.5'ten 1.13'e kadar bakınız. Kural türetimleri için Problem 1.28 ve 1.29'a bakınız.

1.4 KESİRLER

Kesirler veya *rasyonel sayılar,* paydadaki polinomların hiçbir zaman sıfıra eşit olmadıkları varsayılarak *paydaki* ve *paydadaki* polinomlardan oluşurlar. Bir kesrin *en sade haline sadeleştirilmesi* paydaki ve paydadaki tüm ortak değerlerin birbirlerine bölünmesiyle gerçekleştirilir. Bir kesrin *genişletilmesi* hem payın hem de paydanın sıfırdan farklı bir polinomla çarpılması anlamına gelir. *A, B, C* ve *D* değerlerinin polinom oldukları varsayılarak ve *C* ve $D \neq 0$ olmak üzere kesirlerde işlemler aşağıdaki kurallara dayalıdır:

1. $\dfrac{A}{C}\cdot\dfrac{D}{D} = \dfrac{A}{C}$
2. $\dfrac{A}{C}\cdot\dfrac{B}{D} = \dfrac{AB}{CD}$
3. $\dfrac{A}{C}\div\dfrac{B}{D} = \dfrac{A}{C}\cdot\dfrac{D}{B} \qquad B \neq 0$
4. $\dfrac{A}{C}\pm\dfrac{B}{C} = \dfrac{A \pm B}{C}$
5. $\dfrac{A}{C}\pm\dfrac{B}{D} = \left(\dfrac{A}{C}\cdot\dfrac{D}{D}\right)\pm\left(\dfrac{B}{D}\cdot\dfrac{C}{C}\right) = \dfrac{AD \pm BC}{CD}$

Kesirlerin özellikleri Örnek 7'de gösterilmiş ve Problem 1.14'ten 1.21'e kadar uygulanmıştır.

ÖRNEK 7.

(*a*) Bir kesrin payı ve paydası sıfırdan farklı olmak üzere aynı sayı veya polinomla çarpıldığında veya bölündüğünde kesrin değeri değişmez.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{x}=\frac{2x}{3x}=\frac{2\not{x}}{3\not{x}}=\frac{2}{3} \qquad \text{(Kural 1)}$$

Kural 1 aynı zamanda kesirleri en sade hale getirmeyi ve kesirleri genişletmeyi sağlamaktadır.

(*b*) Kesirlerde çarpma işlemi için basitçe pay ve payda ayrı ayrı çarpılır. Payların çarpımı paya yazılır ve paydaların çarpımı paydaya yazılır.

$$\frac{5}{x+6}\cdot\frac{x-9}{x-4}=\frac{5(x-9)}{(x+6)(x-4)}=\frac{5x-45}{x^2+2x-24} \qquad \text{(Kural 2)}$$

(*c*) Kesirlerde bölme işlemi için bölen ters çevrilir ve çarpılır.

$$\frac{16}{y}\div\frac{7}{y^2-3}=\frac{16}{y}\cdot\frac{y^2-3}{7}=\frac{16y^2-48}{7y} \qquad \text{(Kural 3)}$$

(*d*) Kesirlerde toplama ve çıkarma işlemi, yalnızca *ortak payda* olarak da isimlendirilen paydaları eşit olduğu durumda yapılabilir. Eğer ortak payda varsa, paylar toplanır veya çıkarılır ve sonuç ortak payda üzerine yazılır. Verilen parantez içindeki tüm terimleri çıkarmayı unutmayınız.

$$\frac{6z}{z+5}-\frac{4z+9}{z+5}=\frac{6z-(4z+9)}{z+5}=\frac{2z-9}{z+5} \qquad \text{(Kural 4)}$$

(*e*) Paydaları birbirinden farklı kesirlerde toplama ve çıkarma işlemi yapılabilmesi için öncelikle ortak payda değeri bulunmalıdır. Bir paydanın diğeri ile çarpılması her zaman ortak paydayı verecektir. Kural 1 kullanılarak ortak paydaya göre her bir kesir yeniden yazılır ve (*d*)'de ki gibi paylar toplanır.

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{3}\right)=\frac{4}{12}+\frac{9}{12}=\frac{4+9}{12}=\frac{13}{12} \qquad \text{(Kural 5)}$$

(*f*) Benzer şekilde,

$$\frac{x}{5}-\frac{3}{7x}=\frac{x(7x)-3(5)}{5(7x)}=\frac{7x^2-15}{35x} \qquad \text{(Kural 6)}$$

İki ya da daha fazla kesrin e*n küçük ortak payda*sı, başlangıçtaki kesirlerin paydalarına tam olarak bölünebilen en küçük dereceli polinom ve katsayıdır. En küçük ortak payda kullanımı toplam veya fark sonucunun basitleşmesine yardım eder. Problem 1.19'dan 1.21'e kadar bakınız. Kesirler Problem 1.14 ile 1.21 arasında tekrar edilmiştir.

1.5 KÖKLÜ SAYILAR

$b > 0$ için $b^n = a$ ise, her iki tarafın da n. dereceden kökü alındığında $b=\sqrt[n]{a}$ sonucuna ulaşılır. Burada $\sqrt{}$ kök işaretidir, a kök içerisindeki ifadedir ve n kökün derecesidir. Karekökler için kök derecesi olan 2 yazılmaz. Bu nedenle $\sqrt[2]{}=\sqrt{}$ şeklinde gösterilir. Kısım 1.1'deki Kural 7 ve 8'den $\sqrt{a}=a^{1/2}$ ve $\sqrt[n]{a}=a^{1/n}$ olduğunu biliyoruz.

x ve y negatif olmayan reel sayılar ve m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere $\sqrt[n]{x}$ ve $\sqrt[n]{y}$ gibi *köklülerin kuralları* aşağıda verilmiştir. 1. Kuralın ispatı için Problem 1.30'a bakınız.

1. $(\sqrt[n]{x})^n = x$
2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$
3. $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$
4. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}, \qquad y\neq 0$

ÖRNEK 8. Köklü sayı kuralları aşağıdaki ifadeleri basitleştirmek için kullanılmıştır. Kök derecesi çift sayı olan köklü sayıların hem pozitif hem de negatif sonuçları olduğuna dikkat ediniz.

(*a*) $\left(\sqrt[3]{27}\right)^3 = \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{27} = 3\cdot 3\cdot 3 = 27$ (Kural 1)

(*b*) $\sqrt{\ } = \sqrt[2]{\ }$ olduğu için $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = \pm 2$ (Kural 2)

Diğer bir yol olarak kökler içten dışa doğru sırayla çözülebilir $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = \pm 2$

(*c*) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18} = \sqrt{144} = \pm 12$ (Kural 3)

(*d*) $\dfrac{\sqrt[4]{1782}}{\sqrt[4]{22}} = \sqrt[4]{\dfrac{1782}{22}} = \sqrt[4]{81} = \pm 3$ (Kural 4)

Ayrıca lütfen Problem 1.22, 1.23 ve 1.25 ile 1.27 arasını gözden geçiriniz.

1.6 MATEMATİKSEL İŞLEM ÖNCELİKLERİ

Çok sayıda matematiksel işlemin bir arada yer aldığı bir matematiksel ifadede, öncelikle parantezlerin içerisindeki işlemler yapılır. Eğer parantezlerin içerisinde de parantezler varsa, en içteki parantezin işlemleri öncelik alır. Parantezlerin içinde de eğer varsa ilk önce katsayıların ve değişkenlerin kuvvetleri alınır. Sonrasında öncelikle çarpma ve bölme işlemleri yapılır, ardından toplama ve çıkarma işlemleri yapılır. Aynı öncelikli işlemler bir arada yer alırsa, işlem soldan sağa doğru yapılır. Özetlemek gerekirse,

1. En içtekinden olmak üzere parantezlerin içerisindeki işlemlerden başlanır.
2. Tüm terimlerin ayrı ayrı kuvvetleri alınır..
3. Çarpma ve bölme işlemleri toplama ve çıkarma işlemlerinden önce yapılır.
4. Benzer önceliklerde soldaki işlem ilk önce yapılır.

ÖRNEK 9. $\dfrac{(5^2\cdot 6)}{10} - 8$ çözmek için aşağıda adımlar gösterilmiştir.

1. $5^2 = 25$
2. $25\cdot 6 = 150$
3. $\dfrac{150}{10} = 15$
4. $15 - 8 = 7$

Sonuç olarak, $\dfrac{(5^2\cdot 6)}{10} - 8 = 7$

1.7 HESAP MAKİNESİ KULLANIMI

Hesap makineleri, basit işlemlerde elde edilen sonuçların kontrolünde kullanılmakta ve zor, zaman alıcı işlemlerin kolayca yapılmasını sağlamaktadır. Farklı matematiksel işlemlerin gerçekleştirilmesi için gerekli basamaklar aşağıda anlatılmıştır. Bu işlemlerden bir bölümü kitabın sonuna kadar kullanılmayacak veya ihtiyaç duyulmayacaktır.

1.7.1 İki Sayının Toplanması

İki sayıyı birbiriyle toplamak için öncelikle ilk sayı yazılır, [+] tuşuna basılır ve ikinci sayı yazılır. Sonrasında toplamı bulmak için [=] tuşuna basılır.

ÖRNEK 10.

(*a*) 139 + 216 işleminin sonucunu bulmak için,139 yazılır, [+] tuşuna basılır, 216 yazılır ve [=] tuşuna basılarak 139 + 216 = 355 bulunur.

(*b*) 1025 + 38.75 işleminin sonucunu bulmak için, 1025 yazılır, [+] tuşuna basılır, sonrasında 38.75 yazılır ve [=] tuşuna basılarak 1025+38.75=1063.75 sonucu elde edilir. Bu ve önceki örneğe benzer şekilde hesap makinesi yardımıyla sonucunu bildiğiniz işlemleri yapınız ve süreci doğru şekilde gerçekleştirebildiğinizi kontrol ediniz.

1.7.2 İki Sayıdan Daha Fazlasının Toplanması

İkiden fazla sayının hesap makinesi yardımıyla toplanması için son sayıya kadar her bir sayı yazıldıktan sonra [+] tuşuna basılır. Sonrasında toplamı bulmak için [=] tuşuna basılır. [=] tuşuna ne zaman basılırsa o ana kadarki sayıların toplamı elde edilecektir.

ÖRNEK 11. 139 + 216 + 187 işleminin sonucunu bulmak için, 139 yazılır, [+] tuşuna basılır, 216 yazılır ve tekrar [+] tuşuna basılır, 187 sayısı yazılır ve [=] tuşuna basılarak 139 + 216 + 187 = 542 sonucu elde edilir. Eğer [=] tuşuna 216 sayısı yazıldıktan sonra basılırsa yukarıdaki örnekte olduğu gibi 139 + 216 işleminin sonucu olan 355 sayısı elde edilecektir.

1.7.3 Çıkarma İşlemi

$A-B$ farkının bulmak için, A sayısı yazılır, [−] tuşuna basılır ve B sayısı yazılır. Sonra sonucu bulmak için [=] tuşuna basılır. İki sayıdan daha fazla sayı arasındaki çıkarma işlemi tıpkı Kısım 1.7.2'deki toplama işleminde olduğu gibi, [+] tuşu yerine [−] tuşuna basılarak gerçekleştirilebilir.

ÖRNEK 12.

(*a*) 315 − 708 işleminin sonucunu bulmak için, 315 yazılır, [−] tuşuna basılır, ardından 708 yazılır ve [=] tuşuna basılarak 315 − 708 = −393 sonucu elde edilir.

(*b*) 528 − 79.62 işleminin sonucunu bulmak için, 528 yazılır, [−] tuşuna basılır, ardından 79.62 yazılır ve [=] tuşuna basılarak 528 − 79.62 = 448.38 sonucu elde edilir.

1.7.4. Çarpma İşlemi

İki sayıyı çarpmak için öncelikle ilk sayı yazılır, [x] tuşuna basılır, ikinci sayı yazılır ve çarpımı elde etmek için [=] tuşuna basılır. İkiden fazla sayının çarpımı Kısım 1.7.2'deki toplama işleminde olduğu gibi, [+] tuşu yerine [x] tuşuna basılarak gerçekleştirilebilir.

ÖRNEK 13.

(*a*) 486·27 işleminin sonucunu bulmak için, 486 yazılır, [x] tuşuna basılır, sonrasında 27 yazılır ve [=] tuşuna basılarak 486·27 = 13.122 sonucu bulunur.

(*b*) 149·(−35) işleminin sonucunu bulmak için, 149 yazılır, [x] tuşuna basılır, sonrasında 35 yazılır ve [±] tuşuna basılarak 35 sayısı negatif sayı haline getirilir, [=] tuşuna basılarak 149·(−35) = −5215 sonucu bulunur.

Not: [−] tuşu ile [±] tuşu arasındaki farka dikkat ediniz. [−] tuşu çıkarma işlemini gerçekleştirirken; [±] tuşu ise pozitif sayıları negatif sayı haline ve negatif sayıları pozitif sayı haline getirir.

1.7.5 Bölme İşlemi

A sayısının B sayısına bölünme işlemi için öncelikle A sayısı yazılır, [÷] tuşuna basılır, ardından B sayısı yazılır ve [=] tuşuna basılır.

ÖRNEK 14.

(*a*) 6715÷79 işleminin sonucunu bulmak için, 6715 yazılır, [÷] tuşuna basılır, sonrasında 79 yazılır ve [=] tuşuna basılarak 6715÷79 = 85 sonucu elde edilir.

(*b*) −297.36÷72.128 işleminin sonucunu bulmak için, 297.36 yazılır [±] tuşuna basılarak 297.36 sayısı negatif sayı haline getirilir, sonrasında [÷] tuşuna basılır, 72.128 yazılır ve [=] tuşuna basılarak −297.36÷72.128 = −4.1226708 sonucu elde edilir.

1.7.6 Kuvvet Alma

Bir sayının kuvvetini almak için, sayı yazılır, [y^x] tuşuna basılır, ardından üs yazılır ve [=] tuşuna basılır.

ÖRNEK 15.

(*a*) 8^5 sayısının bulmak için, 8 yazılır, [y^x] tuşuna basılır, ardından sayının kuvveti olan 5 yazılır ve [=] tuşuna basılarak $8^5 = 32{,}768$ sonucu elde edilir. Cevabını bildiğiniz basit sayılar kullanarak bu ve bundan sonraki işlemleri uygulamaya devam ediniz.

(*b*) $36^{0.25}$ sayısının kuvvetini almak için, 36 yazılır, [y^x] tuşuna basılır, ardından sayının kuvveti olan 0.25 yazılır ve [=] tuşuna basılarak $36^{0.25} = 2.4494897$ sonucu elde edilir.

(*c*) 2^{-3} sayısının kuvvetini almak için, 2 yazılır, [y^x] tuşuna basılır, ardından sayının kuvvetini yazmak için 3 yazılır ve [±] tuşuna basılarak 3 sayısı negatif sayı haline getirilir, sonrasında [=] tuşuna basılarak $2^{-3} = 0.125$ sonucu elde edilir.

Ayrıca Problem 1.24'e bakınız.

1.7.7 Karekök Alınması

Bir sayının karekökünü almak için, sayı yazılır, ardından karekökü bulmak için [$\sqrt{x}$] tuşuna basılarak [=] tuşuna basmaya gerek kalmaksızın sonuç elde edilir. Pek çok hesap makinesinde [$\sqrt{x}$] tuşunun [x^2] tuşunun tersi ya da ikinci fonksiyonu olduğuna dikkat ediniz ve [$\sqrt{x}$] tuşunu aktif hale getirebilmek için öncelikle [INV] ([Shift] ya da [2dF]) tuşuna basılıp ve sonrasında [x^2] tuşuna basılması gereklidir.

ÖRNEK 16. $\sqrt{529}$ sayısının karekökünü almak için, 529 yazılır, sonrasında 529 sayısının kare kökünün ± 23 olduğunu hızlıca görebilmek için [$\sqrt{x}$] tuşuna basılır.

Eğer [$\sqrt{x}$] tuşu, [x^2] tuşunun tersi ya da ikinci fonksiyonu ise öncelikle 529 yazılır, sonrasında [INV] ([Shift] ya da [2dF]) tuşuna basılarak [x^2] tuşuna basılır ve [$\sqrt{x}$] tuşu aktif hale getirilir. Sonrasında $\sqrt{529} = 23$ işleminin sonucu [=] tuşuna basmaya gerek kalmaksızın elde edilir.

1.7.8 Bir Sayının *n*. Dereceden Kökünün Bulunması*

Bir sayının *n*. dereceden kökünün bulunması için, sayı yazılır, [$\sqrt[x]{y}$] tuşuna basılır, ardından *n*. dereceden kökü belirten değer yazılır ve kökü bulmak için [=] tuşuna basılır. Eğer [$\sqrt[x]{y}$] tuşu [y^x] tuşunun tersi ya da ikinci fonksiyonu ise kökü alınmak istenen sayı yazılır, [INV] ([Shift] ya da [2dF]) tuşuna basılır ve sonrasında [y^x] tuşuna basılarak sayının *n*. dereceden kökü [=] tuşuna basmaya gerek kalmaksızın elde edilir.

ÖRNEK 17.

(*a*) $\sqrt[3]{17{,}576}$ sayısının kökünün bulunabilmesi için, 17,576 yazılır, [INV] tuşuna basılır ve hemen sonra [y^x] tuşuna basılır, 3 yazılır ve ardından [=] tuşuna basılarak sayının kökünün $26 = \sqrt[3]{17{,}576}$ olduğu bulunur.

(*b*) $\sqrt[5]{32{,}768}$ sayısının kökünün bulunabilmesi için, 32,768 yazılır, [INV] tuşuna basılır ve hemen sonra [y^x] tuşuna basılır, daha sonra 5 yazılır ve [=] tuşuna basılarak sayının kökünün $8 = \sqrt[5]{32{,}768}$ olduğu bulunur.

(*c*) Kısım 1.1'deki Kural 8 kullanılarak $\sqrt[5]{32{,}768} = 32{,}768^{1/5} = 32{,}768^{0.2}$ şeklinde yazılabilir. Çözüme bu şekilde basitçe ulaşmak için 32,768 yazılır, [y^x] tuşuna basılır, 0.2 yazılır, [=] tuşuna basılarak $32{,}768^{0.2} = 8$ sonucu elde edilir.

Benzer çevirimlerde kullanmak için $\sqrt{x} = x^{1/2} = x^{0.5}, \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \approx x^{0.33}, \sqrt[4]{x} = x^{1/4} = x^{0.25}$ ve benzeri olduğunu unutmayınız. Problem 1.25'ten 1.27'ye kadar bakınız.

1.7.9 Logaritmik Sayılar

$\log_{10} x$ şeklindeki bir bayağı logaritmasının değerini bulmak için, *x* değeri yazılır ve [log] tuşuna basılır. Sonuç [=] tuşuna basmaya gerek kalmaksızın elde edilecektir.

---

* Bazı hesap makinelerinde (CASIO gibi) kök alma işlem sırası farklıdır.

1. Kökün dercesi yazılır.
2. INV, Shift veya 2dF tuşuna balılır.
3. Üslü sayı tuşuna basılır.
4. Kök içndeki sayı yazılır.
5. Eşittir işaretine basılır.

ÖRNEK 18.

(a) log 24 sayısının değerini bulmak için, 24 yazılır ve [log] tuşuna basılır. log 24 = 1.3802112 olduğunu gösteren 1.3802112 sonucu hemen ekrana gelecektir.

(b) log 175 sayısının değerini bulmak için, 175 yazılır ve [log] tuşuna basılır. log 175'in değeri olarak 2.243038 sonucunu göreceksiniz.

1.7.10 Doğal Logaritma

ln x şeklinde ifade edilen doğal logaritmanın değerini bulmak için, x değeri yazılır ve [ln x] tuşuna basılır. Sonuç [=] tuşuna basmaya gerek kalmaksızın elde edilecektir.

ÖRNEK 19.

(a) ln 20'yi bulmak için, 20 yazılır, ln 20 = 2.9957323 sonucunu görmek için [ln x] tuşuna basılır.

(b) ln 0.75 için, 0.75 yazılır ve [ln x] tuşuna basılır. ln 0.75 = –0.2876821 sonucunu bulacaksınız.

1.7.11 Üstel Fonksiyonlar

$y = a^x$ şeklindeki üstel bir fonksiyonun değerini bulmak için, a'nın değeri yazılır ve [y^x] tuşuna basılır, sonrasında x'in değeri yazılır ve Kısım 1.7.6'da yapılana benzer biçimde [=] tuşuna basılır.

ÖRNEK 20.

(a) $y = 1.5^{3.2}$ olmak üzere, 1.5 yazılır, [y^x] tuşuna basılır, sonrasında 3.2 yazılır, ardından [=] tuşuna basılarak $1.5^{3.2} = 3.6600922$ sonucu elde edilir.

(b) $y = 256^{-1.25}$ için, 256 yazılır, [y^x] tuşuna basılır, sonrasında 1.25 yazılır, ardından 1.25 sayısını negatif sayı haline dönüştürmek için [±] tuşuna basılır ve sonrasında [=] basılarak $256^{-1.25} = 0.0009766$ sonucu elde edilir.

1.7.12 Doğal Üstel Fonksiyonlar

$y = e^x$ şeklindeki bir doğal üstel fonksiyonun değerini bulmak için, x'in değeri yazılır, [e^x] tuşuna basılır ve sonuç [=] tuşuna basmaya gerek kalmaksızın ekranda belirecektir. Eğer [e^x] tuşu [ln$x$] tuşunun tersi ya da ikinci fonksiyonu ise x'in değeri yazılır, [INV] tuşuna basılır ve hemen ardından [ln$x$] tuşuna basılır ve sonuç elde edilecektir.

ÖRNEK 21.

(a) $y = e^{1.4}$ olmak üzere, 1.4 yazılır, [INV] tuşuna basılır ve hemen ardından [ln$x$] tuşuna basılarak $e^{1.4} = 4.0552$ sonucu elde edilir.

(b) $e^{-0.65}$ için, 0.65 yazılır, 0.65 sayısını negatif sayı haline dönüştürmek için [±] tuşuna basılır, ardından [INV] tuşuna basılır ve hemen ardından [ln$x$] tuşuna basılarak $e^{-0.65} = 0.5220458$ sonucu elde edilir.

Ayrıca Problem 1.24'ten 1.27'ye kadar bakınız.

Çözümlü Problemler

ÜSLÜ SAYILAR

1.1 Kısım 1.1'deki kuralları kullanarak aşağıdaki ifadeleri en sade halleriyle yazınız.

(a) $x^3 \cdot x^4$

$$x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7 \qquad \text{(Kural 1)}$$

(*b*) $x^5 \cdot x^{-3}$

$$x^5 \cdot x^{-3} = x^{5+(-3)} = x^2 \qquad \text{(Kural 1)}$$

$$\left[x^5 \cdot x^{-3} = x^5 \cdot \frac{1}{x^3} = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \frac{1}{x \cdot x \cdot x} = x^2\right]$$

(*c*) $x^{-2} \cdot x^{-4}$

$$x^{-2} \cdot x^{-4} = x^{-2+(-4)} = x^{-6} = \frac{1}{x^6} \qquad \text{(Kural 1)}$$

$$\left[x^{-2} \cdot x^{-4} = \frac{1}{x \cdot x} \cdot \frac{1}{x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^6}\right]$$

(*d*) $x^{1/2} \cdot x^3$

$$x^{1/2} \cdot x^3 = x^{(1/2)+3} = x^{3\frac{1}{2}} = x^{7/2} = \sqrt{x^7} \qquad \text{(Kural 7 ve 1)}$$

$$[x^{1/2} \cdot x^3 = (\sqrt{x})(x \cdot x \cdot x) = (\sqrt{x})(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = (x^{1/2})^7 = x^{7/2}]$$

(*e*) $\dfrac{x^{10}}{x^6}$

$$\frac{x^{10}}{x^6} = x^{10-6} = x^4 \qquad \text{(Kural 2)}$$

(*f*) $\dfrac{x^4}{x^6}$

$$\frac{x^4}{x^6} = x^{4-6} = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \qquad \text{(Kural 2 ve 6)}$$

$$\left[\frac{x^4}{x^6} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^2}\right]$$

(*g*) $\dfrac{x^5}{x^{-6}}$

$$\frac{x^5}{x^{-6}} = x^{5-(-6)} = x^{5+6} = x^{11} \qquad \text{(Kural 2)}$$

$$\left[\frac{x^5}{x^{-6}} = \frac{x^5}{(1/x^6)} = x^5 \cdot x^6 = x^{11}\right]$$

(*h*) $\dfrac{x^5}{\sqrt{x}}$

$$\frac{x^5}{\sqrt{x}} = \frac{x^5}{x^{1/2}} = x^{5-(1/2)} = x^{4\frac{1}{2}} = x^{9/2} = \sqrt{x^9} \qquad \text{(Kural 2 ve 7)}$$

(*i*) $(x^4)^{-3}$

$$(x^4)^{-3} = x^{4(-3)} = x^{-12} = \frac{1}{x^{12}} \qquad \text{(Kural 3 ve 6)}$$

(*j*) $(\sqrt[3]{x})^4$

$$(\sqrt[3]{x})^4 = (x^{1/3})^4 = x^{(1/3)(4)} = x^{4/3} \qquad \text{(Kural 8 ve 3)}$$

(*k*) $\dfrac{1}{x^3} \cdot \dfrac{1}{y^3}$

$$\frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{y^3} = x^{-3} \cdot y^{-3} = (xy)^{-3} = \frac{1}{(xy)^3} \qquad \text{(Kural 6 ve 4)}$$

(*l*) $\left(\frac{x^5}{y^7}\right)^2$

$$\left(\frac{x^5}{y^7}\right)^2 = \frac{x^{5\cdot 2}}{y^{7\cdot 2}} = \frac{x^{10}}{y^{14}} \qquad \text{(Kural 3 ve 5)}$$

Ayrıca Problem 1.24, 1.26 ve 1.27'ya bakınız.

POLİNOMLAR

1.2. Aşağıdaki polinomlar üzerindeki aritmetik işlemleri gerçekleştiriniz:

(*a*) $35xy + 52xy$

$35xy + 52xy = 87xy$

(*b*) $22yz^2 - 46yz^2$

$22yz^2 - 46yz^2 = -24yz^2$

(*c*) $79x^2y^3 - 46x^2y^3$

$79x^2y^3 - 46x^2y^3 = 33x^2y^3$

(*c*) $16x_1x_2 + 62x_1x_2$

$16x_1x_2 + 62x_1x_2 = 78x_1x_2$

(*e*) $57y_1y_2 - 70y_1y_2$

$57y_1y_2 - 70y_1y_2 = -13y_1y_2$

(*f*) $0.5x^2y^3z^5 + 0.9x^2y^3z^5$

$0.5x^2y^3z^5 + 0.9x^2y^3z^5 = 1.4x^2y^3z^5$

1.3. Aşağıdaki polinomlarda gösterildiği gibi toplama ve çıkarma işlemlerini yapınız. Çıkarma işleminde aynı dereceli terimleri toplamadan önce parantez içerisinde gösterilen çıkan polinomun terimlerinin işaretlerini değiştirmeyi unutmayın.

(*a*) $(25x - 9y) + (32x + 16y)$

$$(25x - 9y) + (32x + 16y) = 57x + 7y$$

(*b*) $(84x - 31y) - (76x + 43y)$

Parantez içerisindeki ikinci polinomun her bir terimi, bu terimlerin mevcut işaretlerini değiştiren -1 ile çarpılır, sonrasında basitçe toplanır ve sonuç elde edilir.

$$(84x - 31y) - (76x + 43y) = 84x - 31y - 76x - 43y = 8x - 74y$$

(*c*) $(9x^2 + 7x) - (3x^2 - 4x)$

Parantez içerisindeki ikinci polinomun tüm terimleri işaretleri değiştirilir ve sonra toplanır. Sonuç elde edilir.

$$(9x^2 + 7x) - (3x^2 - 4x) = 9x^2 + 7x - 3x^2 + 4x = 6x^2 + 11x$$

(*d*) $(42x^2 + 23x) - (5x^2 + 11x - 82)$

$$(42x^2 + 23x) - (5x^2 + 11x - 82) = 42x^2 + 23x - 5x^2 - 11x + 82$$
$$= 37x^2 + 12x + 82$$

1.4. Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız. Birinci polinomun her bir teriminin ikinci polinomun her bir terimi ile çarpılıp ve çarpımların toplandığını hatırlayınız.

(*a*) $(2x + 7)(4x - 5)$

$$(2x + 7)(4x - 5) = 8x^2 - 10x + 28x - 35 = 8x^2 + 18x - 35$$

(*b*) $(5x - 6y)(4x - 3y)$

$$(5x - 6y)(4x - 3y) = 20x^2 - 15xy - 24xy + 18y^2 = 20x^2 - 39xy + 18y^2$$

(*c*) $(2x - 9)^2$

$$(2x - 9)^2 = (2x - 9)(2x - 9) = 4x^2 - 18x - 18x + 81 = 4x^2 - 36x + 81$$

(*d*) $(2x + 3y)(2x - 3y)$

$$(2x + 3y)(2x - 3y) = 4x^2 - 6xy + 6xy - 9y^2 = 4x^2 - 9y^2$$

(*e*) $(4x + 3y)(5x^2 - 2xy + 6y^2)$

$$(4x + 3y)(5x^2 - 2xy + 6y^2) = 20x^3 - 8x^2y + 24xy^2 + 15x^2y - 6xy^2 + 18y^3$$
$$= 20x^3 + 7x^2y + 18xy^2 + 18y^3$$

(*a*) $(3x^3 - 5x^2y^2 - 2y^3)(7x - 4y)$

$$(3x^3 - 5x^2y^2 - 2y^3)(7x - 4y) = 21x^4 - 12x^3y - 35x^3y^2 + 20x^2y^3 - 14xy^3 + 8y^4$$

ÇARPANLARA AYIRMA

1.5. Aşağıdaki polinomları en büyük ortak çarpan parantezine alarak en sade halleriyle yazınız.

(*a*) $32x - 8$

$32x - 8 = 8(4x - 1)$

(*b*) $18x^2 + 27x$

$18x^2 + 27x = 9x(2x + 3)$

(*c*) $14x^5 - 35x^4$

$14x^5 - 35x^4 = 7x^4(2x - 5)$

(*d*) $45x^2y^5 - 75x^4y^3$

$45x^2y - 75x^4y^3 = 15x^2y^3(3y^2 - 5x^2)$

(*e*) $55x^8y^9 - 22x^6y^4 - 99x^5y^7$

$55x^8y^9 - 22x^6y^4 - 99x^5y^7 = 11x^5y^4(5x^3y^5 - 2x - 9y^3)$

1.6. Aşağıdaki ifadeleri katsayılar tam sayı olacak şekilde çarpanlarına ayırınız.

(*a*) $x^2 + 10x + 21$

Kısım 1.3'teki Kural 1 kullanıldığında $m = 1$, $n = 10$ ve $p = 21$'dir. Basitleştirmek için yalnızca pozitif tam sayı olan katsayılar ile sınırlanır.

(1) $a{\cdot}b = 1$ [1.1], Bu koşulu yalnızca $a = b = 1$ değerleri sağladığı için bu basamak atlanır, a ve b değerleri için yalnızca 1 değeri kabul edilir.

(2) $c{\cdot}d = 21$ [1,21; 3,7; 7,3; 21,1]

(3) $ad + bc = 10$. $a = b = 1$ olduğu için $(c + d)$ toplamı 10'a eşit olmalıdır. Yalnızca 3+7 ve 7+3 değerleri 10'a eşittir.

$$x^2 + 10x + 21 = (x + 3)(x + 7) \text{ veya } (x + 7)(x + 3)$$

$a{\cdot}b = 1$ olduğu durumda çarpanların gösterim sırası önemli değildir ve yalnızca bir tanesinin gösterilmesi yeterlidir.

(*b*) $x^2 + 8x + 16$

(1) $c.d = 16$ [1, 16; 2, 8; 4, 4]

(2) $c + d = 8$ [$1 + 16 \neq 8$; $2 + 8 \neq 8$; $4 + 4 = 8$]

$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)(x + 4)$

(*c*) $x^2 + 13x + 36$

(1) $c.d = 36$ [1, 36; 2, 18; 3, 12; 4, 9; 6, 6]

(2) $c + d = 13$ [yalnızca $4 + 9 = 13$]

$x^2 + 13x + 36 = (x + 4)(x + 9)$

1.7. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız. Sabit terim pozitif iken x'in katsayısının negatif olduğuna dikkat ediniz.

(*a*) $x^2 - 13x + 30$

$(c{\cdot}d)$ değeri pozitif ve $(c + d)$ değeri negatif olacağından her iki çarpanın da negatif tam sayı olması gerekmektedir. c ve d çarpanlarının pozitif değerlerini göz ardı edebiliriz.

(1) $c.d = 30$ [−1, −30; −2, −15; −3, −10; −5, −6]

(2) $c + d = -13$ [yalnızca $-3 + (-10) = -13$]

$x^2 - 13x + 30 = (x - 3)(x - 10)$

(*b*) $x^2 - 15x + 36$

(1) $c.d = 36$ [−1, −36; −2, −18; −3, −12; −4, −9; −6, −6]

(2) $c + d = -15$ [$-3 + (-12) = -15$]

$x^2 - 15x + 36 = (x - 3)(x - 12)$

1.8. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız. Şimdi ise x'in katsayısının pozitif ve sabit terimin negatif olduğuna dikkat ediniz.

(a) $x^2 + 19x - 42$

($c \cdot d$) değeri negatifken iki tam sayı çarpanın işaretleri zıt olmalıdır; iki çarpandan biri negatifken ($c + d$)'nin pozitif olması için mutlak değeri büyük olan çarpanın pozitif olması gereklidir.

(1) $c \cdot d = -42$ [–1, 42; –2, 21; –3, 14; –6, 7]

(2) $c + d = 19$ [yalnızca $-2 + 21 = 19$]

$$x^2 + 19x - 42 = (x - 2)(x + 21)$$

(b) $x^2 + 18x - 63$

(1) $c \cdot d = -63$ [–1, 63; –3, 21; –7, 9]

(2) $c + d = 63$ [$-3 + 21 = 18$]

$$x^2 + 18x - 63 = (x - 3)(x + 21)$$

1.9. Hem x'in katsayısının hem de sabit terimin işaretinin negatif olduğuna dikkat ederek aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

(a) $x^2 - 8x - 48$

($c \cdot d$) ve ($c + d$) değerlerinin her ikisi de negatif olduğundan çarpanların işaretleri birbirinden farklı ve mutlak değerce büyük olan çarpanın işareti negatif olmalıdır.

(1) $c \cdot d = -48$ [–1, 48; 2, –24; 3, –16; 4, –12; –6, 8]

(2) $c + d = -8$ [$4 + (-12) = -8$]

$$x^2 - 8x - 48 = (x + 4)(x - 12)$$

(b) $x^2 - 26x - 56$

(1) $c \cdot d = -56$ [1, –56; 2, –28; 4, –14; 7, –8]

(2) $c + d = -26$ [$2 + (-28) = -26$]

$$x^2 - 26x - 56 = (x + 2)(x - 28)$$

1.10. x değerinin olmadığına ve sabit terimin negatif olduğuna dikkat ederek aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

(a) $x^2 - 81$

($c \cdot d$) değeri negatif ve ($c + d$) = 0 olacağından çarpanlar mutlak değerce eşit ancak işaretleri farklı olmalıdır.

(1) $c \cdot d = -81$ [9, –9]

(2) $c + d = 0$ [$9 + (-9) = 0$]

$$x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$$

(b) $x^2 - 169$

(1) $c \cdot d = -169$ [13, –13]

(2) $c + d = 0$ [$13 + (-13) = 0$]

$$x^2 - 169 = (x + 13)(x - 13)$$

1.11. Aşağıdaki x^2 teriminin katsayısının 1 ile sınırlı olmadığı ifadeleri çarpanlarına ayırmak için Problem 1.5 ile 1.10 arasındaki sorularda geliştirilen teknik ve işlemleri kullanınız.

(a) $5x^2 + 47x + 18$

(1) $a \cdot b = 5$ Çarpanları **[5, 1]**'dir. Bu durumda çarpanlar $(5x + ?)(x + ?)$ şeklinde olur.

(2) $c \cdot d = 18$ [1,18; 2,9; 3,6]

(3) $ad - bc = 47$ Basamak (2)'deki tüm olası çarpan çiftleri *her iki* sıralamayla birlikte basamak (1)'deki değerlerle denenmelidir. (1) **[5, 1]** ile [1, 18; 18, 1; 2, 9; 9, 2; 3, 6; 6, 3] şeklinde.

Yukarıdaki tüm olası çarpanlar içerisinde yalnızca $(\mathbf{5} \cdot 9) + (\mathbf{1} \cdot 2) = 47$ istenilen sonucu sağlamaktadır. **5** ile 9'un ve **1** ile 2'nin çarpıldığına dikkat ederek çarpanlar dikkatlice ayrıldığında sonuç elde edilir.

$$5x^2 + 47x + 18 = (5x + 2)(x + 9)$$

(*b*) $3x^2 + 22x + 24$

(1) $a \cdot b = 3$ Çarpanlar **[3,1]** olarak ele alındığında ayrılan çarpanlar $(3x + ?)(x + ?)$ şeklinde olur.

(2) $c \cdot d = 24$ [1, 24; 24, 1; 2, 12; 12, 2; 3, 8; 8, 3; 4, 6; 6, 4]

(3) $ad + bc = 22$ Daha sonra **3** ile 6'nın ve **1** ile 4'ün çarpıldığına dikkat ederek çarpanlar ayrıldığında sonuç elde edilir. $[(\mathbf{3} \cdot 6) + (\mathbf{1} \cdot 4) = 22]$

(*c*) $3x^2 - 35x + 22$

(1) $a \cdot b = 3$ [3, 1]

(2) $c \cdot d = 22$ [–1, –22; –22, –1; –2, –11; –11, –2], Problem 1.7'de olduğu gibi.

(3) $ad + bc = -35$ Sonrasında 3 ile (–11) ve 1 ile (–2) çarpanları yeniden düzenlendiğinde sonuç elde edilir. $[(3 \cdot -11) + (1 \cdot -2) = -35]$

$$3x^2 - 35x + 22 = (3x - 2)(x - 11)$$

(*d*) $7x^2 - 32x + 16$

(1) $a \cdot b = 7$ **[7, 1]**

(2) $c \cdot d = 16$ [–1, –16; –16, –1; –2, –8; –8, –2; –4, –4]

(3) $ad + bc = -32$ $[(\mathbf{7} \cdot -4) + (\mathbf{1} \cdot -4) = -32]$

$$7x^2 - 32x + 16 = (7x - 4)(x - 4)$$

(*e*) $5x^2 + 7x - 52$

(1) $a \cdot b = 5$ **[5, 1]**

(2) $c \cdot d = -52$ [1, 52; 2, 26; 4, 13; her iki sıralama ve alternatif zıt işaretlerin kombinasyonları dikkate alınmalıdır.]

(3) $ad + bc = 7$ $[(\mathbf{5} \cdot 4) + (\mathbf{1} \cdot -13) = 7]$

$$5x^2 + 7x - 52 = (5x - 13)(x + 4)$$

(*f*) $3x^2 - 13x - 56$

(1) $a \cdot b = 3$ **[3, 1]**

(2) $c \cdot d = -56$ [1, 56; 2, 28; 4, 14; 7, 8; (e)'de olduğu gibi ele alınmalıdır]

(3) $ad + bc = -13$ $[(\mathbf{3} \cdot -7) + (\mathbf{1} \cdot 8) = -13]$

$$3x^2 - 13x - 56 = (3x + 8)(x - 7)$$

(*g*) $11x^2 + 12x - 20$

(1) $a \cdot b = 11$ [11, 1]

(2) $c \cdot d = -20$ [1, 20; 2, 10; 4, 5; yukarıda olduğu gibi ele alınmalıdır]

(3) $ad + bc = 12$ $[(11 \cdot 2) + (1 \cdot -10) = 12]$

$$11x^2 + 12x - 20 = (11x - 10)(x + 2)$$

(*h*) $7x^2 - 39x - 18$

(1) $a \cdot b = 7$ **[7, 1]**

(2) $c \cdot d = -18$ [1, 18; 2, 9; 3, 6; yukarıda olduğu gibi ele alınmalıdır]

(3) $ad + bc = -39$ $[(7 \cdot -6) + (1 \cdot 3) = -39]$

$$7x^2 - 39x - 18 = (7x + 3)(x - 6)$$

1.12. x^2 teriminin çoklu çarpanlarının bulunduğu aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırmak için Problem 1.11'i tekrar çözünüz.

(*a*) $6x^2 + 23x + 20$

(1) $a \cdot b = 6$ Çarpanları **[1, 6; 2, 3; 3, 2; 6, 1]**'dır.

(2) $c \cdot d = 20$ [1, 20; 2, 10; 4, 5; 5, 4; 10, 2; 20, 1]

(3) $ad + bc = 23$ Burada basamak (2)'deki tüm olası çarpan çiftleri ile basamak (1)'deki tüm olası çarpanlar denenmelidir.

Yukarıdaki tüm olası çarpan çiftleri içerisinden yalnızca $(2\cdot4) + (3\cdot5) = 23$ istenilen sonucu vermektedir. **2** ile 4'ün ve **3** ile 5'in çarpıldığına dikkat ederek çarpanlar ayrıldığında sonuç elde edilir.

$$6x^2 + 23x + 20 = (2x + 5)(3x + 4)$$

(*b*) $4x^2 + 15x + 14$

(1) $a\cdot b = 4$ [1, 4; 2, 2; 4, 1]

(2) $c\cdot d = 14$ [1, 14; 2, 7; 7, 2; 14, 1]

(3) $ad + bc = 15$ $[(4\cdot2) + (1\cdot7) = 15]$ **4** ile 2'nin ve **1** ile 7'nin çarpıldığına dikkat ederek çarpanlar ayrıldığında sonuç elde edilir.

$$4x^2 + 15x\ 14 = (4x + 7)(x + 2)$$

(*c*) $8x^2 + 34x + 21$

(1) $a\cdot b = 8$ [1, 8; 2, 4; 4, 2; 8, 1]

(2) $c\cdot d = 21$ [1, 21; 3, 7; 7, 3; 21, 1]

(3) $ad + bc = 34$ $[(2\cdot3) + (4\cdot7) = 34]$ **2** ile 3'ün ve **4** ile 7'nin çarpıldığına dikkat ederek çarpanlar ayrıldığında sonuç elde edilir.

$$8x^2 + 34x + 21 = (2x + 7)(4x + 3)$$

(*d*) $6x^2 - 17x + 10$

Eğer buradaki $-17x$ terimi nedeniyle kolaylık sağlamak için a ve b çarpanlarını pozitif değerlerle sınırlandırılırsa, c ve d çarpanları negatif değerler olmalıdır.

(1) $a\cdot b = 6$ [1,6; 2,3; 3,2; 6,1]

(2) $c\cdot d = 10$ [–1, –10; –2, –5; –5, –2; –10, –1]

(3) $ad + bc = -17$ $[(6\cdot-2) + (1\cdot-5) = -17]$ **6** ile (–2)'nin ve **1** ile (–5)'in çarpıldığına dikkat ederek çarpanlar ayrıldığında sonuç elde edilir.

$$6x^2 - 17x + 10 = (6x - 5)(x - 2)$$

(*e*) $9x^2 - 30x + 16$

(1) $a\cdot b = 9$ [1,9; 3,3; 9,1]

(2) $c\cdot d = 16$ [–1, –16; –2, –8; –4, –4; –8, –2; –16, –1]

(3) $ad + bc = -30$ $[(3\cdot-8) + (3\cdot-2) = -30]$

$$9x^2 - 30x + 16 = (3x - 2)(3x - 8)$$

Not: İkinci dereceden denklemlerin çarpanlara ayrılma işlemleri çok daha karmaşıktır. Eğer çözüm için çarpanlara ihtiyaç varsa, ikinci dereceden formüller kullanılmaktadır. Kısım 3.5'e bakınız.

1.13. Bölüm 1.3'teki Kural 2'yi ve Problem 1.5'ten 1.11'e kadar olan sorular içerisinde geliştirilen teknikleri kullanarak aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayırınız:

(*a*) $x^2 + 11xy + 28y^2$

(1) $c\cdot d = 28$ [1, 28; 2, 14; 4, 7]

(2) $c + d = 11$ [4 + 7 = 11]

$$x^2 + 11xy + 28y^2 = (x + 4y)(x + 7y)$$

(*b*) $x^2 - 19xy + 60y^2$

(1) $c\cdot d = 60$ [–1, –60; –2, –30; –3, –20; –4, –15; –5, –12; –6, –10] Problem 1.7'deki benzer nedenlerden dolayı bu şekilde gerçekleşmektedir.

(2) $c + d = -19$ [–4 + (–15) = –19]

$$x^2 - 19xy + 60y^2 = (x - 4y)(x - 15y)$$

(*c*) $x^2 - 13xy - 48y^2$

(1) $c\cdot d = -48$ [–1, 48; 2, –24; 3, –16; 4, –12; –6, 8] Problem 1.9'daki benzer nedenlerden dolayı bu şekilde gerçekleşmektedir.

(2) $c + d = -13$ [3 + (–16) = –13]

$$x^2 - 13xy - 48y^2 = (x + 3y)(x - 16y^2)$$

(d) $x^2 + 11xy - 42y^2$

(1) $a \cdot b = 7$ [7, 1] Problem 1.8'deki benzer nedenlerden dolayı bu şekilde gerçekleşmektedir.

(2) $c + d = 11$ [4 + 7 = 11]

$$x^2 + 11xy + 28y^2 = (x + 4y)(x + 7y)$$

(e) $3x^2 + 29xy + 18y^2$

(1) $a \cdot b = 3$ [3, 1]

(2) $c + d = 18$ [1, 18; 18, 1; 2, 9; 9, 2; 3, 6; 6, 3] Problem 1.11'in (a) ve (b) sorularında olduğu gibi.

(3) $ad + bc = 29$ [(3·9) + (1·2) = 29] Daha sonra çarpanlar, uygun çarpım biçiminde yeniden yazıldığında sonuç elde edilmektedir.

$$3x^2 + 29xy + 18y^2 = (3x + 2y)(x + 9y)$$

(f) $7x^2 - 36xy + 45y^2$

(1) $a \cdot b = 7$ [7, 1]

(2) $c + d = 45$ [–1, –45; –45, –1; –3, –15; –15, –3; –5, –9; –9, –5] Problem 1.11'in (c) sorusunda olduğu gibi.

(3) $ad + bc = -36$ [(7·–3) + (1·–15) = –36]

$$7x^2 - 36xy + 45y^2 = (7x - 15y)(x - 3y)$$

(g) $5x^2 + 12xy - 44y^2$

(1) $a \cdot b = 5$ [5, 1]

(2) $c + d = -44$ [1, 44; 2, 22; 4, 11] Tüm kombinasyonlar Problem 1.11'in (e) sorusunda olduğu gibi her iki sıralamada ve tüm alternatif zıt işaretler altında ele alınmalıdır.

(3) $ad + bc = 12$ [(5·–2) + (1·22) = 12]

$$5x^2 + 12xy - 44y^2 = (5x + 22y)(x - 2y)$$

(h) $8x^2 + 46xy - 45y^2$

(1) $a \cdot b = 8$ [1, 8; 2, 4;4, 2; 1, 8] Problem 1.12'de olduğu gibi.

(2) $c + d = 45$ [1, 45; 3, 15; 5, 9; 9, 5; 15, 3; 45, 1]

(3) $ad + bc = 46$ [(2·5) + (4·9) = 46]

$$8x^2 + 46xy + 45y^2 = (2x + 9y)(4x + 5y)$$

(i) $4x^2 - 25y^2$

(1) $a \cdot b = 4$ [1, 4; 2, 2]

(2) $c + d = -25$ [1, –25; –25, 1; 5, –5]

(3) $ad + bc = 0$ [(2·5) + (2·–5) = 0]

$$4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)(2x - 5y)$$

KESİRLER

1.14. Kısım 1.4'ün Kural 1'inde belirtilen *kesirlerin temel prensiplerine* göre, bir rasyonel sayının payı ve paydası sıfırdan farklı olmak üzere aynı polinomla çarpıldığında veya bölündüğünde sonuç rasyonel sayının ilk haline denktir. Bu prensibi kullanarak aşağıdaki rasyonel sayıları payın ve paydanın en büyük ortak böleniyle sadeleştirerek en sade hallerinde yazınız:

(a) $\dfrac{16}{96}$

$$\frac{16}{96} = \frac{16 \cdot 1}{16 \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

(b) $\dfrac{21x^5}{3x^2}$

$$\frac{21x^5}{3x^2} = \frac{3x^2 \cdot 7x^3}{3x^2 \cdot 1} = 7x^3$$

(c) $\dfrac{27z}{36z^2 - 63z}$

$$\frac{27z}{36z^2 - 63z} = \frac{9z \cdot 3}{9z(4z - 7)} = \frac{3}{4z - 7}$$

(*d*) $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+9x+20}$

Çarpanlarına ayrılarak, $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+9x+20}=\dfrac{(x+4)(x+3)}{(x+4)(x+5)}=\dfrac{x+3}{x+5}$ sonucu elde edilir.

1.15. Kural 1'i kullanarak aşağıdaki kesirlerin tümünü paydaları 48 olacak şekilde genişletiniz.

(*a*) $\dfrac{1}{3}$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{16}=\frac{16}{48}$$

(*b*) $\dfrac{1}{4}$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{12}=\frac{12}{48}$$

(*c*) $\dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{24}=\frac{24}{48}$$

(*d*) $\dfrac{1}{6}$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{8}{8}=\frac{8}{48}$$

1.16. Kısım 1.4'teki Kural 2'yi kullanarak aşağıdaki rasyonel sayıları çarpınız ve sonuçları en sade halleriyle yazınız.

(*a*) $\dfrac{7w^3x^4}{3y^2z^2}\cdot\dfrac{2x^2y^5}{21w^6z^3}$

(*a*) Tek terimli bölümler içeren rasyonel ifadeler çarpılırken pay ve payda ayrı ayrı çarpılır, sonra bulunan sonuç sadeleştirilir. Kısım 1.1'de gösterildiği aynı değişkenler çarpılırken kuvvetlerinin toplandığını, bölünürken kuvvetlerinin çıkarıldığını unutmayınız.

$$\frac{7w^3x^4}{3y^2z^2}\cdot\frac{2x^2y^5}{21w^6z^3}=\frac{14w^3x^6y^5}{63w^6y^2z^5}=\frac{7w^3y^2}{7w^3y^2}\cdot\frac{2x^6y^3}{9w^3z^5}=\frac{2x^6y^3}{9w^3z^5}$$

(*b*) $\dfrac{5x^6y^3}{4w^4z^2}\cdot\dfrac{8wz^3}{15x^2y}$

$$\frac{5x^6y^3}{4w^4z^2}\cdot\frac{8wz^3}{15x^2y}=\frac{40wx^6y^3z^3}{60w^4x^2yz^2}=\frac{20wx^2yz^2}{20wx^2yz^2}\cdot\frac{2x^4y^2z}{3w^3}=\frac{2x^4y^2z}{3w^3}$$

1.17. Aşağıdaki iki terimli bölümler içeren rasyonel ifadeleri çarpınız ve sonuçlarını sadeleştiriniz.

(*a*) $\dfrac{x-5}{x+8}\cdot\dfrac{x+2}{x-9}$

(*a*) İki terimli bölümler içeren rasyonel ifadeler çarpılırken, yukarıda olduğu gibi paylar ve paydalar ayrı ayrı çarpılır. Örnek 5'ten birinci polinomun her bir teriminin ikinci polinomun her bir terimiyle ayrı ayrı çarpılıp ve çarpımların toplanması gerektiğini hatırlayınız.

$$\frac{x-5}{x+8}\cdot\frac{x+2}{x-9}=\frac{x^2-3x-10}{x^2-x-72}$$

(*b*) $\dfrac{x+7}{x^3}\cdot\dfrac{x^2}{x-4}$

$$\frac{x+7}{x^3}\cdot\frac{x^2}{x-4}=\frac{x^2(x+7)}{x^3(x-4)}=\frac{x^2\cdot(x+7)}{x^2\cdot x(x-4)}=\frac{x+7}{x^2-4x}$$

1.18. Kısım 1.4'teki Kural 3'te olduğu gibi böleni ters çevirip çarparak aşağıdaki ifadeleri bölünüz.

(*a*) $\dfrac{6xy^5}{65w^4z^4}\div\dfrac{2x^3y}{11w^4z^2}$

$$\frac{6xy^5}{65w^4z^4}\div\frac{2x^3y}{11w^4z^2}=\frac{6xy^5}{65w^4z^4}\cdot\frac{11w^4z^2}{2x^3y}=\frac{66w^4xy^5z^2}{130w^4x^3yz^4}=\frac{33y^4}{65x^2z^2}$$

(*b*) $\dfrac{7x-14y}{12x-2y} \div \dfrac{12x+32y}{18x-3y}$

$$\frac{7x-14y}{12x-2y} \div \frac{12x+32y}{18x-3y} = \frac{7x-14y}{12x-2y} \cdot \frac{18x-3y}{12x+32y}$$
$$= \frac{7(x-2y)}{2(6x-y)} \cdot \frac{3(6x-y)}{4(3x+8y)} = \frac{21(x-2y)}{8(3x+8y)} = \frac{21x-42y}{24x+64y}$$

1.19. Aşağıdaki kesirleri Kural 5'te gösterildiği şekilde toplayınız veya çıkarınız:

(*a*) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$

(*a*) İki kesri toplamak veya çıkarmak için ortak payda belirlenir. Paydaların birbirleriyle çarpılmasıyla otomatik olarak ortak payda elde edileceği için her bir kesri basitçe aşağıda gösterildiği gibi çarpabilirsiniz. $(d/d) = 1 = (b/b)$ olduğu için kesirlerin değerleri değişmeyecektir.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{d}\right)+\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{b}\right) = \frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

(*b*) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7} = \frac{1\cdot 7}{5\cdot 7}+\frac{1\cdot 5}{7\cdot 5} = \frac{7+5}{35} = \frac{12}{35}$$

(*c*) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{17}$

$$\frac{1}{3}-\frac{2}{17} = \frac{1\cdot 17}{3\cdot 17}-\frac{2\cdot 3}{17\cdot 3} = \frac{17-6}{51} = \frac{11}{51}$$

1.20. *En küçük ortak paydayı* bularak aşağıdaki kesirleri toplayınız veya çıkarınız.

(*a*) $\dfrac{11}{12}-\dfrac{7}{18}$

(*a*) En küçük ortak paydayı bulmak için, paydaları asal çarpanlarına ayırmada *aritmetiğin temel prensiplerini* kullanınız. Paydada ortak olan asal çarpanları sadeleştiriniz, sonra her bir kesrin payını ve paydasını, diğer kesrin paydasında kalan asal çarpan ile aşağıda gösterildiği gibi genişletiniz.

$$\frac{11}{12}-\frac{7}{18} = \frac{11}{\cancel{2}\cdot 2\cdot \cancel{3}}-\frac{7}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 3}$$

Birinci kesrin payı ve paydası 3 ile ikinci kesrin payı ve paydası 2 ile genişletilir.

$$\frac{11}{12}-\frac{7}{18} = \frac{11\cdot 3}{12\cdot 3}-\frac{7\cdot 2}{18\cdot 2} = \frac{33-14}{36} = \frac{19}{36}$$

(*b*) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{8}$

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{8} = \frac{5}{\cancel{2}\cdot 3}+\frac{3}{\cancel{2}\cdot 2\cdot 2}$$

Birinci kesir $\frac{4}{4}$ ile ve ikinci kesir $\frac{3}{3}$ ile genişletilir.

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{8} = \frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}+\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3} = \frac{20+9}{24} = \frac{29}{24} = 1\frac{5}{24}$$

(*c*) $\dfrac{8}{21}-\dfrac{13}{28}$

$$\frac{8}{21}-\frac{13}{28} = \frac{8}{3\cdot\cancel{7}}-\frac{13}{2\cdot 2\cdot\cancel{7}}$$

Birinci kesir $\frac{4}{4}$ ile ve ikinci kesir $\frac{3}{3}$ ile genişletilir.

$$\frac{8}{21}-\frac{13}{28}=\frac{8\cdot 4}{21\cdot 4}-\frac{13\cdot 3}{28\cdot 3}=\frac{32-39}{84}=-\frac{7}{84}=-\frac{1}{12}$$

1.21. En küçük ortak paydalar bulunarak aşağıdaki kesirleri toplayınız veya çıkarınız. Tüm sonuçları en sade haliyle yazınız.

(*a*) $\frac{4}{9x}+\frac{2}{5x}$

$$\frac{4}{9x}+\frac{2}{5x}=\frac{4}{9\cdot \cancel{x}}+\frac{2}{5\cdot \cancel{x}}$$

Birinci kesir $\frac{5}{5}$ ile ve ikinci kesir $\frac{9}{9}$ ile genişletilir.

$$\frac{4}{9x}+\frac{2}{5x}=\left(\frac{4}{9x}\cdot\frac{5}{5}\right)+\left(\frac{2}{5x}\cdot\frac{9}{9}\right)=\frac{20}{45x}+\frac{18}{45x}=\frac{38}{45x}$$

(*b*) $\frac{5}{6x}-\frac{7}{9y}$

$$\frac{5}{6x}-\frac{7}{9y}=\frac{5}{2\cdot\cancel{3}\cdot x}-\frac{7}{\cancel{3}\cdot 3\cdot y}$$

Birinci kesir $3y/3y$ ile ve ikinci kesir $2x/2x$ ile genişletilir.

$$\frac{5}{6x}-\frac{7}{9y}=\left(\frac{5}{6x}\cdot\frac{3y}{3y}\right)-\left(\frac{7}{9y}\cdot\frac{2x}{2x}\right)$$

$$=\frac{15y}{18xy}-\frac{14x}{18xy}=\frac{15y-14x}{18xy}$$

(*c*) $\frac{6}{x+8}+\frac{7}{x}$

Ortak çarpan olmadığından birinci kesir x/x ile ve ikinci kesir $(x+8)/(x+8)$ ile genişletilir.

$$\frac{6}{x+8}+\frac{7}{x}=\left[\frac{6}{(x+8)}\cdot\left(\frac{x}{x}\right)\right]+\left[\frac{7}{x}\cdot\left(\frac{x+8}{x+8}\right)\right]$$

$$=\frac{6x}{x(x+8)}+\frac{7x+56}{x(x+8)}=\frac{13x+56}{x^2+8x}$$

(*d*) $\frac{12}{x^2-81}+\frac{7x}{x+9}$

$$\frac{12}{x^2-81}+\frac{7x}{x+9}=\frac{12}{\cancel{(x+9)}(x-9)}+\frac{7x}{\cancel{(x+9)}}$$

İkinci kesir $(x-9)/(x-9)$ ile genişletilir.

$$\frac{12}{x^2-81}+\frac{7x}{x+9}=\frac{12}{(x+9)(x-9)}+\left[\frac{7x}{(x+9)}\cdot\left(\frac{x-9}{x-9}\right)\right]$$

$$=\frac{12+7x^2-63x}{(x+9)(x-9)}=\frac{7x^2-63x+12}{x^2-81}$$

(*e*) $\frac{9}{x-3}+\frac{6x}{x^2-8x+15}$

$$\frac{9}{x-3}+\frac{6x}{x^2-8x+15}=\frac{9}{\cancel{(x-3)}}+\frac{6x}{\cancel{(x-3)}(x-5)}$$

Birinci kesir $(x-5)/(x-5)$ ile genişletilir.

$$\frac{9}{x-3}+\frac{6x}{x^2-8x+15}=\left[\frac{9}{(x-3)}\cdot\left(\frac{x-5}{x-5}\right)\right]+\frac{6x}{(x-3)(x-5)}$$

$$=\frac{9x-45+6x}{(x-3)(x-5)}=\frac{15(x-3)}{(x-3)(x-5)}=\frac{15}{x-5}$$

KÖKLÜ SAYILAR

1.22. Kısım 1.5'te verilen köklü sayıların özelliklerini kullanarak aşağıdaki köklü sayıları sadeleştiriniz.

(*a*) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{3\cdot 37}=\sqrt{81}=\pm 9$$ (Kural 3)

(*b*) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}$

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}=\sqrt{5\cdot 45}=\sqrt{225}=\pm 15$$ (Kural 3)

(*c*) $\sqrt{245}$

$$\sqrt{245}=\sqrt{245}=\sqrt{5\cdot 49}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{49}=\pm 7\sqrt{5}$$ (Kural 3)

(*d*) $\sqrt{108}$

$$\sqrt{108}=\sqrt{3\cdot 36}=\pm 6\sqrt{3}$$ (Kural 3)

(*e*) $(\sqrt[3]{192})/(\sqrt[3]{3})$

$$\frac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{192}{3}}=\sqrt[3]{64}=4$$ (Kural 4)

(*f*) $(\sqrt{294})/(\sqrt{6})$

$$\frac{\sqrt{294}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{294}{6}}=\sqrt{49}=\pm 7$$ (Kural 4)

(*g*) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}=\sqrt[5\cdot 3]{x}=\sqrt[15]{x}$$ (Kural 2)

(*h*) $\sqrt{\sqrt[4]{y}}$

$$\sqrt{\sqrt[4]{y}}=\sqrt[2\cdot 4]{y}=\sqrt[8]{y}$$ (Kural 2)

(*i*) $\sqrt{36x^4y^6}$

$$\sqrt{36x^4y^6}=\sqrt{36x^4y^6}=\pm 6x^2y^3$$ (Kural 2)

(*j*) $\sqrt{98x^7y^5}$

$$\sqrt{98x^7y^5}=\sqrt{49x^6y^4}\cdot\sqrt{2xy}=\pm 7x^3y^2\sqrt{2xy}$$ (Kural 2 ve 3)

1.23. Köklü sayıların özelliklerini kullanarak aşağıdaki örneklerin her birini y için çözümleyiniz.

(*a*) $\sqrt{3y}=6x^5$

Eşitliğin her iki tarafının da karesi alınır, sonrasında Kural 1 uygulanır.

$$\left(\sqrt{3y}\right)^2=\left(6x^5\right)^2$$

$$3y=36x^{10}$$

$$y=12x^{10}$$

(*b*) $\sqrt{7y} = 42x^3$

Eşitliğin her iki tarafının da karesi alınır ve sonuç elde edilir.

$$\left(\sqrt{7y}\right)^2 = \left(42x^3\right)^2$$

$$7y = 1764x^6$$

$$y = 252x^6$$

HESAP MAKİNESİ KULLANIMI

1.24. y değerlerini bulmak için hesap makinesi kullanımıyla ilgili bilgileri ve Kısım 1.1'deki açıklayıcı kuralları tekrar ediniz. Tüm sonuçları ondalık basamak 5 olacak şekilde yuvarlayınız.

(*a*) $y = 4^5 \cdot 4^3$

$$y = 4^{5+3} = 48 \qquad \text{(Kural 1)}$$

4^8 değerini bulmak için hesap makinenizde 4 yazın, sonrasında $\boxed{y^x}$ tuşuna basın, kuvvet değeri olan 8 yazın ve $\boxed{=}$ tuşuna basarak sonucu elde edin.

$$y = 65{,}536$$

(*b*) $y = 13^7 \div 13^4$

$$y = 13^{(7-4)} = 13^3 \qquad \text{(Kural 2)}$$

Hesap makinenizde 13 yazın, $\boxed{y^x}$ tuşuna basın, sonrasında 3 yazın ve $\boxed{=}$ tuşuna basarak sonucu elde edin.

$$y = 2197$$

(*c*) $y = 17^6 \div 17^8$

$$y = 17^{(6-8)} = 17^{-2}$$

17^{-2} değerini bulmak için hesap makinenizde 17 yazın, $\boxed{y^x}$ tuşuna basın, daha sonra kuvvet değeri olan 2 yazın ve hemen arkasından $\boxed{\pm}$ tuşuna basarak kuvvetin negatif değerini elde edin ve $\boxed{=}$ tuşuna basarak sonucu elde edin.

$$y = 0.00346$$

(*d*) $y = (5^3)^2$

$$y = 5^{(3 \cdot 2)} = 56 \qquad \text{(Kural 3)}$$

Hesap makinenizde 5 yazın, $\boxed{y^x}$ tuşuna basın, daha sonra kuvvet değeri olan 6 yazın ve $\boxed{=}$ tuşuna basarak sonucu elde edin.

$$y = 15{,}625$$

(*e*) $y = (2^{-4})^2$

$$y = 2^{(-4 \cdot 2)} = 2^{-8}$$

Hesap makinenizde 2 yazın, $\boxed{y^x}$ tuşuna basın, daha sonra kuvvet değeri olan 8 yazın ve hemen arkasından $\boxed{\pm}$ tuşuna basarak kuvvetin negatif değerini elde edin ve $\boxed{=}$ tuşuna basarak sonucu elde edin.

$$y = 0.00391$$

1.25. Kısım 1.5'teki kuralları kullanarak bir hesap makinesi yardımıyla y değerlerini hesaplayınız. Tüm sonuçları ondalık basamak 5 olacak şekilde yuvarlayınız.

(*a*) $y = \sqrt{3} \cdot \sqrt{17}$

$$y = \sqrt{3 \cdot 17} = \sqrt{51} \qquad \text{(Kural 3)}$$

$\sqrt{51}$ değerini bulabilmek için hesap makinenizde 51 yazın, $\boxed{INV}$ tuşuna basıp hemen arkasından $\boxed{x^2}$ tuşuna basarak $\boxed{\sqrt{x}}$ tuşunu aktif hale getirin, 7.14143 sonucunu ekranda göreceksiniz.

Karekök değerlerinin hem pozitif hem negatif olabileceğini hatırlatarak sonuç aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$y = \pm 7.14143$$

(*b*) $y = \sqrt{63} \cdot \sqrt{37}$

$$y = \sqrt{63 \cdot 37} = \sqrt{2331}$$

Hesap makinesinde 2331 yazılır, sonrasında [INV] tuşuna basılır ve hemen ardından [x^2] tuşuna basılır.

$$y = \pm 48.28043$$

(*c*) $y = \sqrt[3]{48} \cdot \sqrt[3]{74}$

$$y = \sqrt[3]{48 \cdot 74} = \sqrt[3]{3552}$$

$\sqrt[3]{3552}$ değerini bulmak için 3552 yazılır, [INV] tuşuna basılır ve hemen ardından [y^x] tuşuna basılarak $\sqrt[x]{y}$ tuşu aktif hale gelir, sonrasında kök derecesi olan 3 yazılır ve [=] tuşuna basılarak sonuç elde edilir.

$$y = 15.25777$$

(*d*) $y = \sqrt[5]{22} \cdot \sqrt[5]{45}$

$$y = \sqrt[5]{22 \cdot 45} = \sqrt[5]{990}$$

990 yazılır, [INV] tuşuna basılır ve hemen ardından [y^x] tuşuna basılır, sonrasında kök derecesi olan 5 yazılır ve [=] tuşuna basılır.

$y = 3.97308$

(*e*) $y = \dfrac{\sqrt[3]{2668}}{\sqrt[3]{46}}$

$$y = \sqrt[3]{\frac{2668}{46}} = \sqrt[3]{58} \qquad \text{(Kural 4)}$$

58 yazılır, [INV] tuşuna basılır ve hemen ardından [y^x] tuşuna basılır, sonrasında 3 yazılır ve [=] tuşuna basılır,

$$y = 3.87088$$

(*f*) $y = \dfrac{\sqrt{3293}}{\sqrt{89}}$

$$y = \sqrt{\frac{3293}{89}} = \sqrt{37}$$

37 yazılır, sonrasında [INV] tuşuna basılır ve hemen ardından [x^2] tuşuna basılır,

$$y = \pm 6.08276$$

(*g*) $y = \sqrt{\sqrt[4]{6561}}$

$$y = \sqrt[8]{6561} \qquad \text{(Kural 2)}$$

6561 yazılır, [INV] tuşuna basılır ve hemen ardından [y^x] tuşuna basılır, sonrasında 8 yazılır ve [=] tuşuna basılır,

$$y = \pm 3$$

1.26. (*a*) Aşağıdaki köklü sayıları üslü formunda gösteriniz. (*b*) Sonrasında hesap makinenizi ve Kısım1.1'deki üslü sayı kurallarını kullanarak y değerlerini bulunuz.

(1) $y = \sqrt{3} \cdot \sqrt{17}$

(*a*) $y = 3^{1/2} \cdot 17^{1/2}$

(*b*) $y = (3 \cdot 17)^{1/2} = 51^{1/2} = 51^{0.5}$ (Kural 4)

$51^{0.5}$ değerini bulmak için öncelikle hesap makinenizde 51 yazın, [y^x] tuşuna basın, daha sonra sayının kuvveti olan 0.5 değerini yazın ve ardından [=] tuşuna basarak $51^{0.5} = 7.14143$ sonucunu elde edin.

Çift dereceli kök içerisindeki sayıların kök dışına hem pozitif hem negatif değer alarak çıkabildiğini unutmayın.

$$y = \pm 7.14143$$

Problem 1.25 (*a*) ile karşılaştırınız.

(2) $y = \sqrt[5]{22} \cdot \sqrt[5]{45}$

(a) $y = 22^{1/5} \cdot 45^{1/5}$

(b) $y = (22 \cdot 45)^{1/5} = 990^{1/5} = 990^{0.2}$

990 yazılır, sonrasında $\boxed{y^x}$ tuşuna basılır, sonrasında olan 0.2 yazılır ve ardından $\boxed{=}$ tuşuna basılarak sonuç elde edilir.

$$y = 3.97308$$

(3) $y = \dfrac{\sqrt[3]{2668}}{\sqrt[3]{46}}$

(a) $y = \dfrac{2668^{1/3}}{46^{1/3}}$

(b) $y = \left(\dfrac{2668}{46}\right)^{1/3} = 58^{1/3} = 58^{0.33}$ (Kural 5)

58 yazılır, sonrasında $\boxed{y^x}$ tuşuna basılır, sonrasında 0.33 yazılır ve $\boxed{=}$ tuşuna basılarak sonuç elde edilir.

$$y = 3.81884$$

Problem 1.25 (e) ile karşılaştırınız. Buradaki küçük farklılık $\frac{1}{3}$ değerinin iki ondalık basamak ile sınırlandırılmasıdır.

1.27. Hesap makinenizi ve üslü sayılar kurallarını kullanarak y değerlerini hesaplayınız. Tüm köklü sayıların üstel formda yazıldığına dikkat ediniz.

(a) $y = 522^{-(1/2)} \div 29^{-(1/2)}$

$$y = \left(\frac{522}{29}\right)^{-(1/2)} = 18^{-(1/2)} = 18^{-0.5} \quad \text{(Kural 5)}$$

$18^{-0.5}$ değerini bulmak için öncelikle 18 yazılır, $\boxed{y^x}$ tuşuna basılır, daha sonra kuvvet değeri olan 0.5 yazılır ve hemen ardından $\boxed{\pm}$ tuşuna basılarak kuvvet değeri negatif hale getirilir, sonrasında $\boxed{=}$ tuşuna basılarak sonuç elde edilir.

$$y = \pm 0.23570$$

(b) $y = 15^{-(1/4)}\, 23^{-(1/4)}$

$$y = (15 \cdot 23)^{-(1/4)} = 345^{-(1/4)} = 345^{-0.25}$$

345 yazılır, $\boxed{y^x}$ tuşuna basılır, daha sonra 0.25 yazılır ve hemen ardından $\boxed{=}$ tuşuna basılarak kuvvet değeri negatif hale getirilir ve ** tuşuna basılarak sonuç elde edilir.

$$y = \pm 0.23203$$

(c) $y = (6561^{1/4})^{1/2}$

$$y = (6561)^{1/4 \cdot 1/2} = 6561^{1/8} = 6561^{0.125} \quad \text{(Kural 3)}$$

6561 yazılır, $\boxed{y^x}$ tuşuna basılır, daha sonra 0.125 yazılır ve $\boxed{=}$ tuşuna basılarak sonuç elde edilir.

$$y = \pm 3$$

Not: Aynı sonuca hesap makinesinde 6561 yazıp, sonrasında $\boxed{\text{INV}}$ tuşuna basıp ve hemen ardından $\boxed{y^x}$ tuşuna basıp, kök derecesi olarak 8 yazıp, sonrasında da $\boxed{=}$ tuşuna basarak da ulaşılabilir.

(d) $y = (34^{2/5})^2$

$$y = 34^{(2/5 \cdot 2)} = 34^{4/5} = 34^{0.8}$$

34 yazılır, $\boxed{y^x}$ tuşuna basılır, daha sonra 0.8 yazılır ve $\boxed{=}$ tuşuna basılarak sonuç elde edilir.

$$y = 16.79512$$

(e) $y = [14^{-(3/2)}]^{4/5}$

$$y = [14^{-(3/2)}]^{4/5} = 14^{[(-3/2) \cdot 4/5]} = 14^{-(12/10)} = 14^{-1.2}$$

14 yazılır, $\boxed{y^x}$ tuşuna basılır, daha sonra kuvvet değeri olan 1.2 yazılır ve hemen ardından $\boxed{\pm}$ tuşuna basılarak kuvvet değeri negatif hale getirilir ve $\boxed{=}$ tuşuna basılarak sonuç elde edilir.

$y = 0.04214$

İSPATLAR

1.28. $mx^2 + nx + p$ şeklinde verilen polinomun, $ab = m$, $ad + bc = n$ ve $cd = p$ olduğunda çarpanlarının $(ax + c)(bx + d)$ olduğunu gösteriniz.

Polinomu çarpanlarına ayrılmış şekliyle aşağıdaki gibi ifade edebiliriz,

$$mx^2 + nx + p = (ax + c)(bx + d)$$

Eşitliğin sağ tarafındaki çarpma işlemleri gerçekleştirilir.

$$mx^2 + nx + p = abx^2 + (ad + bc)x + cd \qquad (1.1)$$

(1.1), $ab = m$, $ad + bc = n$ ve $cd = p$ koşullarının ispatıdır.

1.29. $mx^2 + nxy + py^2$ şeklinde iki değişkenli polinomun, $ab = m$, $ad + bc = n$ ve $cd = p$ olduğunda çarpanlarının $(ax + cy)(bx + dy)$ olduğunu gösteriniz.

$$mx^2 + nxy + py^2 = (ax + cy)(bx + dy)$$

Çarpma işlemi yapılır,

$$mx^2 + nxy + py^2 = abx^2 + (ad + bc)xy + cdy^2$$

Böylece $ab = m$, $ad + bc = n$ ve $cd = p$'dir.

1.30. $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ şeklindeki köklü sayılar için Kural 1'i ispatlamak adına üslü sayılar kanunlarını kullanınız.

Kısım 1.1'den,

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \left(x^{1/n}\right)^n$$

Üslü sayılarda yer alan Kural 3'ten,

$$\left(x^{1/n}\right)^n = x^{(1/n)n} = x^{(1)} = x$$

Ek Problemler

ÜSLÜ SAYILAR

1.31. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştirmek için üslü sayı kurallarını kullanınız:

(*a*) $x^4 \cdot x^3$ (*b*) $x^5 \cdot x^{1/2}$ (*c*) $x^6 \cdot x^{-4}$ (*d*) $x^{-2} \cdot x^{-7}$

1.32. Aşağıdaki üstel ifadeleri sadeleştiriniz:

(*a*) $\dfrac{x^5}{x^2}$ (*b*) $\dfrac{x^3}{x^5}$ (*c*) $\dfrac{x^2}{x^{-4}}$ (*d*) $\dfrac{x^{-4}}{x^3}$

1.33. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz:

(*a*) $(x^3)^4$ (*b*) $(x^4)^{-2}$ (*c*) $(x^3y^4)^2$ (*d*) $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^3$

1.34. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz:

(*a*) $\dfrac{x^2}{x^{1.5}}$ (*b*) $(x^3)^{1/2}$ (*c*) $(x^{1/3})^2$ (*d*) $(x^4)^{-(1/5)}$

POLİNOMLAR

1.35. Aşağıdaki polinomların her biri için gösterilen aritmetik işlemleri yapınız:

(*a*) $76xy - 22xy$ (*b*) $14x_1x_2 + 31x_1x_2$ (*c*) $32xy^2 - 48xy^2$

(*d*) $50xyz - 43xyz$

1.36. Aşağıdaki polinomlarda gösterilen şekilde toplama ve çıkarma işlemlerini yapınız:

(*a*) $(6x + 9y) + (3x - 8y)$ (*b*) $(20x + 13y) - (4x + 7y)$

(*c*) $(12x - 17y) - (9x - 8y)$ (*d*) $(5x^2 - 12xy + 3y^2) - (2x^2 + 9xy + 7y^2)$

1.37. Aşağıdaki polinomların her biri için çarpma işlemlerini yapınız.

(*a*) $(5x + 2y)(8x + 3y)$ (*b*) $(6x - 15y)(10x - 3y)$

(*c*) $(3x^2 - 5xy + 4y^2)(6x + 2y)$ (*d*) $(20x - 5y)(8x^2 + 2xy + 3y^2)$

ÇARPANLARA AYIRMA

1.38. En büyük ortak çarpan parantezine alarak aşağıdaki polinomları sadeleştiriniz:

(*a*) $12 - 15x$ (*b*) $42x^3 + 28x$ (*c*) $15x^3y^4 + 55x^2y^5$

(*d*) $18x^2y^6z^4 + 22x^3y^4z^3 - 26x^5y^4z^6$

1.39. Aşağıdaki ikinci dereceden ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

(*a*) $x^2 + 10x + 24$ (*b*) $x^2 - 10x + 21$ (*c*) $x^2 + 9x - 22$

(*d*) $x^2 - 7x - 60$ (*e*) $x^2 - 49$ (*f*) $x^2 - 23x + 120$

1.40. Aşağıdaki x^2'nin katsayısı 1'den farklı olan ikinci dereceden ifadeleri çarpanlarına ayırınız:

(*a*) $3x^2 + 17x + 10$ (*b*) $5x^2 - 19x + 12$ (*c*) $7x^2 - 22x - 24$

(*d*) $4x^2 + 16x + 15$ (*e*) $6x^2 - 23x + 20$ (*f*) $8x^2 - 41x - 42$

KESİRLER

1.41. Aşağıdaki kesirleri en sade hallerinde yazınız:

(*a*) $\frac{14}{35}$ (*b*) $\frac{22}{110}$ (*c*) $\frac{8x^5}{56x^3}$

(*d*) $\frac{32x^3}{6x^4}$ (*e*) $\frac{x^2 + x - 30}{x^2 + 14x + 48}$ (*f*) $\frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 11x + 18}$

1.42. Aşağıdaki kesirlerde gösterildiği gibi çarpma ve bölme işlemlerini yapınız:

(*a*) $\frac{7x}{9y} \cdot \frac{4x}{3y}$ (*b*) $\frac{5x^3y^2}{2wz^4} \cdot \frac{8w^2y^5}{7x^2z^3}$ (*c*) $\frac{12x}{25y} \div \frac{3x}{5y}$ (*d*) $\frac{11w^2x^4}{8yz^3} \div \frac{3wx^5}{2y^3z}$

1.43. Aşağıdaki rasyonel ifadelerde çarpma ve bölme işlemlerini yapınız:

(*a*) $\frac{x+5}{x-8} \cdot \frac{x-3}{x+9}$ (*b*) $\frac{x-4}{x-1} \cdot \frac{x+7}{x-6}$

(*c*) $\frac{x+12}{x+9} \div \frac{x-6}{x+2}$ (*d*) $\frac{2x-7}{x+4} \div \frac{3x+2}{x-9}$

1.44. Aşağıdaki kesirleri gereken en küçük ortak paydada eşitleyerek toplama ve çıkarma işlemlerini yapınız:

(*a*) $\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$ (*b*) $\frac{7}{12} - \frac{2}{11}$ (*c*) $\frac{x}{6} + \frac{3x}{7}$

(*d*) $\frac{5}{18x} - \frac{3}{16x}$ (*e*) $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$ (*f*) $\frac{7}{9} - \frac{5}{12}$

1.45. Aşağıdaki istenen toplama ve çıkarma işlemlerini yapınız:

(a) $\frac{13}{x+9}-\frac{6}{x}$ (b) $\frac{8}{x-2}+\frac{3}{x+4}$ (c) $\frac{41}{x-7}-\frac{15}{x^2-49}$

(d) $\frac{17}{x-6}-\frac{15}{x^2-14x+48}$

KÖKLÜ SAYILAR

1.46. Aşağıdaki köklü sayıları sadeleştiriniz:

(a) $\sqrt{2\cdot\sqrt{32}}$ (b) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{63}$ (c) $\sqrt{243}$

(d) $\sqrt{605}$ (e) $\sqrt{75}\div\sqrt{3}$ (f) $\sqrt{288}\div\sqrt{6}$

1.47. Aşağıdaki köklü sayıları sadeleştiriniz:

(a) $\sqrt{169x^6y^8}$ (b) $\sqrt{81x^2y^4z^6}$ (c) $\sqrt{108x^3y^5}$ (d) $\sqrt{450x^4y^5z^6}$

HESAP MAKİNESİ KULLANIMI

1.48. Aşağıdaki çarpma ve bölme işlemlerini hesap makinesi yardımıyla yapınız:

(a) $5236\cdot 0.015$ (b) $0.065\cdot 3.75$ (c) $145\div 0.25$ (d) $0.675\div 0.045$

1.49. Aşağıdaki değerleri hesap makinesi yardımıyla hesaplayınız:

(a) 6^5 (b) 3^3 (c) 8^{-4} (d) 12^{-6} (e) $\sqrt{784}$

(f) $\sqrt[3]{2197}$ (g) $\sqrt[4]{50,625}$ (h) $784^{0.5}$ (i) $50,625^{0.25}$

Ek Problemlerin Cevapları

1.31. (a) x^7 (b) $x^{5.5}=x^{(11/2)}=\sqrt{x^{11}}$ (c) x^2 (d) $x^{-9}=\frac{1}{x^9}$

1.32. (a) x^3 (b) $x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ (c) x^6 (d) $x^{-7}=\frac{1}{x^7}$

1.33. (a) x^{12} (b) $x^{-8}=\frac{1}{x^8}$ (c) x^6y^8 (d) $\frac{x^6}{y^9}$

1.34. (a) $x^{1/2}=\sqrt{x}$ (b) $x^{3/2}=\sqrt{x^3}$ (c) $x^{2/3}=\sqrt[3]{x^2}$ (d) $x^{-(4/5)}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$

1.35. (a) $54xy$ (b) $45x_1x_2$ (c) $-16xy^2$ (d) $7xyz$

1.36. (a) $9x+y$ (b) $16x+6y$ (c) $3x-9y$ (d) $3x^2-21xy-4y^2$

1.37. (a) $40x^2+31xy+6y^2$ (b) $60x^2-168xy+45y^2$ (c) $18x^3-24x^2y+14xy^2+8y^3$
(d) $160x^3+50xy^2-15y^3$

1.38. (a) $3(4-5x)$ (b) $14x(3x^2+2)$ (c) $5x^2y^4(3x+11y)$ (d) $2x^2y^4z^3(9y^2z+11x-13x^3z^3)$

1.39. (a) $(x+4)(x+6)$ (b) $(x-3)(x-7)$ (c) $(x-2)(x+11)$ (d) $(x+5)(x-12)$
(e) $(x+7)(x-7)$ (f) $(x-8)(x-15)$

1.40. (*a*) $(3x + 2)(x + 5)$ (*b*) $(5x - 4)(x - 3)$ (*c*) $(7x + 6)(x - 4)$ (*d*) $(2x + 3)(2x + 5)$
(*e*) $(2x - 5)(3x - 4)$ (*f*) $(8x + 7)(x - 6)$

1.41. (*a*) $\frac{2}{5}$ (*b*) $\frac{1}{5}$ (*c*) $\frac{x^2}{7}$ (*d*) $\frac{16}{3x}$ (*e*) $\frac{x-5}{x+8}$ (*f*) $\frac{x-6}{x-9}$

1.42. (*a*) $\frac{28x^2}{27y^2}$ (*b*) $\frac{20wxy^7}{7z^7}$ (*c*) $\frac{4}{5}$ (*d*) $\frac{11wy^2}{12xz^2}$

1.43. (*a*) $\frac{x^2+2x-15}{x^2+x-72}$ (*b*) $\frac{x^2-3x-28}{x^2-7x+6}$ (*c*) $\frac{x^2+14x+24}{x^2+3x-54}$ (*d*) $\frac{2x^2-25x+63}{3x^2+14x+8}$

1.44. (*a*) $\frac{31}{40}$ (*b*) $\frac{53}{132}$ (*c*) $\frac{25x}{42}$ (*d*) $\frac{13}{144x}$ (*e*) $\frac{7}{12}$ (*f*) $\frac{13}{36}$

1.45. (*a*) $\frac{7x-54}{x^2+9x}$ (*b*) $\frac{11x+26}{x^2+2x-8}$ (*c*) $\frac{41x+272}{x^2-49}$ (*d*) $\frac{17x-151}{x^2-14x+48}$

1.46. (*a*) ± 8 (*b*) ± 21 (*c*) $\pm 9\sqrt{3}$ (*d*) $\pm 11\sqrt{5}$ (*e*) ± 5 (*f*) $\pm 4\sqrt{3}$

1.47. (*a*) $\pm 13x^3y^4$ (*b*) $\pm 19xy^2z^3$ (*c*) $\pm 16xy^2\sqrt{3xy}$ (*d*) $\pm 15x^2y^2z^3\sqrt{2y}$

1.48. (*a*) 78.54 (*b*) 0.24375 (*c*) 580 (*d*) 15

1.49. (*a*) 7776 (*b*) 2187 (*c*) 0.0002441 (*d*) 0.0000003 (*e*) ± 28 (*f*) 13
(*g*) ± 15 (*h*) ± 28 (*i*) ± 15

Bölüm 2

DENKLEMLER VE GRAFİKLER

2.1. DENKLEMLER

İki cebirsel ifadenin birbirine eşitliğini gösteren matematiksel ifade *denklem* olarak adlandırılmaktadır. Bir denklemin çözümü, değişken veya değişkenlerin her birinde yerine yazıldığında eşitliğin her iki tarafında da aynı değerin oluşmasını sağlayan sayı ya da sayılardır. Eşittir işaretinin her iki tarafı birbirine eşit değerler barındırır.

Bölüm ve çarpım işlemleri için $c \neq 0$ olmak üzere, eşitlik değişmeksizin her iki tarafına aynı c değeri ile eklenebilir, çıkarılabilir, çarpılabilir veya bölünebilir. Tüm a, b ve c reel sayıları için $a = b$ olmak üzere *eşitliğin özellikleri* aşağıda özetlenmiştir:

(*a*) Toplama özelliği: $a + c = b + c$

(*b*) Çıkarma özelliği: $a - c = b - c$

(*c*) Çarpma özelliği: $ac = bc$

(*d*) Bölme özelliği: $a/c = b/c \qquad c \neq 0$

Bu adımlarda verilen işlemler, bilinmeyen değişken eşitliğin solunda ve çözüm eşitliğin sağında olacak şekilde sonucu belli olan basitleştirilmiş denklemlerin bulunmasında kullanılabilir.

ÖRNEK 1. Aşağıdaki denklem yukarıda anlatılmış olan üç basit adım kullanılarak çözülmüştür.

$$\frac{x}{4} - 2 = \frac{x}{5} + 1$$

1) Eşitliğin her iki tarafından $x/5$ değeri çıkarılarak tüm bilinmeyen değişkenler eşitliğin solunda toplanır:

$$\boxed{\frac{x}{4} - 2 - \frac{x}{5} = \frac{x}{5} + 1 - \frac{x}{5}} \qquad \text{(Çıkarma Özelliği)}$$

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} - 2 = 1$$

2) Eşitliğin her iki tarafına 2 eklenerek bilinmeyen değişken içermeyen tüm terimler eşitliğin sağında toplanır.

$$\boxed{\frac{x}{4} - \frac{x}{5} - 2 + 2 = 1 + 2} \qquad \text{(Toplama Özelliği)}$$

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 3$$

3) Burada eşitliğin her iki tarafı da 20 ile çarpılıp sonra çıkarılarak eşitliğin solunda yalnızca bilinmeyen değişken ve sağında çözüm kalana kadar eşitliğin her iki yanı da sadeleştirilir.

$$\boxed{20 \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{5}\right) = 3 \cdot 20} \qquad \text{(Çarpma Özelliği)}$$

$$5x - 4x = 60 \qquad x = 60$$

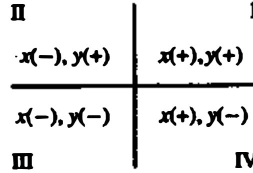
Problem 2.1 ve 2.2'ye bakınız.

2.2 KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİ

Kartezyen koordinat sistemi düzlemdeki yatay bir doğrunun ve dikey bir doğrunun birbirlerini dik bir şekilde kesmelerinden oluşur. Doğrular *koordinat ekseni,* eksenlerin kesişim noktası *orijin* olarak adlandırılır. Yatay eksen *x ekseni* ve dikey eksen *y ekseni* olarak adlandırılır. Düzlemin eksenler tarafından bölünmüş olan dört bölgesi çeyrek bölge olarak adlandırılır.

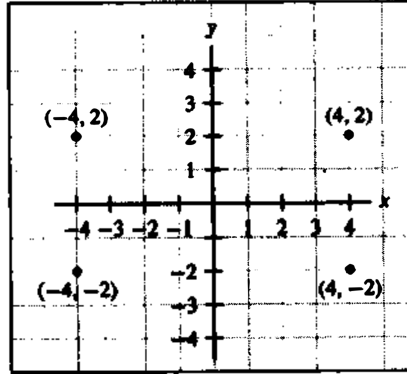
Düzlem üzerindeki her bir nokta *koordinatlar* olarak bilinen, orijine göre noktanın konumunu belirten tek bir sıralı sayı ikilisi ile ilişkilendirilir. *x koordinatı* veya *apsis* olarak adlandırılan ilk koordinat noktanın dikey eksene olan uzaklığını belirtir iken *y koordinatı* veya *ordinat* olarak adlandırılan ikinci koordinat ise noktanın yatay eksene olan uzaklığını belirtir. y ekseninin sağında kalan bölgede *x* koordinatları pozitif, solunda kalan bölgelerde negatiftir. *x* ekseninin üzerinde kalan bölgede y koordinatları pozitif, altında kalan bölgelerde negatiftir. Problem 2.3'e bakınız.

ÖRNEK 2. Her bir bölgedeki koordinatların işaretleri Şekil 2-1'de gösterilmiştir. Koordinat düzlemindeki bölgelerin saat yönünün tersi yönde numaralandırıldıklarına dikkat ediniz.



Şekil 2-1

ÖRNEK 3. Koordinatlar *P* noktasının orijine göre konumu vermektedir. (4, 2) noktası *y* ekseninin dört birim sağında, *x* ekseninin iki birim üstündedir. *P*(−4, 2) noktası *y* ekseninin dört birim solunda, *x* ekseninin iki birim üstündedir. *P*(−4, −2) noktası *y* ekseninin dört birim solunda, *x* ekseninin iki birim altındadır. *P*(4, −2) noktası y ekseninin dört birim sağında, *x* ekseninin iki birim altındadır. Şekil 2-2'ye ve Problem 2.3'e bakınız.



Şekil 2-2

2.3 DOĞRUSAL DENKLEMLER VE GRAFİKLER

Tüm değişkenlerin kuvveti bir olan ve değişkenlerin çapraz çarpımları olmayan eşitlikler ***doğrusal denklemler*** olarak adlandırılır. Bir doğrusal denklemin *standart gösterimi* ***a, c*** ve ***d*** reel sayılar ve ***a*** ile ***c*** aynı anda sıfıra eşit olmamak üzere şu şekildedir:

$$ax + cy = d$$

Doğrusal denklemin grafiği *düz çizgi* şeklindedir. Doğrusal bir denklemin grafiğini Kartezyen koordinat sisteminde çizebilmek için ilk olarak (1) denklemi sağlayan iki noktaya ihtiyaç vardır, (2) sonrasında bu iki nokta düz bir çizgi ile birleştirilir, (3) düz çizgi gerektiği kadar uzatılır. Bir doğru üzerindeki noktaların koordinatlarını bulmak için doğru denkleminde farklı x noktaları seçilerek denklem çözülür ve y noktasının değerleri belirlenir ya da doğru denkleminde farklı y noktaları seçilerek denklem çözülür ve x noktasının değerleri belirlenir. Denklemin grafiği çizilirken x değeri genellikle yatay eksende yer alır ve *bağımsız değişken* olarak adlandırılır; y değeri dikey eksende yer alır ve *bağımlı değişken* olarak adlandırılır. Örnek 4 ve Problem 2.3 ve 2.4'e bakınız.

ÖRNEK 4. Aşağıdaki gibi bir denklemin grafiği çizilirken,

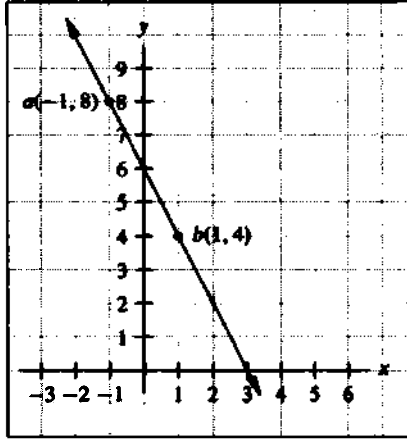
$$6x + 3y = 18$$

1) x için iki değer alınır ve denklem çözülerek bu değerlere karşılık gelen y değerleri bulunur. Eğer $x = 1$ ve $x = -1$ değerleri seçilirse,

$x = -1$ için	$6(-1) + 3y = 18$	$3y = 24$	$y = 8$	nokta_a: $(-1, 8)$
$x = 1$ için	$6(1) + 3y = 18$	$3y = 12$	$y = 4$	nokta_b: $(1, 4)$

2) Noktalar belirlenir ve düz bir doğru ile birleştirilir.

3) Doğru ihtiyaç duyulduğu kadar uzatılır. Şekil 2-3'e bakınız.



Şekil 2-3

2.4 EĞİM

Bir doğrunun eğimi, y bağımlı değişkenindeki değişim miktarının x bağımsız değişkenindeki değişim miktarına bölünmesiyle bulunur. Eğim bir doğrunun dikliğini ve yönünü belirtir. Soldan sağa doğru ilerledikçe, eğim pozitifse doğru yukarı yönlü eğim negatifse doğru aşağı yönlü hareket eder. Doğrunun eğimi mutlak değerce arttıkça doğru dikleşir. Yatay eksene paralel $y = k_1$ (sabit) denklemiyle gösterilen bir doğrunun eğimi sıfırdır. Dikey eksene paralel $x = k_2$ (sabit) denklemiyle gösterilen bir doğrunun eğimi ise tanımsızdır. Matematik terimleri içerisinde Yunan harflerinden (Δ) değişimi ifade etmektedir. Bir doğrunun eğimi m birbirlerine eşit dört farklı denklemle yazılabilir:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{dikey izdüşüm}}{\text{yatay izdüşüm}} \quad (x_1 \neq x_2) \qquad (2.1)$$

ÖRNEK 5. $6x + 3y = 18$ denkleminin eğimini bulmak için,

denklem (*2.*1)'de eğim için formüle doğru denklemini sağlayan iki noktanın koordinatı yazılır.

$$\text{Eğim} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Örnek 4'ten ilk nokta (–1, 8) noktası seçildiğinde $x_1 = -1$ ve $y_1 = 8$'dir ve ikinci nokta (1, 4) noktası ise $x_2 = 1$ ve $y_2 = 4$'tür. Değerler yukarıdaki denklemde yerine yazıldığında,

$$\text{Eğim} = m = \frac{8-4}{-1-(1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

Not:

(1) (*2.*1)'de formülde gösterildiği üzere eğer payda ve paydada koordinatların yeri değiştirilirse eğimin işareti veya değeri değişmez.

$$\text{Eğim} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-8}{1-(-1)} = \frac{-4}{2} = -2$$

(2) Negatif eğim Şekil 2-3'teki grafikte görüldüğü gibi doğrunun soldan sağa doğru aşağı yönlü olduğunu göstermektedir.

(3) Eğimin mutlak değeri $|2|$ doğrunun yatay eksendeki her bir birimlik ilerleme için dikey eksende iki birimlik değişimi gösterir. Şekil 2-3 ve Problem 2.5'ten 2.8'e kadar bakınız.

2.5 DOĞRULARIN EKSENLERİ KESTİĞİ NOKTALARIN BELİRLENMESİ

Grafiklerde *x kesişim noktası* doğrunun *x* eksenini kestiği noktadır ve *y kesişim noktası* doğrunun *y* eksenini kestiği noktadır. Doğrunun *x* eksenini kestiği noktada $y = 0$'dır. Doğrunun *x* eksenini kestiği nokta denklemde *y* değerinin yerine 0 verilip *x* için denklem çözülerek bulunur. Benzer şekilde doğrunun *y* eksenini kestiği noktada $x = 0$'dır. Doğrunun *y* eksenini kestiği nokta denklemde *x* değerinin yerine 0 verilip *y* için denklemin çözülmesiyle bulunur.

ÖRNEK 6. Doğrunun *x* eksenini kestiği noktanın belirlenmesi için;

$$6x + 3y = 18$$

$y = 0$ değeri denklemde yerine yazılarak denklem *x* için çözülür.

$$6x + 3(0) = 18 \qquad x = 3$$

Doğrunun *x* eksenini kestiği nokta Şekil 2-3'te olduğu gibi (3, 0) olarak bulunur.

Doğrunun *y* eksenini kestiği noktanın belirlenmesi için;

$x = 0$ değeri denklemde yerine yazılarak denklem *y* için çözülür.

$$6(0) + 3y = 18 \qquad y = 6$$

Doğrunun y eksenini kestiği nokta Şekil 2-3'te olduğu gibi (0, 6) olarak bulunur. Problem 2.9'dan 2.13'e kadar bakınız.

2.6 EĞİM-KESİŞİM FORMUNDAKİ DENKLEM

Öncelikle doğrusal bir denklemin standart formuyla başlanır,

$$ax + cy = d$$

ve denklem *x*'e göre *y* için çözülür,

$$cy = -ax + d$$

$$y = -\frac{a}{c}x + \frac{d}{c}$$

Daha sonra $m = -a/c$ ve $b = d/c$ alınınır,

$$y = mx + b \tag{2.2}$$

Denklem (2.2) bir doğrusal denklemin eğim kesişim formudur. Bu denklemde m doğrunun eğimini belirtir. Örnek 7 ve Örnek 8'de gösterildiği ve Problem 2.9'dan 2.14'e kadar olan sorularda uygulandığı şekilde $(0, b)$ noktası doğrunun y eksenini kestiği noktadır ve $(-b/m, 0)$ noktası doğrunun x eksenini kestiği noktadır.

ÖRNEK 7. Bir denklemin standart formdan eğim-kesişim formunun üretilmesi x'e göre y için denklemin çözülmesiyle elde edilir.

$$6x + 3y = 18$$
$$3y = -6x + 18$$
$$y = -2x + 6$$

Örnek 5'te olduğu gibi doğrunun eğimi Denklem (2.2)'ye göre $m = -2$ olarak bulunmuştur; Örnek 6'da bulunduğu gibi $b = 6$ yani doğrunun y eksenini kestiği noktanın koordinatı (0, 6)'dır. Yine Örnek 6'da bulunduğu gibi doğrunun x eksenini kestiği nokta $(-b/m, 0)$ yani (–6/–2, 0) veya (3, 0)'dır.

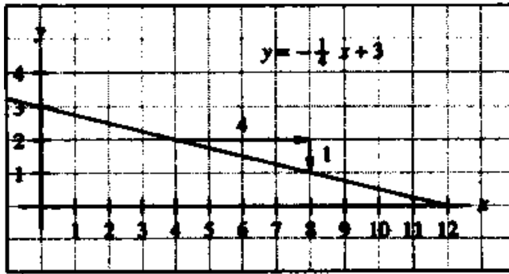
ÖRNEK 8. Aşağıda dört farklı doğrunun denklemi verilmiştir.

(a) $y = -\frac{1}{4}x + 3$ (*b*) $y = 2x = -1$ (*c*) $y = 5$ (*d*) $y = -3x + 6$

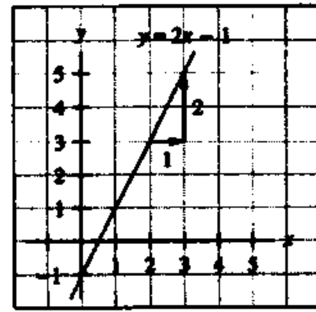
Eğim kesişim formunda yazılan bir doğru denkleminde doğrunun eğiminin x değişkeninin katsayısına eşit olduğu bilinmektedir. Bu nedenle bu formdaki denklemlerde doğrunun eğimi x'in katsayısından kolaylıkla belirlenebilir. (*a*) $-\frac{1}{4}$, (*b*) 2, (*c*) 0 ve (*d*) –3.

Eğim kesişim formunda yazılan bir doğru denkleminde sabit terimin, x değişkeninin 0 kabul edildiği durumda doğrunun y eksenini kestiği noktanın koordinatını verdiği bilinmektedir. Bu nedenle $x = 0$ için doğrunun y eksenini kestiği nokta kolaylıkla belirlenebilir. (*a*) (0, 3), (*b*) (0, –1), (*c*) (0, 5) ve (*d*) (0, 6).

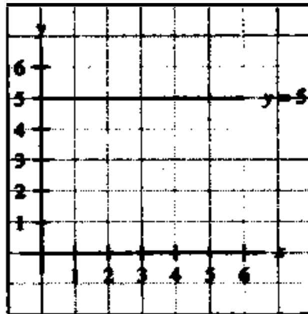
Eğim kesişim formunda yazılan bir doğru denkleminde doğrunun x eksenini kestiği nokta $(-b/m)$ olduğundan doğrunun x eksenini kestiği noktaların (*a*) (12, 0), (*b*) $(\frac{1}{2}, 0)$ ve (*d*) (2, 0) olduğunu biliyoruz. (*c*) seçeneğindeki doğrunun eğimi $m = 0$ olduğu ve 0'ın bölümü tanımsız yapmasından dolayı (*c*)'de x eksenini kesen nokta yoktur. Şekil 2-4'e ve Problem 2.11 ve 2.13'e bakınız.



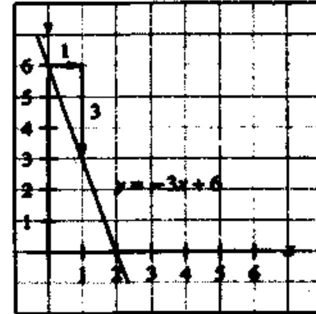
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

Şekil 2-4

2.7 DOĞRUNUN DENKLEMİNİN BULUNMASI

Bir doğrunun denkleminin belirlenmesi doğru hakkında bilinen bilgi miktarına bağlıdır. Eğer bir doğrunun eğimi ve y eksenini kestiği nokta biliniyorsa, Örnek 9'da olduğu gibi eğim kesişim formundaki doğru denklemi rahatlıkla yazılabilir. Eğer bir doğrunun eğimi ve bir noktası (x_1, y_1) biliniyorsa Örnek 10'da gösterildiği şekilde *eğim- nokta formülü* kullanılabilir.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{2.3}$$

Eğer doğru üzerinde birden çok noktanın koordinatları biliniyorsa Örnek 11'de gösterildiği şekilde *iki noktası bilinen doğrunun denkleminin bulunması formülü* kullanılabilir.

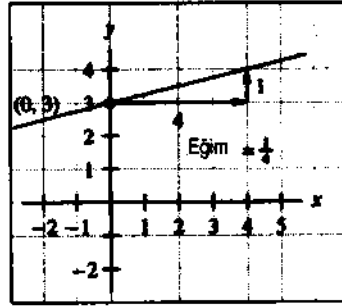
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2.4}$$

Ayrıca Problem 2.14'ten 2.20'ye kadar bakınız.

ÖRNEK 9. Şekil 2-5'te olduğu gibi eğimi m ve y eksenini kestiği noktanın koordinatları $(0, b)$ olarak verilen bir doğrunun denklemi eğim-kesişim formundan $m = \frac{1}{4}$ ve $b = 3$ değerleri yerine yazılarak bulunabilir.

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{1}{4}x + 3$$



Şekil 2-5

ÖRNEK 10. Şekil 2-6'da olduğu gibi eğimi m ve bir noktasının koordinatları (x_1, y_1) bilinen doğrunun denklemi, Denklem (2.3)'te verilen nokta-eğim formülünde $m = -5$, $x_1 = 1$ ve $y_1 = 25$ değerleri yerine yazılarak bulunabilir.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 25 = -5(x - 1)$$

$$y = -5x + 30$$

ÖRNEK 11. Şekil 2-7'de olduğu gibi iki noktası (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) bilinen bir doğru denklemi, Denklem (2.4)'te iki noktası bilinen doğru denklemi formülünde $x_1 = 4$, $y_1 = 1$, $x_2 = 6$ ve $y_2 = 2$ değerleri yerlerine yazılarak eğim bulunur.

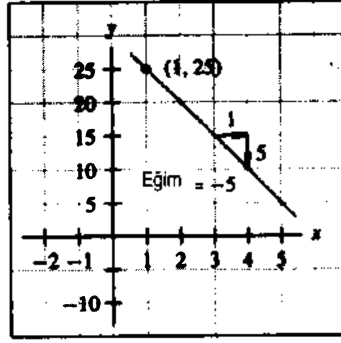
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{6-4} = \frac{1}{2}$$

Daha sonra bulunan m, x_1 ve y_1 değerleri nokta-eğim formülünde yerine yazılır,

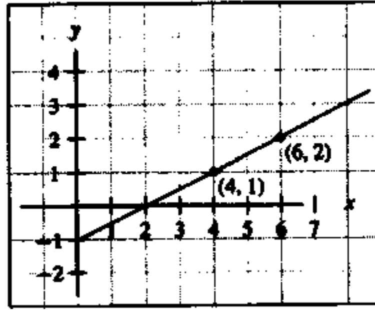
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$



Şekil 2-6



Şekil 2-7

2.8 İŞLETME VE İKTİSATTA DOĞRUSAL DENKLEM UYGULAMALARI

Örnek 12'den 15'e kadar ve Problem 2.21'den 2.34'e kadar gösterildiği gibi işletme ve iktisadın pek çok alanında doğrusal denklemler etkin olarak kullanılmaktadır.

ÖRNEK 12. Doğrusal denklemler genellikle üretim kısıtlarının tanımlanması için uygundur. Bir firmanın haftada iki çeşit ürün üretmek için 240 saat kalifiye iş gücüne sahip olduğunu varsayalım. Birinci çeşit üründen (x) bir birim üretmek için 3 saat kalifiye iş gücü gerekmektedir. İkinci çeşit üründen (y) bir birim üretmek için 4 saat kalifiye iş gücü gerekmektedir. (*a*) Firmanın iş gücü kısıt denklemini belirtiniz. (*b*) Üretim olanakları eğrisini çiziniz.

(*a*) Her bir birimlik x ürünü üretimi için 3 saatlik iş gücü ve her bir birimlik y ürünü üretimi için 4 saatlik iş gücü gerektiği için ve toplamda 240 saatlik iş gücüne sahip olunduğu için kısıt lineer bir denklemin standart formunda ifade edilebilir.

$$3x + 4y = 240 \tag{2.5}$$

(*b*) Grafiğin çizilebilmesi için denklem (*2.5*) eğim kesişim formuna dönüştürülür ve grafik Şekil 2-8'deki gibi çizilir.

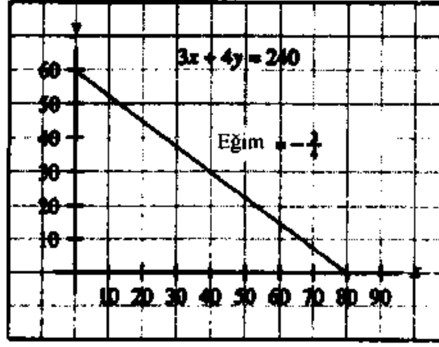
$$4y = -3x + 240$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 60$$

Bu problemde yalnızca birinci bölgedeki noktaların ilgili olduğuna dikkat ediniz. Diğer pek çok ekonomik problemde de bu şekilde doğru olacaktır.

ÖRNEK 13. Bir taşımacılık şirketinin kamyonetinin x yıl sonraki değerini (y) gösteren amortisman doğrusunu belirlemek için doğrusal denklemler kullanılır.

$$y = 68{,}000 - 8000x$$



Şekil 2-8

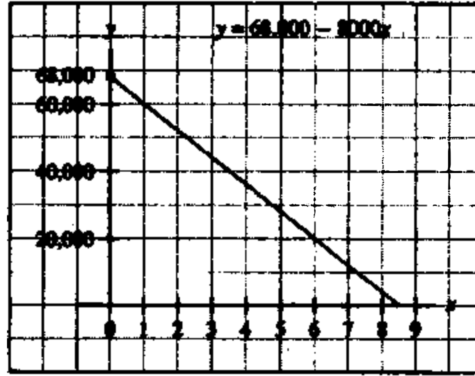
(*a*) Kamyonetin şu anki değerini, (*b*) kamyonetin 3 yıl sonraki değerini, (*c*) kamyonetin 8 yıl sonraki hurda değerini belirleyiniz ve (*d*) grafiği çiziniz.

(*a*) $x = 0$ değeri denklemde yerine yazıldığında, $y = 68{,}000 - 8000(0) = 68{,}000$

(*b*) $x = 3$ değeri denklemde yerine yazıldığında, $y = 68{,}000 - 8000(3) = 44{,}000$

(*c*) $x = 8$ değeri denklemde yerine yazıldığında, $y = 68{,}000 - 8000(8) = 4000$

(*d*) Şekil 2-9'a ve Problem 2.25 ve 2.26'a bakınız.



Şekil 2-9

ÖRNEK 14.

(*a*) Bir firmanın üretimden bağımsız olarak ödemek zorunda olduğu kira ve yönetici maaşları gibi giderleri olan *sabit maliyetleri* (*FC* = Fixed Cost) 560$'dır ve üretimde her bir birimlik ilave x malı üretiminin neden olduğu maliyet artış miktarı olan *marjinal maliyeti* (MC = Marjinal Cost) 9$'dır. Sabit maliyetler ile marjinal maliyet toplamı *toplam maliyeti* (Cost) oluşturmaktadır. Toplam maliyetin $y = mx + b$ şeklindeki bir doğrusal denklem yardımıyla belirtilmesi gerekirse, $y = C$, $m = MC = 9$ ve $b = FC = 560$ olur.

$$C = 9x + 560$$

Eğer 140 birim x malı üretilirse $x = 140$ olur ve toplam Maliyet (C) aşağıdaki şekilde bulunur.

$$C = 9(140) + 560 = 1820$$

(*b*) Eğer firma *tam rekabet piyasasındaki* bir firmaysa her bir birim x ürününün piyasa fiyatı sabittir (p). Firmanın *toplam geliri* (*R*) aşağıdaki doğrusal denklem yardımıyla gösterilebilir.

$$R = p \cdot x$$

Eğer $p = 25$ fiyat seviyesinden 140 birim x ürünü satılırsa,

$$R = 25(140) = 3500$$

(*c*) *Kar* (π) toplam gelir ile toplam maliyetlerin farkı olduğu için kâr düzeyi aşağıdaki doğrusal denklem yardımıyla da ifade edilebilmektedir.

$$\pi = R - C$$

Yukarıdaki değerler yerine yazılır,

$$\pi = 25(x) - [9x + 560] = 16x - 560$$

Eğer 140 birim x ürünü üretilmiş ve satılmışsa,

$$\pi = 16(140) - 560 = 1680$$

Ayrıca Problem 2.21'den 2.24'e kadar bakınız.

ÖRNEK 15. İktisatçılar genellikle bütçe kısıtı altında fayda maksimizasyonu sağlamaya çalışırlar. Kısıt genellikle bireyin verilen bir B bütçesiyle satın alabileceği olası farklı tüm mal kombinasyonlarını gösteren bir *bütçe doğrusu* yardımıyla gösterilmektedir. Bir kadının x ve y malları için harcayabileceği 150$'lık bir bütçesi olduğunu varsayalım. Piyasada x malının fiyatı P_x = 5$ ve y malının fiyatı P_y = 2$ şeklindedir. (*a*) Kadının bütçe doğrusunu çiziniz. (*b*) Bütçesi yüzde 20 düşerse, (*c*) P_x yarıya indirilirse ve (*d*) P_y fiyatı 50 cent artarsa bütçe doğrusuna ne olduğunu gösteriniz.

(*a*) Bütçe doğrusunun formülü standart bir doğrusal denklemdir.

$$P_x \cdot x + P_y \cdot y = B$$

$P_x = 5$, $P_y = 2$ ve $B = 150$$ değerleri denklemde yerine yazıldığında,

$$5x + 2y = 150 \qquad (2.6)$$

Denklem 2.6 eğim kesişim formunda yazılıp bütçe doğrusu grafiği çizildiğinde,

$$y = -2.5x + 75$$

Şekil 2-10 (a)'da ki düz doğruya bakınız.

(*b*) Eğer bütçe %20 azalırsa, 150 – 0.2(150) = 120 olacağından yeni bütçe 120$ olur. Yeni bütçe için denklem aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

$$5x + 2y = 120$$
$$y = -2.5x + 60$$

Şekil 2-10'daki kesikli çizgiye bakınız. Bütçedeki azalış bütçe doğrusunda sola doğru paralel bir kaymaya neden olmaktadır.

(*c*) Eğer P_x yarıya indirilirse Denklem (2.6) aşağıdaki hale gelir.

$$2.5x + 2y = 150$$
$$y = -1.25x + 75$$

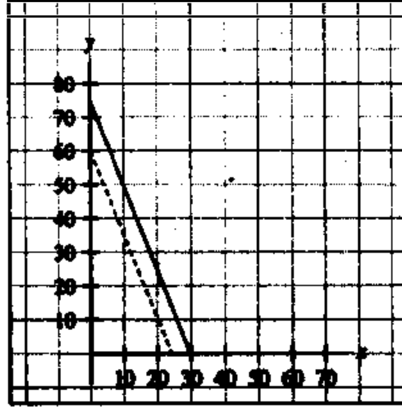
Doğrunun y eksenini kestiği nokta değişmemiştir. Ancak eğimi değişmiştir ve doğru yatıklaşmıştır. Şekil 2-10(*b*)'deki kesikli çizgiye bakınız. x ürününün fiyatının yarıya indirilmesiyle verilen bütçeyle alınabilir x ürünü miktarı iki katına çıkmıştır.

(*d*) Eğer y ürünün fiyatı 50 cent artarsa,

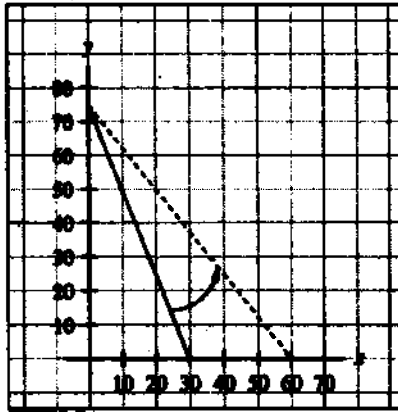
$$5x + 2.5y = 150$$
$$y = -2x + 60$$

P_y'deki değişim Şekil 2-10(*c*)'de görüldüğü şekilde hem doğrunun y eksenini kestiği noktanın değişmesine hem de doğrunun eğiminin değişmesine neden olmuştur. P_y'deki artışla beraber doğrunun y eksenini kestiği nokta aşağıya kaymıştır çünkü mevcut bütçe ile artık daha az y ürünü satın alınabilmektedir ve eğim daha yatıktır. Doğrunun yatay ekseni kestiği noktanın değişmediğine dikkat ediniz. Bütçede ve P_x'de hiçbir değişiklik olmaması nedeniyle tüm bütçenin x ürünü tüketimine harcanması halinde satın alınabilecek maksimum x ürün miktarı değişmemiştir.

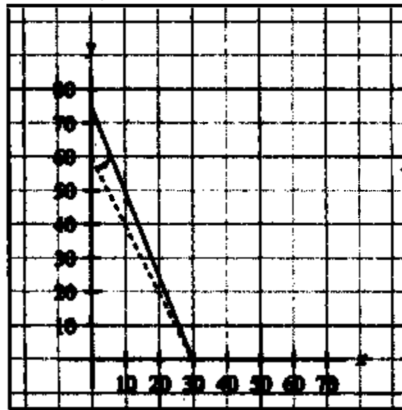
Ayrıca Problem 2.31 ve 2.32'ye bakınız.



(a)



(b)



(c)

Şekil 2-10

Çözümlü Problemler

DOĞRUSAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

2.1. Aşağıdaki doğrusal denklemleri bilinmeyen değişkeni eşitliğin solunda, diğer tüm terimleri eşitliğin sağında toplayıp sonrasında sadeleştirerek çözümlemek için denklemlerin özelliklerini kullanınız.

(*a*) $3x + 8 = 5x - 6$

$$3x + 8 = 5x - 6$$
$$3x - 5x = -6 - 8$$
$$-2x = -14$$
$$x = 7$$

(*b*) $32 - 3x = 9x - 40$

$$32 - 3x = 9x - 40$$
$$-3x - 9x = -40 - 32$$
$$-12x = -72$$
$$x = 6$$

(*c*) $6(4x + 5) - 3x = 19 - 2(7x + 82)$

$$6(4x + 5) - 3x = 19 - 2(7x + 82)$$
$$24x + 30 - 3x = 19 - 14x - 164$$
$$24x - 3x + 14x = 19 - 164 - 30$$
$$35x = -175$$
$$x = -5$$

(*d*) $6x - 13 = 3(2x - 11) + 20$

$$6x - 13 = 3(2x - 11) + 20$$
$$6x - 13 = 6x - 33 + 20$$
$$6x - 6x = -33 + 20 + 13$$
$$0 = 0$$

Denklem 0 = 0 haline geldiğinde denklem özdeş hale gelecektir. Özdeşlikte bilinmeyen değişkenlere hangi reel sayı verilirse verilsin sonuç değişmeyecektir.

2.2. Aşağıda en küçük ortak payda değerleri ile denklemlerin her iki tarafı çarpılarak x değişkenlerini paydadan kurtarınız. Denklemleri x değişkenleri için çözünüz.

(*a*) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 6$

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 6$$

Denklemin her iki tarafı 20 ile çarpılarak değişkenler paydadan kurtarılır.

$$20 \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{5}\right) = 6 \cdot 20$$
$$5x - 4x = 120$$
$$x = 120$$

(*b*) $\frac{x}{6} - 5 = \frac{x}{9} + 1$

$$\frac{x}{6} - 5 = \frac{x}{9} + 1$$
$$\frac{x}{6} - \frac{x}{9} = 1 + 5$$
$$18 \cdot \left(\frac{x}{6} - \frac{x}{9}\right) = 6 \cdot 18$$
$$3x - 2x = 108$$
$$x = 108$$

(*c*) $\frac{8}{x} + \frac{6}{x+5} = \frac{12}{x}$ $\quad (x \neq 0, -5)$

$$\frac{8}{x} + \frac{6}{x+5} = \frac{12}{x}$$
$$x(x+5) \cdot \left(\frac{8}{x} + \frac{6}{x+5}\right) = \frac{12}{x} \cdot x(x+5)$$
$$8(x+5) + 6x = 12(x+5)$$
$$14x + 40 = 12x + 60$$
$$2x = 20 \qquad x = 10$$

(*d*) $\frac{14}{x+3} + \frac{20}{x-4} = \frac{38}{x-4}$ $\quad (x \neq -3, 4)$

$$(x+3)(x-4)\left(\frac{14}{x+3} + \frac{20}{x-4}\right) = \left(\frac{38}{x-4}\right)(x+3)(x-4)$$
$$14(x-4) + 20(x+3) = 38(x+3)$$
$$14x - 56 + 20x + 60 = 38x + 114$$
$$-4x = 110 \qquad x = -27.5$$

(*e*) $\frac{36}{x-5} - \frac{25}{2x} = \frac{26}{x-5}$ $\quad (x \neq 0, 5)$

$$2x(x-5) \cdot \left(\frac{36}{x-5} - \frac{25}{2x}\right) = \left(\frac{26}{x-5}\right) \cdot 2x(x-5)$$
$$72x - 25(x-5) = 52x$$
$$-5x + 125 = 0 \qquad x = 25$$

KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİNDE GRAFİKLERİN ÇİZİLMESİ

2.3. Aşağıdaki noktaların yerini belirleyiniz: (*a*) (3, 4), (*b*) (5, –2), (*c*) (–6, 3), (*d*) (0, –4), (*e*) (–7, 0), (*f*) (–8, –2), (*g*) (2, –3) ve (*h*) (–5, –4).

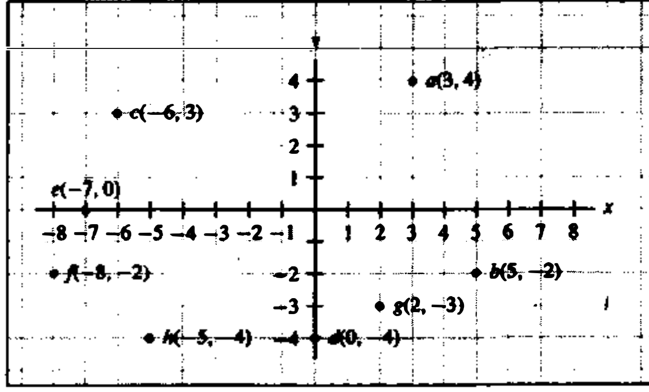
(*a*) (3, 4) noktasını belirlemek için orijin noktasından 3 birim sağa, 4 birim yukarıya gidilir. Şekil 2-11'de görülmektedir.

(*b*) (5, –2) noktasını belirlemek için orijin noktasından 5 birim sağa, 2 birim aşağı gidilir. Şekil 2-11'de görülmektedir.

(*c*) (–6, 3) noktasını belirlemek için orijin noktasından 6 birim sola, sonrasında 3 birim yukarıya gidilir.

(*d*) (0, –4) noktasını belirlemek için orijin noktasından 4 birim aşağıya gidilir.

(*e*) (–7, 0) noktasını belirlemek için orijin noktasından 7 birim sola gidilir. Şekil 2-11'de görülmektedir. (*f*), (*g*) ve (*h*) için Şekil 2-11'e bakınız.



Şekil 2-11

2.4. Aşağıdaki doğrusal denklemleri x'e göre y için çözümleyerek standart formdan eğim kesişim formuna dönüştürünüz.

(*a*) $56x + 7y = 91$

$$56x + 7y = 91$$
$$7y = -56x + 91$$
$$y = -8x + 13$$

(*b*) $42x - 6y = 90$

$$42x - 6y = 90$$
$$-6y = -42x + 90$$
$$y = 7x - 15$$

(*c*) $72x - 8y = 0$

$$72x - 8y = 0$$
$$-8y = -72x$$
$$y = 9x$$

(*d*) $16y = 176$

$$16y = 176$$
$$y = 11$$

Not:

1) Eğer yukarıdaki (c) seçeneğinde olduğu gibi doğrusal denklemin standart formunda sabit terim yoksa eğim-kesişim formunda $b = 0$ olur ve doğru orijinden geçer. Problem 2.13 (g)'ye bakınız.

2) Eğer doğru denkleminin standart formunda x değişkeni yoksa doğrunun eğimi sıfıra eşit olur. $m = 0$ olduğu durumda doğru yatay eksene paralel sabit bir doğru şeklinde yer alır. Problem 2.13 (h)'ye bakınız.

EĞİM

2.5. Aşağıdaki doğruların eğimlerini bulunuz.

(*a*) $y = -5x + 16$ (*b*) $y = 1/6x - 5$ (*c*) $y = 4.3x - 8$ (*d*) $y = -7x$ (*e*) $y = 18$
(*f*) $y = -1/2$ (*g*) $x = 6$

Doğrusal bir denklemin eğim kesişim formunda x değişkeninin katsayısı doğrunun eğimini verir.

İlk dört denklemin doğrularının eğimi bu şekilde kolaylıkla bulunabilir. (*a*) –5, (*b*) $\frac{1}{6}$ (*c*) 4.3 ve (*d*) –7 (*e*) ve (*f*) seçeneklerindeki doğruların eğimleri 0'dır. Çünkü denklemlerde x değişkeni bulunmamaktadır. Bu denklemler $y = (0)x + 18$ ve $y = (0)x - \frac{1}{2}$ şeklinde de yazılabilirler. Bu denklemlerin grafikleri yatay eksene paralel bir doğru şeklindedir.

(*g*) seçeneğindeki doğrunun eğimi tanımsızdır. $x = 6$ doğrusunun grafiği x eksenini 6 noktasında kesen yatay eksene dik bir doğru şeklindedir. Tüm y değerlerine karşılık gelen x değerleri aynıdır, $x_1 = x_2$ ve farkları sıfıra eşittir, $x_2 - x_1 = 0$. Sayıların sıfır ile bölümü tanımsız olacağından, doğrunun eğimi tanımsızdır. Aşağıda belirtilen genel eğim belirleme formülünde parantez içerisindeki uyarı bu nedenle yapılmaktadır.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_1 \neq x_2)$$

2.6. Aşağıdaki denklemleri öncelikle eğim kesişim formuna getirip sonrasında eğimlerini bulunuz.

(*a*) $24x + 6y = 30$
$y = -4x + 5 \quad m = -4$

(*b*) $15x - 3y = 48$
$y = 5x - 16 \quad m = 5$

(*c*) $9x + \frac{1}{2}y = -14$
$y = -18x - 28 \quad m = -18$

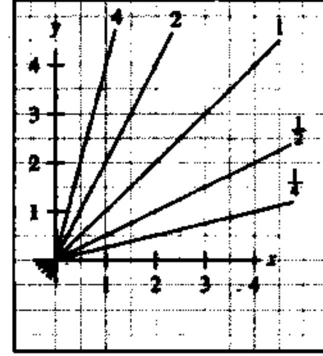
(*d*) $-36x + 16y = 80$
$y = 2\frac{1}{4}x + 5 \quad m = 2\frac{1}{4}$

(*e*) $14x - 4y = 1$
$y = 3\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \quad m = 3\frac{1}{2}$

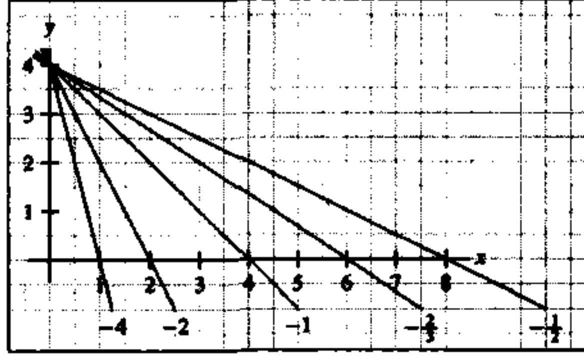
(*f*) $14x + 56y = 280$
$y = -\frac{1}{4}x + 5 \quad m = -\frac{1}{4}$

2.7. Eğimin belirttiği dikliği ve yönü örneklendirmek için (*a*) $y(0, 0)$ noktasından geçen ve eğimleri sırasıyla $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 ve 4 olan beş doğru çiziniz. (*b*) $y(0, 4)$ noktasından geçen ve eğimleri sırasıyla -4, -2, -1, $-\frac{2}{3}$ ve $-\frac{1}{2}$ olan beş doğru çiziniz.

(a) Şekil 2-12 (a)'ya bakınız. (b) Şekil 2-12 (b)'ye bakınız.



(a)



(b)

Şekil 2-12

2.8. Aşağıda iki noktasının koordinatları verilen doğruların eğimini bulmak için Kısım 2.4'teki formülün farklı iki varyasyonunu kullanınız.

(*a*) (5, 8), (7, 14)

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14 - 8}{7 - 5} = \frac{6}{2} = 3$$

(*b*) (6, 10), (9, 4)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 10}{9 - 6} = \frac{-6}{3} = -2$$

(*c*) (–2, 5), (1, –7)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7 - 5}{1 - (-2)} = \frac{-12}{3} = -4$$

(*d*) (4, –19), (6, –9)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-9 - (-19)}{6 - 4} = \frac{10}{2} = 5$$

Devam eden sorularda fark alırken seçilen ilk noktaları değiştiriniz.

(*e*) (8, 6), (12, 16)

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{6 - 16}{8 - 12} = \frac{-10}{-4} = 2\frac{1}{2}$$

(*f*) (–1, 3), (8, 15)

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{3 - 15}{-1 - 8} = \frac{-12}{-9} = 1\frac{1}{3}$$

(*g*) (–2, –13), (–6, –5)

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-13 - (-5)}{-2 - (-6)} = \frac{-8}{4} = -2$$

(*h*) (5, –7), (12, –8)

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-7 - (-8)}{5 - 12} = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}$$

DOĞRULARIN EKSENLERİ KESTİĞİ NOKTALARIN BELİRLENMESİ

2.9. Aşağıdaki denklemlerin y eksenini kestiği noktaları belirtiniz.

(*a*) $5x + y = 9$

Doğrunun y eksenini kestiği noktanın apsisi sıfıra eşittir, $x = 0$. Denklemde x değişkenine 0 değeri verildiğinde doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı bulunur.

$$5(0) + y = 9$$
$$y = 9$$

Doğrunun y eksenini kestiği noktanın apsis değeri $x = 0$ ve ordinat değeri $y = 9$ olduğuna göre koordinatları (0, 9) olmaktadır.

(*b*) $7x - 4y = 56$
$x = 0$ verilerek,

$$7(0) - 4y = 56$$
$$-4y = 56$$
$$y = -14$$

y eksenini kesim noktası: (0, –14)

(*c*) $y = 5x - 17$
$x = 0$ verilerek,

$$y = 5(0) - 17$$
$$y = -17$$

y eksenini kesim noktası: (0, –17)

Eğer eğim kesişim formundaki denklem (c)'de olduğu gibiyse doğrunun y eksenini kestiği nokta (0, b) Örnek 7'de gösterildiği gibi kolaylıkla bulunabilmektedir.

(*d*) $y = 18x - 33$

y eksenini kesim noktası: (0, –33)

(*e*) $y = 3x + \frac{1}{4}$

y eksenini kesim noktası: $(0, \frac{1}{4})$

(*f*) $y = \frac{1}{5} - 2$

y eksenini kesim noktası: (0, –2)

2.10. Aşağıdaki denklemlerin x eksenini kestiği noktaları belirtiniz.

(*a*) $y = 9x - 72$

Doğrunun x eksenini kestiği noktanın ordinatı sıfıra eşittir, $y = 0$. Denklemde y değişkenine 0 değeri verildiğinde doğrunun x eksenini kestiği noktanın apsisi bulunur.

$$0 = 9x - 72$$
$$-9x = -72$$
$$x = 8$$ x eksenini kesim noktası: (8, 0)

(*b*) $y = 13x + 169$

$y = 0$ verilerek,

$$0 = 13x + 169$$
$$-13x = 169$$
$$x = -13$$ x eksenini kesim noktası: (–13, 0)

(*c*) $y = 32x - 8$

$$0 = 32x - 8$$
$$-32x = -8$$
$$x = \frac{1}{4}$$ x eksenini kesim noktası: $(\frac{1}{4}, 0)$

(*d*) $y = 7x$

$$0 = 7x$$
$$x = 0$$ x eksenini kesim noktası: (0, 0)

2.11. Aşağıda eğim kesişim formunda doğrusal denklemi verilen doğrunun x eksenini kestiği noktanın koordinatlarını bulunuz.

$y = mx + b$

Denklemde y değerine 0 verilir ($y = 0$),

$$0 = mx + b$$
$$mx = -b$$
$$x = -\frac{b}{m} \qquad (2.7)$$

Doğrunun x eksenini kestiği noktanın koordinatları $(-\frac{b}{m}, 0)$.

2.12. Problem 2.11'de elde edilen bilgiyi kullanarak aşağıdaki denklemlerin x eksenini kestiği noktaların koordinatlarını kısa yoldan bulunuz.

(*a*) $y = 16x + 64$

Burada $m = 16$ ve $b = 64$'tür. Bu değerler (2.7) numaralı denklemde yerine yazıldığında,

$$x = -\frac{64}{16}$$
$$x = -4$$ Doğrunun x eksenini kestiği noktanın koordinatları: (–4, 0)

(*b*) $y = 18x - 9$

Burada $m = 18$ ve $b = -9$'dur. Bu değerler (2.7) numaralı denklemde yerine yazıldığında,

$$x = -\left(\frac{-9}{18}\right)$$
$$x = \frac{1}{2}$$ Doğrunun x eksenini kestiği noktanın koordinatları: $(\frac{1}{2}, 0)$

(*c*) $y = 15x + 120$

Burada $m = 15$ ve $b = 120$'dir.

$$x = -\frac{120}{15}$$
$$x = -8$$ Doğrunun x eksenini kestiği noktanın koordinatları: (–8, 0)

(*d*) $y = 5x - 125$

Burada $m = 5$ ve $b = -125$'tir.

$$x = -\left(\frac{-125}{5}\right)$$

$x = 25$ Doğrunun x eksenini kestiği noktanın koordinatları: (25, 0)

(*e*) $18x + 5y = 54$

Doğru denklemi eğim kesişim formunda değilse eğim kesişim formunu bulunuz ya da denklemde y değişkenine 0 değerini veriniz.

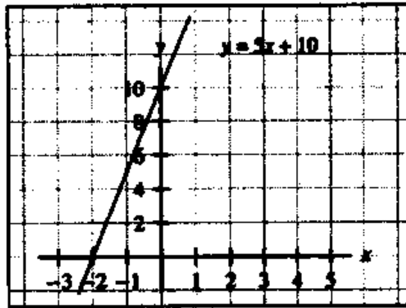
$18x + 5(0) = 54$

$x = 3$ Doğrunun x eksenini kestiği noktanın koordinatları: (3, 0)

2.13. Aşağıda denklemleri verilen doğruların y eksenini ve x eksenini kestiği noktaları bulunuz ve bu iki noktadan yararlanarak koordinat düzlemi üzerinde doğruların grafiklerini çiziniz.

(*a*) $y = 5x + 10$

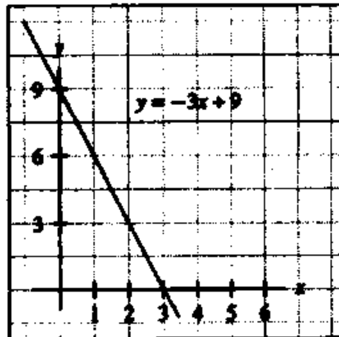
Denklemin y eksenini kestiği noktanın koordinatları: (0, 10), x eksenini kestiği noktanın koordinatları: (–2, 0). Şekil 2-13'e bakınız.



Şekil 2-13

(*b*) $y = -3x + 9$

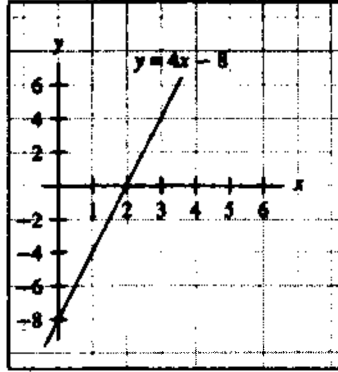
Denklemin y eksenini kestiği noktanın koordinatları: (0, 9), x eksenini kestiği noktanın koordinatları: (3, 0). Şekil 2-14'e bakınız.



Şekil 2-14

(*c*) $y = 4x - 8$

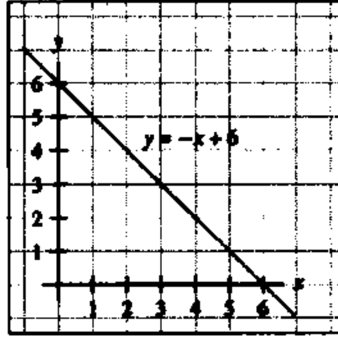
Denklemin y eksenini kestiği noktanın koordinatları: (0, –8), x eksenini kestiği noktanın koordinatları: (2, 0). Şekil 2-15'e bakınız.



Şekil 2-15

(*d*) $y = -x + 6$

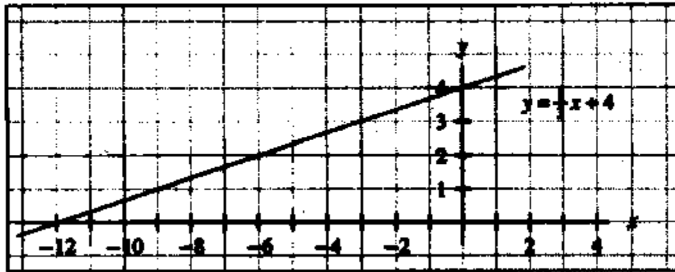
Denklemin y eksenini kestiği noktanın koordinatları: (0, 6), x eksenini kestiği noktanın koordinatları: (6, 0). Şekil 2-16'ya bakınız.



Şekil 2-16

(*e*) $y = \frac{1}{3}x + 4$

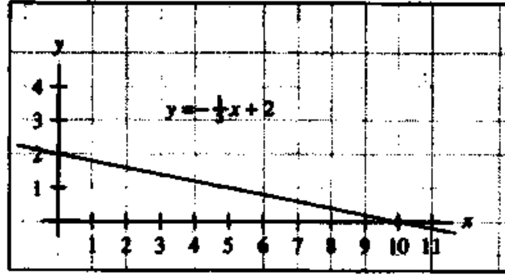
Denklemin y eksenini kestiği noktanın koordinatları: (0, 4), x eksenini kestiği noktanın koordinatları: (−12, 0). Şekil 2-17'ye bakınız.



Şekil 2-17

(*f*) $y = -\frac{1}{5}x + 2$

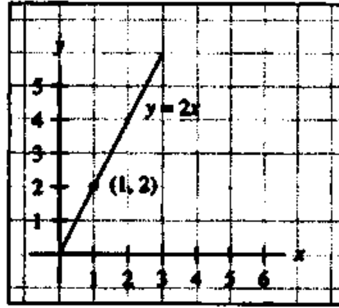
Denklemin y eksenini kestiği noktanın koordinatları: (0, 2), x eksenini kestiği noktanın koordinatları: (10, 0). Şekil 2-18'e bakınız.



Şekil 2-18

(g) $y = 2x$

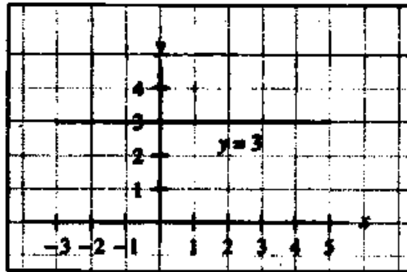
Denklemin y eksenini kestiği noktanın koordinatları ve x eksenini kestiği noktanın koordinatları: (0, 0) orijin noktasıdır. Bu şekilde orijinden geçen doğru denklemlerinin grafiklerinin çizilebilmesi için orijin noktası dışında bir noktanın daha belirlenmesine ihtiyaç vardır. Bu nedenle en basit yoldan ikinci bir noktanın belirlenebilmesi için x değişkenine 1 değeri verilir ($x = 1$) ve denklem y değişkeni için çözülür. $y = 2(1) = 2$. İkinci noktanın da belirlenmesiyle birlikte (0, 0) ve (1, 2) noktalarından geçen doğrunun grafiği çizilebilir. Şekil 2-19'a bakınız.



Şekil 2-19

(h) $y = 3$

Doğrunun y eksenini kestiği noktanın koordinatları (0, 3)'tür. Denklemde x değişkeni bulunmadığından y değişkeni asla 0'a eşit olmamaktadır. Bu nedenle doğru x eksenini kesmez. Tüm x değerleri için doğru $y = 3$ noktasından geçen, yatay eksene paralel bir doğrudur. Şekil 2-20'e bakınız.



Şekil 2-20

DOĞRU DENKLEMİNİN BELİRLENMESİ

2.14. Aşağıdaki verilen değerler yardımıyla doğruların denklemlerini bulunuz:

(a) Eğim = 7, y ekseni kesim noktası: (0, 16)

$y = mx + b$ denklem formunda $m = 7$ ve $b = 16$ değerleri yerlerine yazılır,

$$y = 7x + 16$$

(*b*) Eğim = –6, y ekseni kesim noktası: (0, 45)

$m = -6$ ve $b = 45$ değerleri yerlerine yazılır,

$$y = -6x + 45$$

(*c*) Eğim = 0.35, y ekseni kesim noktası: (0, –5.5)

$$y = 0.35x - 5.5$$

2.15. Denklem (2.3)'te gösterilen nokta-eğim formülünü kullanarak aşağıdaki doğruların denklemlerini bulunuz.

(*a*) (3, 11) noktasından geçen ve eğimi –4 olan doğru.

Nokta– eğim formülü yazılır,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$x_1 = 3, y_1 = 11$ ve $m = -4$ değerleri formülde yerine yazıldığında,

$$y - 11 = -4(x - 3)$$
$$y = -4x + 12 + 11$$
$$y = -4x + 23 \quad \text{elde edilir.}$$

(*b*) (–7, 4) noktasından geçen ve eğimi 5 olan doğrunun denklemi.

$$y - 4 = 5[(x - (-7)]$$
$$y = 5x + 35 + 4$$
$$y = 5x + 39 \quad \text{elde edilir.}$$

(*c*) (8, –2) noktasından geçen ve eğimi $\frac{1}{4}$ olan doğrunun denklemi.

$$y - (-2) = \frac{1}{4}(x - 8)$$
$$y + 2 = \frac{1}{4}x - 2$$
$$y = \frac{1}{4}x - 4 \quad \text{elde edilir.}$$

(*d*) (–5, –3) noktasından geçen ve eğimi –7 olan doğrunun denklemi.

$$y - (-3) = -7[x - (-5)]$$
$$y + 3 = -7x - 35$$
$$y = -7x - 38 \quad \text{elde edilir.}$$

2.16. (–3, 6) noktasından geçen ve $y = 5x + 8$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

Paralel doğruların eğimleri birbirlerine eşittir. Bu nedenle doğrunun eğimi 5'tir. Bu bilgilerle nokta- eğim formülü kullanıldığında,

$$y - 6 = 5[x - (-3)]$$
$$y = 5x + 15 + 6$$
$$y = 5x + 21 \quad \text{elde edilir.}$$

2.17. (6, 4) noktasından geçen ve $y = 2x + 15$ doğrusuna dik olan doğrunun denklemini bulunuz.

Dik doğruların eğimleri birbirlerinin çarpmaya göre tersinin negatifidir. Verilen doğrunun eğimi 2 olduğunda bu doğruya dik olan doğrunun eğimi $-\frac{1}{2}$ olmalıdır.

$$y - 4 = -\tfrac{1}{2}(x - 6)$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 3 + 4$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 7$$

2.18. Aşağıda geçtiği iki noktanın koordinatları verilen doğruların denklemlerini bulunuz.

(*a*) (3, 13) ve (7, 45)

Örnek 11'de anlatılan işlem ve formül kullanılır,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{45 - 13}{7 - 3} = \frac{32}{4} = 8$$

Daha sonra $m = 8$, $x_1 = 3$ ile $y_1 = 13$ nokta-eğim formülünde yerlerine yazılır,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 13 = 8(x - 3)$$

$$y = 8x - 11$$

(*b*) (2, 18) ve (5, –3)

$$m = \frac{-3 - 18}{5 - 2} = \frac{-21}{3} = -7$$

$m = 7$, $x_1 = 2$ ve $y_1 = 18$ değerleri nokta-eğim formülde yerine yazılır,

$$y - 18 = -7(x - 2)$$

$$y = -7x + 32$$

(*c*) (3, –17) ve (0, 19)

$$m = \frac{19 - (-17)}{0 - 3} = \frac{36}{-3} = -12$$

Doğrunun geçtiği (0, 19) noktası dikey eksen üzerinde olduğu için denklem kolaylıkla belirlenir.

$$y = -12x + 19$$

(*d*) (0, –2) ve (8, 0)

$$m = \frac{0 - (-2)}{8 - 0} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Doğrunun y eksenini kestiği nokta (0, –2) olduğundan,

$$y = \frac{1}{4}x - 2$$

2.19. Kısım 2.4'te verilen eğim formülünü ispatlayınız.

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Aynı doğru üzerinde verilen her iki noktanın da eğim kesişim formundaki denklemi sağlaması gerekmektedir.

$$y_1 = mx_1 + b$$

$$y_2 = mx_2 + b$$

Denklemler alt alta yazılarak taraf tarafa çıkarma işlemi uygulandığında, başka bir ifadeyle y_1'den y_2 çıkarıldığında tek bir denklem elde edilir.

$$y_1 - y_2 = mx_1 + b - mx_2 - b$$

$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$$

Denklem $(x_1 - x_2)$ ye bölünür ve terimler tekrar düzenlenir,

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

2.20. Aşağıdaki nokta-eğim formülünü doğrulayınız.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(x_1, y_1) noktasından geçen doğru üzerindeki herhangi bir (x, y) noktası için eğim m aşağıdaki denklemde belirtilmektedir.

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Denklemin her iki tarafı da $(x - x_1)$ ile çarpılıp düzenlenerek formül elde edilir.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

İKTİSAT VE İŞLETMEDE KULLANILAN DOĞRUSAL DENKLEMLER

2.21. Bir firmanın fabrika ve ekipmanlara ait sabit maliyeti 7000$ ve üretilen her bir birim mal başına düşen değişken maliyeti 600$'dır. (*a*) 15 ürün ve (*b*) 30 ürün üretildiği durumlardaki toplam maliyeti C hesaplayınız.

$$C = 600x + 7000$$

(*a*) Üretim miktarı $x = 15$ için, $C = 600(15) + 7000 = 16{,}000$

(*b*) Üretim miktarı $x = 30$ için $C = 600(30) + 7000 = 25{,}000$

2.22. Sabit maliyeti 3500$ ve üretilen her bir birim mal başına düşen değişken maliyeti 400$ olan bir firmada (*a*) 20 ürün ve (*b*) 35 ürün üretildiği durumlarda toplam maliyeti C hesaplayınız.

$$C = 400x + 3500$$

(*a*) Üretim miktarı $x = 20$ için, $C = 400(20) + 3500 = 11{,}500$

(*b*) Üretim miktarı $x = 35$ için $C = 400(35) + 3500 = 17{,}500$

2.23. Tam rekabet koşulları altında üretim yapan bir firmanın ürettiği her bir birim malın satış fiyatı 45$, sabit maliyeti 1600$ ve üretilen her bir birim mal başına düşen değişken maliyeti 25$'dır. Firmanın (*a*) 150 ürün, (*b*) 200 ürün ve (*c*) 75 ürün satması halinde kârını hesaplayınız.

$$\pi = \text{Gelir } (R) - \text{Maliyet } (C)$$

$R = 45x$ ve $C = 25x + 1600$ olarak belirtilmiştir. İlgili değişkenler denklemde yerlerine yazıldığında,

$$\pi = 45x - (25x + 1600)$$
$$\pi = 20x - 1600$$

(*a*) Üretim miktarı $x = 150$ için, $\pi = 20(150) - 1600 = 1400$

(*b*) Üretim miktarı $x = 200$ için $\pi = 20(200) - 1600 = 2400$

(*c*) Üretim miktarı $x = 75$ için, $\pi = 20(75) - 1600 = -100$ (zarar)

2.24. Tam rekabet koşulları altında üretim yapan bir firmanın ürettiği her bir birim malın satış fiyatı 85$, sabit maliyeti 950$ ve değişken maliyeti 70$'dır. Firmanın (*a*) 50 ürün ve (*b*) 80 ürün satması halinde kârını hesaplayınız.

$$\pi = R - C$$

$R = 85x$ ve $C = 70x + 950$ olarak belirtilmiştir. İlgili değişkenler denklemde yerlerine yazıldığında,

$$\pi = 85x - (70x + 950)$$
$$\pi = 15x - 950$$

(*a*) Üretim miktarı $x = 50$ için, $\pi = 15(50) - 950 = -200$ (zarar)

(*b*) Üretim miktarı $x = 80$ için $\pi = 15(80) - 950 = -250$

2.25. x yıl sonraki y değeri aşağıda verilmiş olan bir biçerdöverin (a) 6 yıl sonraki değerini ve (b) 8 yıl sonraki hurda değerini hesaplayınız.

$$y = 67{,}500 - 7750x$$

(a) $$y = 67{,}500 - 7750(6) = 21{,}000$$

(b) $$y = 67{,}500 - 7750(8) = 5500$$

2.26. Vergilendirmek amacıyla bir bilgisayarın x yıl sonraki y değeri aşağıda belirtilmiştir.

$$y = 3{,}000{,}000 - 450{,}000x$$

Bu bilgisayarın (a) 3 yıl sonraki değerini ve (b) 5 yıl sonraki hurda değerini hesaplayınız.

(a) $$y = 3{,}000{,}000 - 450{,}000(3) = 1{,}650{,}000$$

(b) $$y = 3{,}000{,}000 - 450{,}000(5) = 750{,}000$$

2.27. Bir emekli, biri %14 ve diğeri %12 faiz getirisi olan iki bonoya toplam 40,000$ yatırarak yılda 5120$ faiz geliri sağlamaktadır. Her bir bonoya ne kadar yatırım yapılmıştır?

x değişkeninin %14'lük faiz getirisi olan bonoya yatırım miktarını ve (40,000 – x)'in de %12'lik faiz getirisi olan bonoya yatırım miktarını gösterdiğini kabul edildiğinde yıllık faiz getirisi y denklemi aşağıdaki şekilde olmaktadır.

$$y = 0.14x + 0.12\,(40{,}000 - x)$$

y = 5120 olarak denklemde yerine yazıldığında,

$$5120 = 0.14x + 4800 - 0.12x$$

$$320 = 0.02x$$

$$x = 16000 \qquad \%14\text{'te}$$

%12'de 40,000 – 16,000 = 24,000$'dır.

2.28. Yatırım için 60,000 doları bulunan bir brokerın toplamda %14'lük bir getiri sağlayabilmesi için parasının ne kadarını %11'lik getiriye sahip hisse senedine ne kadarını %15'lik getiriye sahip hisse senedine yatırması gerekmektedir?

Eğer %11'lik getiriye sahip hisse senedine yatırılan miktar x olarak alınırsa, %15'lik getiriye sahip hisse senedine yatırılan miktar (60,000 – x) olacaktır. Böylelikle toplam getiri şu şekilde hesaplanabilmektedir.

$$y = 0.11x + 0.15\,(60{,}000 - x)$$

Hedeflenen getiri miktarı denklemde y = 0.14(60,000) = 8400 olarak yerine yazılır,

$$8400 = 0.11x + 9000 - 0.15x$$

$$-600 = -0.04x$$

$$x = 15{,}000 \qquad \%11\text{'den}$$

%15'lik getiri için 60,000 – 15,000 = 45,000'dir.

2.29. Bir şekerci kilogramı 45 kuruş değerinde olan şekerlerle kilogramı 85 kuruş değerinde olan şekerleri karıştırarak kilogramı 70 kuruş değerinde olacak şekilde toplamda 200 kg şeker üretmeyi hedeflemektedir. Buna göre karışımın ne kadarı 45 kuruş değerindeki şekerden, ne kadarı 85 kuruş değerindeki şekerden oluşmalıdır?

Eğer 45 kuruş değerindeki şekerin karışımda kullanılacak olan miktarı x kg olarak alınırsa, 85 kuruş değerindeki şekerin karışımda kullanılacak olan miktarı (200 – x) olacaktır. Böylelikle karışımı gösteren denklem şu şekilde oluşturulur.

$$y = 0.45x + 0.85\,(200 - x)$$

y = 0.70(200) için karışımın istenilen değeri olarak denklemde yerine yazılır,

$$0.70(200) = 0.45x + 0.85(200 - x)$$
$$140 = 0.45x + 170 - 0.85x$$
$$-30 = -0.4x$$
$$x = 75 \text{ kg } 45 \text{ TL'den}$$

45 TL değerindeki şekerin karışımda kullanılacak olan miktarı $x = 75$ kg ve 85 TL değerindeki şekerin karışımda kullanılacak olan miktarı $(200 - x) = 125$ kg olarak bulunmaktadır.

2.30. %12 alkol oranına sahip 6000 litre şarap ile %18 alkol oranına sahip kaç litre şarap karıştırılırsa, karışımın alkol oranı %16 olur?

x = %18 alkol oranına sahip şarap miktarı ve y = karışımın alkol miktarı olacak şekilde denklem kurulur.

$$y = 0.18x + 0.12(6000)$$

Sonrasında %16 alkol oranında istenilen $(6000 + x)$ litrelik karışım y değerinin yerine yazılır,

$$0.16(6000 + x) = 0.18x + 0.12(6000)$$
$$960 + 0.16x = 0.18x + 720$$
$$-0.2x = -240$$
$$x = 12{,}000 \text{ litre.}$$

2.31. *Eş maliyet doğrusu* sabit bir B bütçesi ile iki malın satın alınabilecek farklı kombinasyonlarını belirtmektedir. Maden eritme ocakları hem doğalgaz (x) ile hem de kömür (y) ile ısıtılabilmektedir. Doğalgazın birim fiyatı $P_x = 100$, kömürün birim fiyatı $P_y = 400$ ve bütçe $B = 8000$ olmak üzere (*a*) eş maliyet doğrusunu çiziniz, (*b*) B bütçe miktarı %50 arttığında, (*c*) $P_x = 100$ iki katına çıktığında, (*d*) $P_y = 400$ %37.5 azaldığında eş maliyet doğrularındaki değişimi grafik yardımıyla gösteriniz.

(*a*) $P_x = 100$, $P_y = 400$ ve $B = 8000$ iken eş maliyet doğrusunun standart formu aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

$$100x + 400y = 8000$$
$$y = -0.25x + 20$$

Eş maliyet doğrusu Şekil 2-21 (*a*)'da yer alan doğrudur.

(*b*) Maliyetlerde %50 oranında bir artış ile yeni bütçe 8000 + 0.5 (8000) = 12,000'dir. Buna göre yeni denklem aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$100x + 400y = 12{,}000$$
$$y = -0.25x + 30$$

Grafik Şekil 2-21 (*a*)'da kesikli çizgi ile gösterilmiştir.

(*c*) Doğalgaz birim fiyatı iki katına çıktığında yeni fiyat 200 olacaktır ve yeni denklem aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$200x + 400y = 8000$$
$$y = -0.5x + 20$$

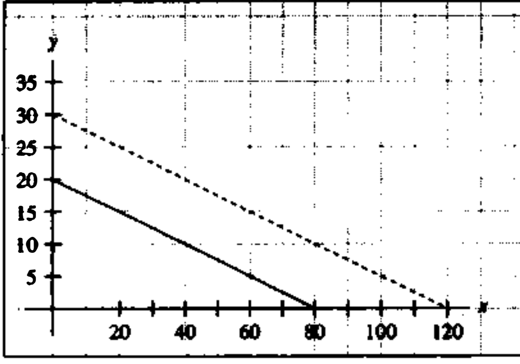
Grafik Şekil 2-21 (*b*)'de kesikli çizgi ile gösterilmiştir.

(*d*) Kömür birim fiyatı %37.5 azaldığında yeni fiyat 400 – 0.375(400) = 250 şeklinde olacaktır.

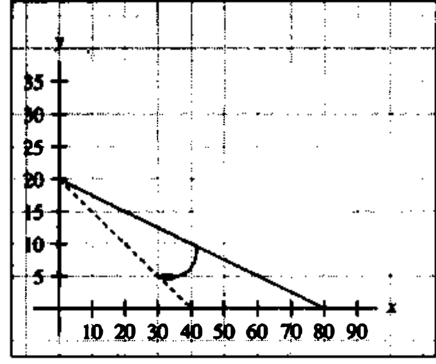
$$100x + 250y = 8000$$
$$y = -0.4x + 32$$

Grafik Şekil 2-21 (*c*)'de kesikli çizgi ile gösterilmiştir.

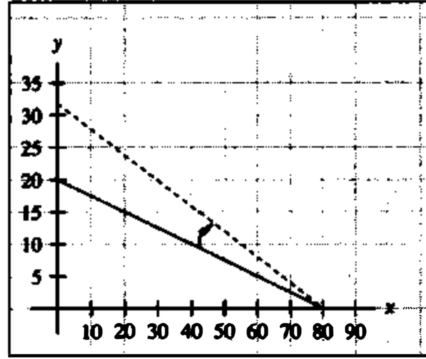
2.32. x ve y mallarının fiyatları P_x ve P_y ve bütçe B olmak üzere (*a*) eş maliyet doğrusunun denklemini eğim-kesişim formunda yazınız. (*a*)'da elde ettiğiniz bilgileri kullanarak (*b*) eğer bütçe değişirse, (*c*) eğer x malının fiyatı değişirse ve (*d*) eğer y malının fiyatı değişirse eş maliyet doğrusunda nasıl bir değişiklik gerçekleşeceğini gösteriniz.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Şekil 2-21

(*a*) Denklem standart formda yazılır ve y için çözülür.

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = B$$
$$p_y \cdot y = -(p_x \cdot x) + B$$
$$y = -\left(\frac{p_x}{p_y}\right)x + \frac{B}{p_y} \qquad (2.8)$$

Elde edilen sonuç doğrunun $y = mx + b$ şeklindeki eğim kesişim formundaki denklemdir. Burada $m = -(p_x/p_y)$ doğrunun eğimini ve $b = B/p_y$ doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatını belirtmektedir. Eş maliyet doğrusunun y eksenini kestiği noktanın koordinatı $(0, B/p_y)$ ve doğrunun x eksenini kestiği noktanın koordinatı standart formda $(-b/m, 0)$ şeklinde bulunduğundan eş maliyet doğrusunun x eksenini kestiği noktanın koordinatı $[-(B/p_y)/(-p_x/p_y), 0] = (B/p_x, 0)$ şeklinde olmaktadır.

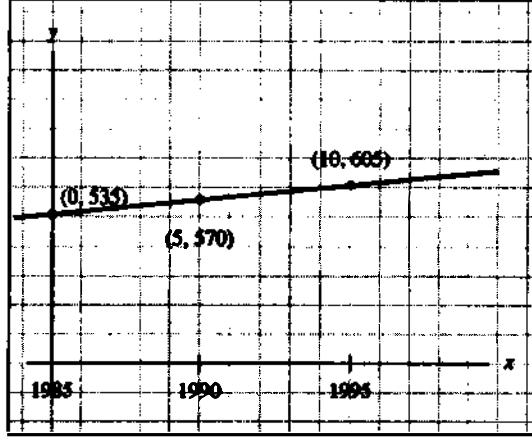
(*b*) Denklem 2.8'den bütçede gerçekleşen bir değişimin hem doğrunun x eksenini kestiği noktayı hem de y eksenini kestiği noktayı değiştireceği ancak doğrunun eğiminin değişmeyeceği açıkça görülmektedir. Bu eş maliyet doğrusunun bütçede bir artış olması halinde sağa ya da bütçede bir azalış olması halinde orijinaline paralel şekilde sola kayacağı anlamına gelmektedir.

(*c*) Eğer p_x değişirse, doğrunun eğimi $-p_x/p_y$ ve doğrunun x eksenini kestiği noktanın koordinatı $(B/p_x, 0)$ değişir fakat doğrunun y eksenini kestiği noktanın koordinatı $(0, B/p_y)$ değişmez. Eğer p_x artarsa grafik daha dik hale, eğer p_x azalırsa grafik daha yatık hale gelir. Ancak her iki durumda da doğrunun y eksenini kestiği nokta aynıdır.

(*d*) Eğer p_y değişirse, doğrunun eğimi $-p_x/p_y$ ve doğrunun y eksenini kestiği noktanın koordinatı $(0, B/p_y)$ değişir fakat doğrunun x eksenini kestiği noktanın koordinatı $(B/p_x, 0)$ değişmez. Eğer p_y azalırsa doğrunun y eksenini kestiği nokta küçülür ve doğru daha yatık bir hale gelecektir, eğer p_y artarsa doğrunun y eksenini kestiği nokta büyüyecektir ve doğru daha dik bir hale gelecektir. Ancak her iki durumda da doğrunun x eksenini kestiği nokta aynı kalır.

2.33. Bir firmanın kârı 1985 yılında 535 milyon TL'den 1990 yılında 570 milyon TL'ye sabit artış oranı ile yükselmektedir. Bu firmanın kâr artış oranının aynı şekilde devam etmesi halinde 1995 yılında beklenen kârını hesaplayınız.

1985 yılı için $x = 0$ ve 1990 yılı için $x = 5$ olarak alınarak, (0, 535) ve (5, 570) olmak üzere iki noktası belirlenir. Firmanın kâr artış oranı sabit olduğu için doğrunun eğimi sabittir ve iki nokta Şekil 2-22'de olduğu gibi düz bir çizgi ile birleştirilir.



Şekil 2-22

Sonrasında eğimi bulmak için iki noktası bilinen doğrunun formülü kullanılır.

$$m = \frac{570-535}{5-0} = \frac{35}{5} = 7$$

Doğrunun dikey ekseni kestiği (0, 535) yardımıyla doğru denklemi oluşturulabilir.

$$y = 77x + 535$$

Sonrasında 1995 yılı için $x = 10$ alınarak firmanın 1995 yılındaki kârı belirlenir.

$$y = 7(10) + 535 = 605$$

2.34. 0°C'nin 32°F'a ve 100°C'nin ise 212°F'a eşit olmak üzere farklı hesaplanan sıcaklık birimleri arasında doğrusal bir ilişki bulunmaktadır. Bu doğrusal ilişkiyi bir denklem yardımıyla gösteriniz.

Öncelikle verilen iki nokta (0, 32) ve (100, 212) Şekil-23'te gösterildiği şekilde belirlenir ve doğrunun eğimini bulmak için iki noktası bilinen doğrunun formülü kullanılır.

$$m = \frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = 1.8$$

Dikey ekseni kesen (0, 32) noktasının ve belirlenen eğimin yardımıyla doğrunun denklemi oluşturulur.

$$F = 1.8C + 32$$

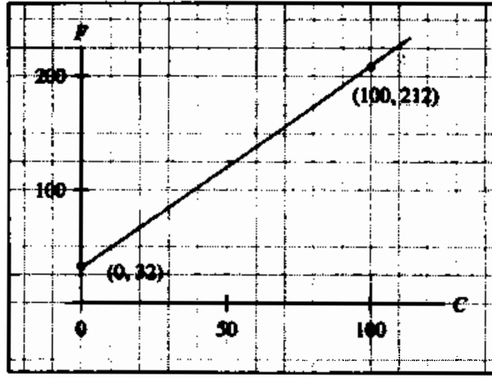
Ek Problemler

DENKLEM ÇÖZME

2.35. Eşitliğin özelliklerini kullanarak aşağıdaki doğrusal denklemleri çözünüz:

(*a*) $6x - 7 = 3x + 2$ (*b*) $60 - 8x = 3x + 5$

(*c*) $7x + 5 = 4(3x - 8) + 7$ (*d*) $3(2x + 9) = 4(5x - 21) - 1$



Şekil 2-23

2.36. Paydadan kurtularak aşağıdaki denklemleri çözünüz:

(a) $\frac{x}{3}+\frac{x}{8}=22$ (b) $\frac{x}{5}-4=\frac{x}{9}+8$

(c) $\frac{240}{x-2}=\frac{576}{x+5}$ (d) $\frac{675}{x+3}=\frac{120}{x-6}+\frac{375}{x+3}$

EĞİM

2.37. Aşağıdaki doğrusal denklemleri standart formdan eğim-kesişim formuna dönüştürünüz:

(a) $3x + 12y = 96$ (b) $12x - 16y = 240$

(c) $22x + 2y = 86$ (d) $28x - 4y = -104$

2.38. Aşağıdaki doğrusal denklemlerin eğimlerini belirleyiniz:

(a) $y = -16x + 23$ (b) $y=\frac{1}{2}x-9$ (c) $y=15.5x$

(d) $y=-\frac{1}{8}x-3$ (e) $y=19$ (f) $x=27$

2.39. Aşağıda iki noktası belirtilen doğruların eğimlerini belirleyiniz:

(a) (2, 7), (5, 19) (b) (1, 9), (3, 3) (c) (3, 56), (7, 8)

(d) (9, 19), (15, 22) (e) (–4, 0), (1, –3) (f) (–7, 0), (–1, 0)

KESİŞİM

2.40. Aşağıda standart formdaki denklemi verilen doğruların y eksenini kestiği noktaları belirleyiniz:

(a) $8x - 3y = 15$ (b) $13x+\frac{1}{2}y=4.5$ (c) $-26x + 7y = -56$

(d) $47x - 18y = -9$

2.41. Aşağıda eğim kesişim formunda verilmiş doğru denklemlerinin her biri için doğrunun y eksenini kestiği noktaların koordinatlarını belirleyiniz:

(a) $y = -6.5x - 23$ (b) $y = 108x + 14$ (c) $y = 79.5x - 250$

(d) $y = -3x + 0.65$

2.42. Aşağıda standart formda verilmiş doğru denklemlerinin her biri için doğrunun x eksenini kestiği noktaların koordinatlarını belirleyiniz:

(a) $6x - 13y = 126$ (b) $\frac{1}{4}x+17y=-8$ (c) $-5x-\frac{1}{2}y=55$

(d) $113x + 19y = -39$

2.43. Aşağıda eğim-kesişim formunda verilmiş doğru denklemlerinin her biri için doğrunun x eksenini kestiği noktaların koordinatlarını belirleyiniz.

(a) $y = 7x + 35$ (b) $y = 8x + 64$ (c) $y=\frac{2}{5}x-16$

(d) $y = -1.5x - 29$

DOĞRUNUN DENKLEMİNİN YAZILMASI

2.44. Aşağıda eğimi ve y eksenini kestiği noktanın koordinatı verilen doğruların denklemlerini belirleyiniz.

(*a*) Eğim: -13, y eksenini kestiği noktanın koordinatı (0, 22)

(*b*) Eğim: $\frac{4}{9}$, y eksenini kestiği noktanın koordinatı (0, –6)

(*c*) Eğim: $-\frac{2}{3}$, y eksenini kestiği noktanın koordinatı (0, 49)

(*d*) Eğim 23.5, y eksenini kestiği noktanın koordinatı (0, –70)

2.45. Aşağıda bir noktası ve eğimi bilinen doğruların denklemlerini belirleyiniz.

(*a*) (2, 6) noktasından geçen ve eğimi 7 olan doğrunun denklemi

(*b*) (8, –5) noktasından geçen ve eğimi 3 olan doğrunun denklemi

(*c*) (–10, 12) noktasından geçen ve eğimi $\frac{1}{2}$ olan doğrunun denklemi

(*d*) (3, –11) noktasından geçen ve eğimi –5 olan doğrunun denklemi

2.46. Aşağıda iki noktası verilen doğruların denklemlerini belirleyiniz.

(*a*) (2, 6), (5, 18)

(*b*) (–1, 10), (4, –5)

(*c*) (–6, –3), (9, 7)

(*d*) (4, –5), (10, –8)

İŞLETMECİLER VE İKTİSATÇILAR İÇİN UYGULAMALAR

2.47. 12,250 TL'ye satın alınan ve yıllık sabit 1995 TL amortisman bedeli olan bir fotokopi makinasının (*a*) 2 yıl sonraki (*b*) 4 yıl sonraki değerini hesaplayınız.

2.48. 265,000 TL'ye satın alınan ve yıllık doğrusal olarak 32,000 TL amortisman bedeli olan bir matbaa makinasının (*a*) 3 yıl sonraki (*b*) 7 yıl sonraki değerini hesaplayınız.

2.49. Bir firmanın sabit maliyeti 122,000 TL'dir ve ürettiği her bir birim başına düşen değişken maliyeti 750 TL'dir. Firmanın (*a*) 25 birim ve (*b*) 50 birim mal üretmesi durumunda toplam maliyetini hesaplayınız.

2.50. Bir firmanın sabit maliyeti 85,000 TL ve ürettiği her bir birim başına düşen değişken maliyeti 225 TL'dir. Firmanın (*a*) 10 birim (*b*) 100 birim mal üretmesi durumunda toplam maliyetini hesaplayınız.

2.51. Bir firmanın sabit maliyeti 1800 TL ve ürettiği her bir birim başına düşen değişken maliyeti 55 TL'dir, ürettiği malların satış fiyatı ise 120 TL'dir. Tam rekabet piyasasındaki bu firmanın (*a*) 75 birim (*b*) 125 birim mal satması durumunda kârını hesaplayınız.

2.52. Yatırım için 50,000 TL hesabı bulunan bir brokerın yıllık %9.5 getiri sağlayabilmesi için parasının ne kadarını %8'lik getiriye ne kadarını ise %12'lik getiriye yatırması gerektiğini hesaplayınız.

2.53. Bir tonunun fiyatı 175 TL olan toplam 32,000 ton kömür karışımı elde edebilmek için tonunun fiyatı 140 TL olan kömürden ne kadar ve tonunun fiyatı 190 TL olan kömürden ne kadar karıştırmak gerektiğini hesaplayınız.

2.54. Bir firmanın maliyetleri 1988 yılında 265 milyon TL'den 1992 yılında 279 milyon TL'ye sabit bir oranda artmıştır. Bu firmanın maliyet artış trendinin devam etmesi durumunda 1996 yılındaki maliyetini hesaplayınız.

2.55. Bir firmanın satış miktarı 1989 yılında 905 milyon TL'den 1992 yılında 887.74 milyon TL'ye doğrusal olarak azalmıştır. Bu firmanın satış miktarındaki azalış trendinin devam etmesi durumunda 1995 yılındaki satış miktarını hesaplayınız.

Ek Problemlerin Cevapları

2.35. (*a*) $x = 3$ (*b*) $x = 5$ (*c*) $x = 6$ (*d*) $x = 8$

2.36. (*a*) $x = 48$ (*b*) $x = 135$ (*c*) $x = 7$ (*d*) $x = 12$

2.37. (*a*) $y = -\frac{1}{4}x + 8$ (*b*) $y = \frac{3}{4}x - 15$ (*c*) $y = -11x + 43$ (*d*) $y = 7x + 26$

2.38. (*a*) -16 (*b*) $\frac{1}{2}$ (*c*) 15.5 (*d*) $-\frac{1}{8}$ (*e*) 0 (*f*) Tanımsız

2.39. (*a*) 4 (*b*) -3 (*c*) -12 (*d*) $\frac{1}{2}$ (*e*) $-\frac{3}{5}$ (*f*) 0

2.40. (*a*) $(0, -5)$ (*b*) $(0, 9)$ (*c*) $(0, -8)$ (*d*) $(0, \frac{1}{2})$

2.41. (*a*) $(0, -23)$ (*b*) $(0, 14)$ (*c*) $(0, -250)$ (*d*) $(0, 0.65)$

2.42. (*a*) $(21, 0)$ (*b*) $(-32, 0)$ (*c*) $(-11, 0)$ (*d*) $(3, 0)$

2.43. (*a*) $(-5, 0)$ (*b*) $(8, 0)$ (*c*) $(40, 0)$ (*d*) $(-6, 0)$

2.44. (*a*) $y = -13x + 22$ (*b*) $y = \frac{4}{9}x - 6$ (*c*) $y = -\frac{2}{3}x + 49$ (*d*) $y = 23.5x - 70$

2.45. (*a*) $y = 7x - 8$ (*b*) $y = 3x - 29$ (*c*) $y = \frac{1}{2}x + 17$ (*d*) $y = -5x + 4$

2.46. (*a*) $y = 4x - 2$ (*b*) $y = -3x + 7$ (*c*) $y = \frac{2}{3}x + 1$ (*d*) $y = -\frac{1}{2}x - 3$

2.47. (*a*) 8260 TL (*b*) 4270 TL

2.48. (*a*) 169,000 TL (*b*) 41,000 TL

2.49. (*a*) 140,750 TL (*b*) 159,500 TL

2.50. (*a*) 87,250 TL (*b*) 107,500 TL

2.51. (*a*) 3075 TL (*b*) 6325 TL

2.52. %8'e 31,250 TL ve %12'ye 18,750 TL

2.53. Tonu 190 TL olan kömürden 22,400 ton, tonu 140 TL olan kömürden 9600 ton.

2.54. 293 milyon TL

2.55. 870.5 milyon TL

Bölüm 3

FONKSİYONLAR

3.1 KAVRAMLAR VE TANIMLAR

Fonksiyon, bağımsız değişken olarak olarak da adlandırılan (x) değişkeninin her bir değerine, fonksiyonun değeri denen, bir ve yalnızca bir [$f(x)$] *değeri atayan bir kuraldır.* Fonksiyon $y = f(x)$ şeklinde yazılır; y, x'in bir fonksiyonudur şeklinde okunur. Bir fonksiyonun *tanım kümesi* fonksiyonun tüm olası x değerleridir, *değer kümesi* ise tüm olası $f(x)$ değerleridir.

Fonksiyonlar genellikle Örnek 1'de olduğu gibi matematiksel formüllerle gösterilirler. Fonksiyonlar yazılırken g ve h gibi başka harfler de kullanılabilmektedir. Eğer birden fazla fonksyion varsa, birbirinden ayırt etmek için farklı harfler kullanılmalıdır. Sıklıkla karşılaşılan fonksiyonlar aşağıda listelenmiştir.

Sabit Fonksiyon: $f(x) = a_0$

Doğrusal Fonksiyon: $f(x) = a_1x + a_0$

İkinci Dereceden Fonksiyon: $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad (a_2 \neq 0)$

Üçüncü Dereceden Fonksiyon: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad (a_3 \neq 0)$

n. Dereceden Polinom Fonksyion: $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$

(n = negatif olmayan tam sayı; $a_n \neq 0$))

Sabit, doğrusal, ikinci dereceden ve üçüncü dereceden fonksiyonların sırasıyla $n = 0, 1, 2, 3$ değerleri alan polinom fonksiyon olduklarına dikkat ediniz.

Rasyonel fonksiyon $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$

$g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de polinom fonksiyondur ve $h(x) \neq 0$'dır. Rasyonel fonksiyon isminin, fonksiyonların birbirlerine *oranları* ifadesinden türetildiğine dikkat ediniz.

Üslü fonksiyon: $f(x) = ax^n \qquad$ (n = Reel sayı)

ÖRNEK 1. $f(x) = 7x - 6$ fonksiyonu bir sayının öncelikle 7 ile çarpıldığı sonrasında sonuçtan 6 çıkarıldığı bir kuraldır. Eğer fonksiyonda x için değer verilirse bu değer fonksiyonda yerine yazılır ve $f(x)$ için denklem çözümlenir.

Örnek olarak;

$x = 3$ için, $\qquad f(3) = 7(3) - 6 = 15$

$x = 4$ için, $\qquad f(4) = 7(4) - 6 = 22$

Problem 3.1'den 3.4'e kadar bakınız.

ÖRNEK 2. Aşağıda farklı fonksiyon türleri için örnekler verilmiştir.

Sabit: $f(x)=14$, $g(x)=-9$

Doğrusal: $f(x)=5x-3$, $g(x)=-8x$, $h(x)=22$

İkinci Dereceden: $f(x)=3x^2+8x-7$, $g(x)=x^2-4x$, $h(x)=6x^2$

Üçüncü Dereceden: $f(x)=4x^3-2x^2+9x+5$, $g(x)=7x^3+4$, $h(x)=2x^3$

Polinom: $h(x)=2x^3$, $g(x)=2x^5-x^3+7$

Rasyonel: $f(x)=\dfrac{x-9}{x^2-4}(x\neq\pm2)$, $g(x)=\dfrac{5x}{x-3}(x\neq 3)$, $(x\neq 3)$

Üslü: $f(x)=4x^5$, $g(x)=4^{2/3}$, $h(x)=9x^{-2}$, $(x\neq 0)$

Sabit, doğrusal, ikinci dereceden, üçüncü dereceden fonksiyonları da kapsayan polinom fonksiyonların tanım kümesi tüm reel sayılardır. Ancak rasyonel ve üstel fonksiyonlarda paydanın sıfır olması gibi fonksiyonun değerini tanımsız yapacak olan değerler tanım kümesinden çıkarılır.

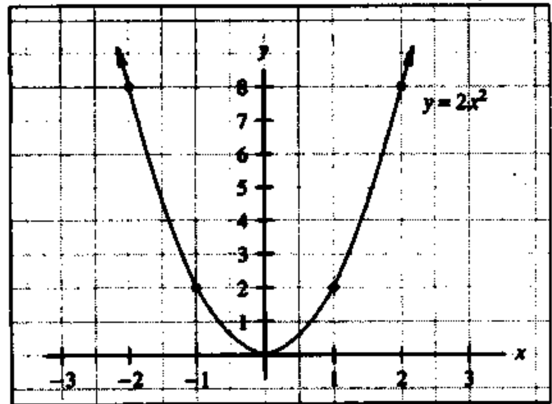
3.2 FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİNİN ÇİZİLMESİ

Doğrusal bir fonksiyonun grafiği düz bir çizgi şeklindedir. $x = c$ şeklinde dikey eksene paralel bir doğruyu gösteren denklemler haricindeki tüm doğrusal denklemler aynı zamanda bir fonksiyondur [Problem 3.4 (*f*) bakınız]. Grafik çizimlerinde bağımlı değişken olarak y değeri $f(x)$'i temsil eder ve dikey eksende yer alır. Doğrusal grafikler İkinci Bölüm konusudur.

Kartezyen koordinat sisteminde doğrusal olmayan bir fonksiyonun grafiği fonksiyonu sağlayan sıralı sayı ikilileri belirlenerek çizilir. Sıralı ikililer farklı x değerleri seçilip her bir x değerine karşılık gelen y değeri hesaplanarak bulunur. Her bir sıralı ikili grafik üzerindeki bir noktayı temsil eder. Bu noktaların bir eğri yardımıyla birleştirilmesiyle fonksiyonun grafiği tamamlanır. İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği Örnek 3'te ve rasyonel bir fonksiyonun grafiği Örnek 4'te gösterilmiştir.

ÖRNEK 3. Doğrusal olmayan bir fonksiyonun grafik çiziminde, tanım kümesinden x için birkaç değer seçilir; y değerleri için çözümleme yapılır. Bu şekilde (x, y) sıralı ikilileri belirlenir. Bu noktalar düzgün bir eğri yardımıyla birleştirilir. Aşağıda Şekil 3-1'de $y = 2x^2$ şeklindeki ikinci dereceden bir fonksiyon için grafiğin elde edilişi gösterilmiştir.

x	$f(x) = 2x^2 = y$	Noktalar
-2	$f(-2) = 2(-2)^2 = 8$	$(-2, 8)$
-1	$f(-1) = 2(-1)^2 = 2$	$(-1, 2)$
0	$f(0) = 2(0)^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = 2(1)^2 = 2$	$(1, 2)$
2	$f(2) = 2(2)^2 = 8$	$(2, 8)$

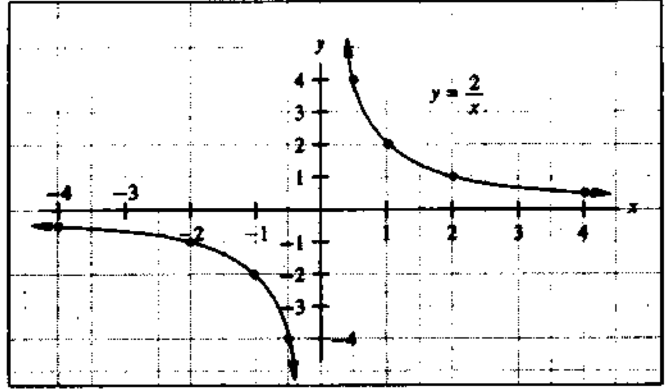


Şekil 3-1

İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği *parabol*dür. Bir parabolün grafiği *simetri ekseni* olarak isimlendirilen doğruya göre simetriktir. Parabol ile simetri ekseninin kesişim noktası *tepe noktası* olarak adlandırılır. Tepe noktası bu şekildeki fonksiyonların alabilecekleri en büyük ya da en küçük değerleri belirtir. Şekil 3-1'de simetri ekseni y eksenidir ve tepe noktası (0, 0) noktasıdır. Problem 3.18 ve 3.22'ye bakınız.

ÖRNEK 4. Örnek 3'teki grafik çizme aşamaları $y = 2/x$ $(x \neq 0)$ şeklindeki rasyonel fonksiyonun grafiğinin çizildiği Şekil 3-2'de tekrar edilmiştir.

x	$f(x) = 2/x = y$	Noktalar
-4	$f(-4) = 2/-4 = -\frac{1}{2}$	$(-4, -\frac{1}{2})$
-2	$f(-2) = 2/-2 = -1$	$(-2, -1)$
-1	$f(-1) = 2/-1 = -2$	$(-1, -2)$
$-\frac{1}{2}$	$f(-\frac{1}{2}) = 2/-\frac{1}{2} = -4$	$(-\frac{1}{2}, -4)$
$\frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = 2/\frac{1}{2} = 4$	$(\frac{1}{2}, 4)$
1	$f(1) = 2/1 = 2$	$(1, 2)$
2	$f(2) = 2/2 = 1$	$(2, 1)$
4	$f(4) = 2/4 = \frac{1}{2}$	$(4, \frac{1}{2})$



Şekil 3-2

$y = 2/x$ rasyonel fonksiyonunun grafiği koordinat düzleminin çapraz ters olan iki bölgesinde çizilir. $x \to 0$, iken grafik y eksenine yaklaşmaktadır. Bu nedenle y ekseni *dikey asimptot* olarak adlandırılmaktadır. $x \to \infty$, iken grafik x eksenine yaklaşmaktadır. Bu nedenle x ekseni *yatay asimptot* olarak adlandırılmaktadır. Problem 3.19 ve 3.23'e bakınız.

3.3 FONKSİYONLARDA İŞLEMLER

İki ya da daha fazla fonksiyon yeni bir fonksiyon elde etmek amacıyla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri yardımıyla bir araya getirilebilir. Her ikisinin de tanım kümesinde x olan f ve g olmak üzere iki fonksiyon verilsin:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \qquad [g(x) \neq 0]$$

Fonksiyonlar aynı zamanda bir fonksiyonun diğer bir fonksiyonun içine yazılmasıyla da birleştirilebilir. $y = f(x)$ şeklindeki bir fonksiyonun tüm y değerleri başka bir fonksiyonun tanım kümesini oluşturduğunda $z = g(y)$ şeklinde yeni bir fonksiyon elde edilir. $z = g[f(x)]$ şeklinde de gösterilen bu işlem *fonksiyonlarda bileşke* olarak adlandırılır ve z fonksiyonu *bileşke fonksiyondur.* Örnek 5 ile Örnek 6'ya ve Problem 3.5'ten 3.17'ye kadar bakınız.

ÖRNEK 5. $f(x) = 3x + 8$ ve $g(x) = 5x - 4$ şeklindeki fonksiyonlar için dört işlem aşağıda gösterilmiştir.

$$(f + g)(x) = (3x + 8) + (5x - 4) = 8x + 4$$

$$(f - g)(x) = (3x + 8) - (5x - 4) = -2x + 12$$

$$(f \cdot g)(x) = (3x + 8)(5x - 4) = 15x^2 + 28x - 32$$

$$(f \div g)(x) = \frac{3x+8}{5x-4}, \quad (x \neq 0.8)$$

ÖRNEK 6. $z = g(y) = y^2 + 3y - 8$ ve $y = f(x) = x + 2$ olmak üzere, $g[f(x)]$ bileşik fonksiyonu $g(y)$ de y gördüğümüz yere $f(x)$'in yazılmasıyla bulunur.

$$g(y) = y^2 + 3y - 8$$

$$g[f(x)] = [f(x)]^2 + 3[f(x)] - 8$$

$$= (x + 2)^2 + 3(x + 2) - 8$$

$$= (x^2 + 4x + 4) + (3x + 6) - 8$$

$$= x^2 + 7x + 2$$

Aycıca Problem 3.7 ve Problem 3.30'dan 3.32'ye kadar bakınız.

3.4 İŞLETMECİLER VE İKTİSATÇILAR İÇİN DOĞRUSAL FONKSYİON UYGULAMALARI

Doğrusal fonksiyonlar işletme ve iktisatta sıklıkla yeni fonksiyonlar elde edilerek kullanılmaktadır. $f(x)$, $g(x)$ ya da $h(x)$ şeklindeki fonksiyonların yerine örneğin $C(x)$ şeklindeki maliyet fonksiyonu, $R(x)$ şeklindeki gelir fonksiyonu ve $\pi(x)$ şeklindeki kâr fonksiyonu sıklıkla kullanılmaktadır. Tam rekabet piyasası altında işleyen bir firma için marjinal gelir ya da ürün fiyatının sabit 60 TL olduğu, firmanın sabit maliyetinin 450 TL olduğu ve değişken maliyetinin 35 TL olduğu varsayımı altında, firmanın sattığı her bir ürün x ile gösterilirse firmanın toplam gelir R ve toplam maliyet C fonksiyonları aşağıdaki şekilde oluşturulmaktadır.

$$R(x) = 60x$$

$$C(x) = 35(x) + 450$$

Fonksiyonlar aynı zamanda sıklıkla fonksiyonlarda işlem kuralları yardımıyla birleştirilmektedir. Örneğin yukarıda verilen firma için kâr fonksiyonu toplam gelir fonksiyonundan toplam maliyet fonksiyonu çıkarılarak kolaylıkla elde edilir.

$$\pi(x) = R(x) - C(x)$$

$$\pi(x) = 60x - [35(x) + 450]$$

$$\pi(x) = 25(x) - 450$$

ÖRNEK 7. Kısım 3.4'te verilen firma için (x) üretim miktarı 70 ve 90 iken sırasıyla, $R = 60x$, $C = 35x + 450$ ve $\pi = 25x - 450$ olduğu varsayımında toplam gelir R, toplam maliyet C ve toplam kâr π fonksiyonları aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$x = 70$ iken,

$$R(70) = 60(70) = 4200$$

$$C(70) = 35(70) + 450 = 2900$$

$$\pi(70) = 25(70) - 450 = 1300$$

$x = 90$ iken,

$$R(90) = 60(90) = 5400$$

$$C(90) = 35(90) + 450 = 3600$$

$$\pi(70) = 25(90) - 450 = 1800$$

Problem 3.8'den 3.17'ye kadar bakınız.

3.5 İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

$y = 0$ verilerek $y = ax^2 + bx + c$ şeklindeki ikinci dereceden bir fonksiyon a, b ve c sabit ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ şeklinde ikinci dereceden bir denklem olarak ifade edilebilir. Bu şekildeki ikinci dereceden denklemler Örnek 8'de gösterildiği gibi çarpanlarına ayrılarak veya formül yardımıyla çözülmektedir.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ÖRNEK 8. $5x^2 + 47x + 18 = 0$ şeklinde verilen ikinci dereceden denklemin çözümü (a) çarpanlarına ayırarak (b) formül yardımıyla aşağıda gösterildiği şekilde çözülür.

(a) Problem 1.11 (a)'da gösterildiği şekilde denklem çarpanlarına ayrılır.

$$5x^2 + 47x + 18 = (5x + 2)(x + 9) = 0$$

$(5x + 2)(x + 9)$ çarpımının 0'a eşit olabilmesi için $5x + 2 = 0$ veya $x + 9 = 0$ olmalıdır. Her bir çarpan sırayla sıfıra eşitlenerek x için çözülür,

$$5x + 2 = 0 \qquad x + 9 = 0$$
$$x = -0.4 \qquad x = -9$$

(b) İkinci dereceden denklem çözüm formülü kullanılarak değerler elde edilebilir. Burada $a = 5$, $b = 47$ ve $c = 18$ değerleri formülde kullanılır.

$$x = \frac{-47 \pm \sqrt{(47)^2 - 4(5)(18)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{-47 \pm \sqrt{2209 - 360}}{10} = \frac{-47 \pm \sqrt{1849}}{10}$$

Kısım 1.7.7'de gösterildiği şekilde bir hesap makinası yardımıyla değerler elde edilir.

$$x = \frac{-47 \pm 43}{10}$$

Sonrasında paya 43 eklenip ve çıkarılarak her iki x değeri de elde edilir.

$$x = \frac{-47 + 43}{10} \qquad x = \frac{-47 - 43}{10}$$

$$x = -\frac{4}{10} = -0.4 \qquad x = -\frac{90}{10} = -9$$

Problem 3.20 ve 3.21'e bakınız.

3.6 DOĞRUSAL OLMAYAN FONKSİYONLARIN GRAFİĞİNİN ÇİZİLMESİ

$y = ax^2 + bx + c$ şeklindeki ikinci dereceden bir fonksiyonun grafiğinin çizilmesi üç temel kural yardımıyla kolaylaşmaktadır.

1. Eğer $a < 0$ ise parabolün kolları aşağı yönlüdür, eğer $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı yönlüdür.
2. Problem 10.27'de ispatlandığı şekilde tepe noktasının koordinatları (x, y) şeklindeki sıralı ikiliden oluşur ve burada x değeri $x = -b/2a$ formülü ile ve y değeri $y = (4ac - b^2)/4a$ formülü ile hesaplanır.
3. Grafiğin x eksenini kestiği noktalar fonksiyonun sıfıra eşitlenip ikinci dereceden denklem çözüm formülü kullanılmasıyla ya da çarpanlarına ayrılmasıyla Örnek 9'da ve Problem 3.22'de gösterildiği şekilde bulunabilmektedir.

Rasyonel fonksiyonların grafiğinin çizilmesi asimptotların belirlenmesiyle kolaylaşmaktadır. Dikey asimptot $x = k$ doğrusudur. k değeri tüm sadeleştirmelerin tamamlanmasının ardından paydanın x'e göre çözülmesiyle elde edilir.

Paydayı 0'a eşitleyen x değeri grafiğin *dikey asimptotudur.* Yatay asimptot ise $y = m$ doğrusudur. m değerinin bulunması için öncelikle denklem x için çözülür. Sonrasında payda y için sıfıra eşitlenir. Örnek 11 ve Problem 3.23'e bakınız.

ÖRNEK 9. Kısım 3.6'da verilen kurallar yardımıyla $y = -x^2 + 6x + 7$ ikinci dereceden fonksiyonunun grafiğini çiziniz. $a = -1$, $b = 6$ ve $c = 7$ olduğuna dikkat ediniz.

1. $a = -1 < 0$ olduğu için parabolün kolları aşağıya doğrudur.

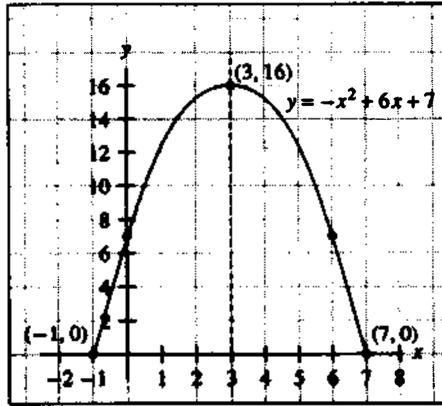
2.
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} \qquad y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(7) - 6^2}{4(-1)}$$
$$x = 3 \qquad y = \frac{-28 - 36}{-4} = 16$$

Tepe noktasının koordinatları (3, 16)'dır.

3. $y = 0$ verilerek denklem çarpanlarına ayrılır.

$$-x^2 + 6x + 7 = 0$$
$$(-x - 1)(x - 7) = 0$$
$$-x - 1 = 0 \qquad x - 7 = 0$$
$$x = -1 \qquad x = 7$$

Grafiğin x eksenini kestiği noktaların koordinatları (–1, 0) ve (7, 0)'dır. Şekil 3-3'e ve Problem 3.22'ye bakınız.



Şekil 3-3

3.7 İŞLETMECİLER VE İKTİSATÇILAR İÇİN DOĞRUSAL OLMAYAN FONKSİYONLARIN UYGULAMALARI

İşletme ve iktisatta karşılaşılan pek çok problemin basit doğrusal fonksiyonlar ile analiz imkanı bulunmamaktadır. Farklı tiplerde fonksiyonlara ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin monopolcü rekabet piyasalarında gelir ve kâr fonksiyonları genellikle ikinci dereceden fonksiyonlarla ifade edilirken fayda-maliyet analizinde genellikle rasyonel fonksiyonlar kullanılır. Örnek 10 ile Örnek 11 ve Problem 3.24'ten 3.29'a kadar bakınız.

ÖRNEK 10. Bir ayakkabı firmasının satılan her bir birim x ürününden elde ettiği kârı π aşağıdaki kâr fonksiyonu ile gösterilmiştir.

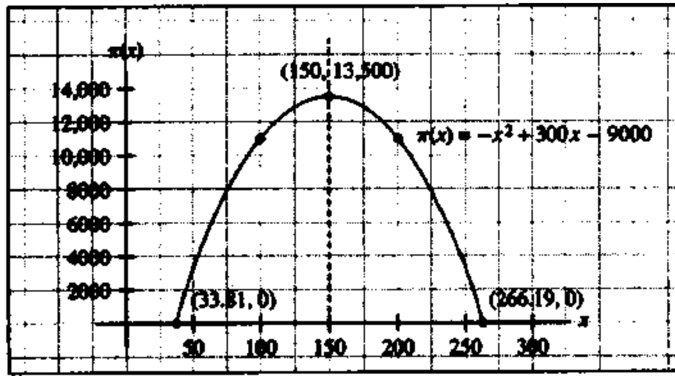
$$\pi(x) = -x^2 + 300x - 9000$$

x^2 teriminin katsayısı negatif olduğu için parabolün kolları aşağı doğrudur. Tepe noktasının koordinatları $[-b/2a, (4ac - b^2)/4a]$ formülü ile elde edilen sıralı ikilidir. Fonksiyonda $a = -1$, $b = 300$ ve $c = -9000$ olduğuna göre tepe noktası aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(300)}{2(-1)} \qquad \pi = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-9000) - (300)^2}{4(-1)}$$

$$x = 150 \qquad \pi = \frac{36,000 - 90,000}{-4} = \frac{-54,000}{-4} = 13,500$$

Böylelikle tepe noktasının koordinatları, Şekil 3-4'te gösterildiği şekilde, (150, 13,500) olarak bulunmaktadır. Bu nokta 150 birim ürün satıldığında kârın 13,500 TL'de maksimum kâr seviyesine ulaştığını göstermektedir. Grafiğin x eksenini kestiği noktaların koordinatlarının bulunabilmesi için $\pi = 0$ değeri verilir ve çarpanlarına ayrılır veya ikinci dereceden denklemin köklerini bulma formülü yardımıyla $\pi = 0$ için $x = 33.81$ ve $x = 266.19$ olarak kökler bulunur. Böylece grafiğin x eksenini kestiği noktalar (33.81, 0) ve (226.19, 0)'dır. Şekil 3-4 ve Problem 3.25 ve 3.26'ya bakınız.



Şekil 3-4

ÖRNEK 11. Bir bakır eritme fabrikasının bacasından salınan sülfür dioksit gazı salınım miktarını %x oranında azaltabilmenin bin TL türünden maliyet fonksiyonu C aşağıda verilmiştir.

$$C(x) = \frac{15x}{105 - x} \qquad (0 \leq x \leq 100)$$

Fonksiyonu sağlayan sıralı ikililer tespit edilerek grafik çizildiğinde, zararlı gaz salınım oranının azaltılmasının birim maliyetinin sürekli attığı görülmektedir. Burada tanım kümesi sınırlı olmasına rağmen rasyonel fonksiyonlarda dikey asimptot tüm sadeleştirmelerden sonra payda sıfıra eşitlenip x için çözümlenerek her zaman bulunabilir. Payda $105 - x = 0$ ise $x = 105$'tir. Böylece dikey asimptot $x = 105$'tir. Şekil 3-5 ve Problem 3.27'ye bakınız.

Çözümlü Problemler

FONKSİYONLAR

3.1. Verilen x değerleri için aşağıdaki fonksiyonları hesaplayınız.

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ (1) $x = 5$ için ve (2) $x = -4$ için

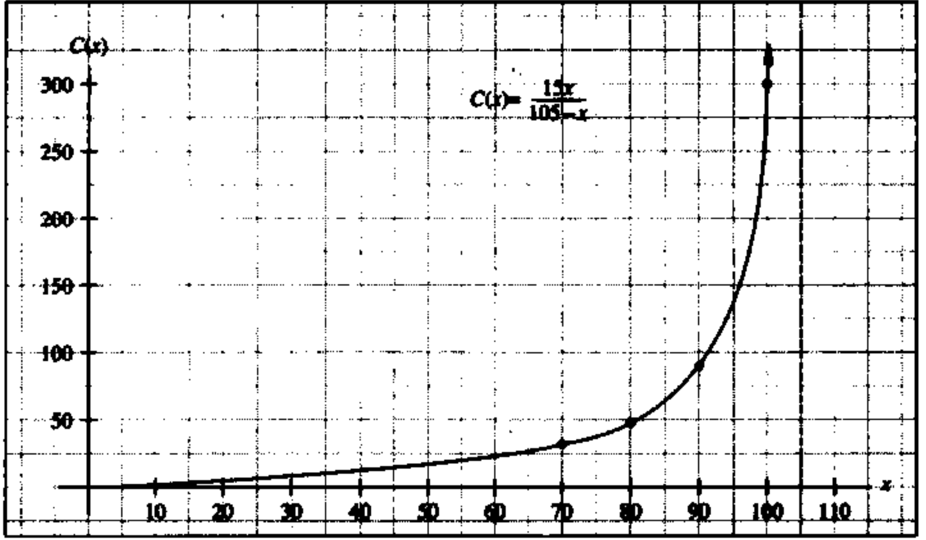
(1) Fonksiyondaki tüm x değişkenlerinin yerine 5 yazılır,

$$f(5) = (5)^2 - 4(5) + 7 = 12$$

(2) Fonksiyondaki tüm x değişkenlerinin yerine −4 yazılır,

$$f(-4) = (-4)^2 - 4(-4) + 7 = 39$$

x	C
70	30
80	48
90	90
100	300



Şekil 3-5

(*b*) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 11$ (1) $x = 3$ için ve (2) $x = -2$ için

(1) $f(3) = 2(3)^3 - 5(3)^2 + 8(3) - 11 = 22$

(2) $f(-2) = 2(-2)^3 - 5(-2)^2 + 8(-2) - 11 = -63$

(*c*) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 8x + 18}{x - 4}$ (1) $x = 6$ için ve (2) $x = -2$ için

(1) $f(6) = \dfrac{3(6)^2 - 8(6) + 18}{(6) - 4} = \dfrac{78}{2} = 39$

(2) $f(-2) = \dfrac{3(-2)^2 - 8(-2) + 18}{(-2) - 4} = \dfrac{46}{-6} = -7\dfrac{2}{3}$

3.2. Parametreler ve başka ifadeler de bağımsız değişken olarak fonksiyonlarda kullanılabilmektedir. Aşağıdaki fonksiyonların verilen x değerleri için sonuçlarını en sade halleriyle yazınız.

(*a*) $f(x) = 2x^2 + 5x + 9$ (1) $x = a$ için ve (2) $x = a - 3$ için

(1) $f(a) = 2a^2 + 5(a) + 9$
$= 2a^2 + 5a + 9$

(2) $f(a - 3) = 2(a - 3)^2 + 5(a - 3) + 9$
$= 2(a - 3)(a - 3) + 5(a - 3) + 9$
$= 2a^2 - 7a + 12$

(*b*) $f(x) = x^2 + 7x + 4$ (1) $x = 3a$ için ve (2) $x = a + 5$ için

(1) $f(3a) = (3a)^2 + 7(3a) + 4$
$= 9a^2 + 21a + 4$

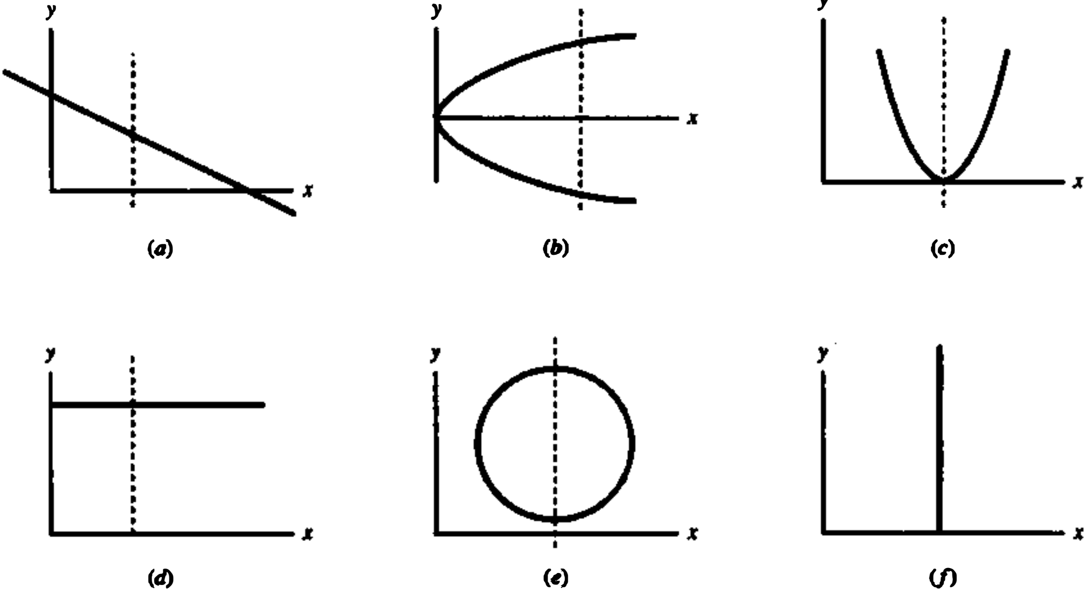
(2) $f(a + 5) = (a + 5)^2 + 7(a + 5) + 4$
$= (a + 5)(a + 5) + 7(a + 5) + 4$
$a^2 + 17a + 64$

(*c*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 13}{x + 4}$ (1) $x = a$ için ve (2) $x = a - 2$ için

(1) $f(a) = \dfrac{a^2 - 13}{a + 4}$

(2) $f(a-2)=\dfrac{(a-2)^2-13}{(a-2)+4}=\dfrac{a^2-4a-9}{a+2}$

3.3. Şekil 3-6'daki grafiklerde, fonksiyonlarda ortak olarak bağımlı değişken $f(x)$ yerine y yazılmaktadır. Buna göre hangilerinin fonksiyon grafiği olduğunu ve hangilerinin fonksiyon grafiği olmadığını belirtiniz.



Şekil 3-6

Fonksiyonların tanımından herhangi bir x değerine karşılık bir ve yalnızca bir y değerinin bulunması gerektiği bilinmektedir. Bu nedenle eğer tanım kümesindeki herhangi bir x değeri için dikey bir doğru çizildiğinde grafiği birden fazla noktada kesiyorsa, grafik fonksiyon grafiği değildir. Uygulanan bu kriter *dikey doğru testi* olarak bilinir. Grafikler incelendiğinde (a), (c) ve (d) grafiklerinin fonksiyon grafiği olduğu, (b), (e) ve (f) grafiklerinin ise fonksiyon grafiği olmadığı görülmektedir.

3.4. Aşağıdaki eşitliklerden hangileri fonksiyondur açıklayınız.

(a) $y=-3x+8$

$y=-3x+8$ denklemi bir fonksiyondur. Çünkü her bir x bağımsız değişkeni için bir ve yalnızca bir tane y bağımlı değişkeni bulunmaktadır. Örneğin eğer $x = 1$ alınırsa $y = -3(1) + 8$ olmaktadır. Grafik Şekil 3-6 (a)'ya benzer şekildedir.

(b) $y^2=x$

$y=\pm\sqrt{x}$ denklemine denk olan $y^2 = x$ denklemi bir fonksiyon değildir. Çünkü her bir pozitif x değeri için iki farklı y değeri bulunmaktadır. Örneğin eğer $y^2 = 4$ ise $y = \pm 2$ olmaktadır. Bir x değerine iki farklı y değeri karşılık gelmektedir. Denklemin grafiği Şekil 3-6 (b)'ye benzer şekildedir, simetri ekseni x eksenine paralel olan bir parabol şeklindedir.

(c) $y=x^2$

$y=x^2$ denklemi bir fonksiyondur. Her bir x değişkeni için yalnızca bir y değeri bulunmaktadır. Örneğin, $x=-6$ iken $y=36$ değerini almaktadır. Aynı şekilde $x=6$ iken de $y=36$ değerini almaktadır. Fonksiyonun tanımı her bir x değişkeninin bir ve yalnızca bir y değerine karşılık geleceği şeklindedir; her bir y değerinin yalnızca bir x değişkenine karşılık geleceği şeklinde değil. Fonksiyonun grafiği Şekil 3-6 (c)'de olduğu şekilde, kolları yukarı veya aşağıya baktığı dikkate alınmadan simetri ekseni dikey eksene paralel olan bir parabol şeklindedir.

(*d*) $y = 6$

$y = 6$ denklemi bir fonksiyondur. Her bir x değişkenine karşılık bir ve yalnızca bir y değeri gelmektedir. Fonksiyonun grafiği Şekil 3-6 (*d*)'de olduğu şekildedir.

(*e*) $x^2 + y^2 = 81$

$x^2 + y^2 = 81$ denklemi bir fonksiyon değildir. Eğer $x = 0$ alınırsa $y^2 = 81$ ve $y = \pm 9$ olmaktadır. Grafik Şekil 3-6 (*e*)'ye benzer şekilde, bir çember şeklinde olacaktır. Çember dikey doğru testini geçemez.

(*f*) $x = 8$

$x = 8$ denklemi bir fonksiyon değildir. $x = 8$ grafiği dikey bir doğrudur. Bu $x = 8$ değerine karşılık sonsuz tane y değerinin geldiğini göstermektedir. Denklemin grafiği Şekil 3-6 (*f*)'de olduğu şekildedir.

FONKSİYONLARDA İŞLEMLER

3.5. Fonksiyonlarda işlem kurallarını kullanarak aşağıda belirtilen fonksiyonlarda (1) $(f + g)(x)$, (2) $(f - g)(x)$, (3) $(f \cdot g)(x)$ ve (4) $(f \div g)(x)$ işlemlerini yapınız.

(*a*) $f(x) = 4x - 5,\ g(x) = 7x - 3$

(1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (4x - 5) + (7x - 3) = 11x - 8$

(2) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (4x - 5) - (7x - 3) = -3x - 2$

(3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (4x - 5) \cdot (7x - 3) = 28x^2 - 47x + 15$

(4) $(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) = \dfrac{4x - 5}{7x - 3} \quad \left(x \neq \dfrac{3}{7}\right)$

(*b*) $f(x) = x^2 + 3,\ g(x) = 4x - 7$

(1) $(f + g)(x) = (x^2 + 3) + (4x - 7) = x^2 + 4x - 4$

(2) $(f - g)(x) = (x^2 + 3) - (4x - 7) = x^2 - 4x + 10$

(3) $(f \cdot g)(x) = (x^2 + 3) \cdot (4x - 7) = 4x^3 - 7x^2 + 12x - 21$

(4) $(f \div g)(x) = \dfrac{x^2 + 3}{4x - 7} \quad \left(x \neq \dfrac{7}{4}\right)$

(*c*) $f(x) = \dfrac{3}{x},\ g(x) = \dfrac{4}{x + 5} \quad (x \neq 0, -5)$

(1) $(f + g)(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x + 5} = \dfrac{3(x + 5) + 4x}{x(x + 5)} = \dfrac{7x + 15}{x^2 + 5x}$

(2) $(f - g)(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x + 5} = \dfrac{3(x + 5) - 4x}{x(x + 5)} = \dfrac{15 - x}{x^2 + 5x}$

(3) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{3}{x} \cdot \dfrac{4}{x + 5} = \dfrac{12}{x(x + 5)} = \dfrac{12}{x^2 + 5x}$

(4) $(f \div g)(x) = \dfrac{3}{x} \div \dfrac{4}{x + 5} = \dfrac{3}{x} \cdot \dfrac{x + 5}{4} = \dfrac{3x + 15}{4x}$

3.6. Aşağıda verilen fonksiyonları kullanılarak istenilen işlemleri gerçekleştiriniz.

$$f(x) = \frac{3x}{x + 5} \qquad g(x) = \frac{x - 4}{x + 1} \qquad h(x) = \frac{x + 6}{x - 2} \qquad (x \neq -5, -1, 2)$$

(*a*) $(f + h)(a)$

$$(f + h)(a) = f(a) + h(a)$$

Fonksiyonlarda x görülen yere a yazılır,

$$(f+h)(a)=\frac{3a}{a+5}+\frac{a+6}{a-2}=\frac{3a(a-2)+(a+6)(a+5)}{(a+5)(a-2)}$$
$$=\frac{(3a^2-6a)+(a^2+11a+30)}{a^2+3a-10}=\frac{4a^2+5a+30}{a^2+3a-10}$$

(*b*) $(g\cdot h)(t)$

$$(g\cdot h)(t)=g(t)\cdot h(t)=\frac{(t-4)}{(t+1)}\cdot\frac{(t+6)}{(t-2)}=\frac{t^2+2t-24}{t^2-t-2}$$

(*c*) $(h-f)(x+1)$

$$(h-f)(x+1)=h(x+1)-f(x+1)$$

Fonksiyonda x görülen her yere $x+1$ yazılır,

$$(h-f)(x+1)=\frac{(x+1)+6}{(x+1)-2}-\frac{3(x+1)}{(x+1)+5}\qquad(x\neq 1,-6)$$
$$=\frac{x+7}{x-1}-\frac{3x+3}{x+6}=\frac{(x+7)(x+6)-(3x+3)(x-1)}{(x-1)(x+6)}$$
$$=\frac{(x^2+13x+42)-(3x^2-3)}{x^2+5x-6}=\frac{-2x^2+13x+45}{x^2+5x-6}$$

(*d*) $(g\div h)(t-3)$

$$(g\div h)(t-3)=g(t-3)\div h(t-3)$$

Fonksiyonlarda x görülen yere t – 3 yazılır ve h ters çevrilerek çarpılır,

$$(g\div h)(t-3)=\frac{(t-3)-4}{(t-3)+1}\cdot\frac{(t-3)-2}{(t-3)+6}\qquad(t\neq 2,-3,5)$$
$$=\frac{t-7}{t-2}\cdot\frac{t-5}{t+3}=\frac{t^2-12t+35}{t^2+t-6}$$

3.7. $f(x)=x^4$, $g(x)=x^2-3x+4$ ve $h(x)=\frac{x}{x-5}$ $(x\neq 5)$ olmak üzere aşağıdaki bileşik fonksiyonları Örnek 6'daki gibi bulunuz.

(*a*) $g[f(x)]$

$g(x)$ fonksiyonunda x görülen yere $f(x)$ yazılır,

$$g[f(x)]=(x^4)^2-3(x^4)+4=x^8-3x^4+4$$

(*b*) $f[h(x)]$

$f(x)$ fonksiyonunda x görülen yere $h(x)$ yazılır,

$$f[h(x)]=\left(\frac{x}{x-5}\right)^4$$

(*c*) $h[f(x)]$

$$h[f(x)]=\frac{x^4}{x^4-5}\qquad(x\neq\pm\sqrt[4]{5})$$

(*d*) $h[g(x)]$

$$h[g(x)]=\frac{(x^2-3x+4)}{(x^2-3x+4)-5}=\frac{x^2-3x+4}{x^2-3x-1}\qquad(x^2-3x-1\neq 0)$$

İŞLETME VE İKTİSATTA DOĞRUSAL FONKSİYONLAR

3.8. Bir tesisatçı eve geliş servis ücreti olarak 50 TL ve yapacağı işe ayırdığı saat başına 35 TL saatlik ücret almaktadır. Tesisatçının işe harcadığı saati x alarak C maliyetini fonksiyon olarak belirtiniz.

$$C(x) = 35x + 50$$

3.9. Bir ses sanatçısı 9000 TL'ye ek olarak satılan her bir albüm başına 2.75 TL ücret almaktadır. Sanatçının gelir fonksiyonunu R satılan albüm sayısının x bir fonksiyonu olacak şekilde belirtiniz.

$$R(x) = 2.75x + 9000$$

3.10. Bir elma bahçesinde giriş ücreti olarak 3.25 TL ve toplanan elmalar için kg başına 60 krş ücret alınmaktadır. Maliyet fonksiyonunu C toplanan elmanın x kg değerinin bir fonksiyonu olacak şekilde belirtiniz.

$$C(x) = 0.60x + 3.25$$

3.11. Bir fuarda sergi açan bir çömlekçi satılan her bir çömlek için 24 TL ücret almaktadır ve 85 TL fuarda sergi açış ücreti ödemektedir. Bu çömlekçinin gelir R fonksiyonunu satılan çömlek sayısının x bir fonksiyonu olacak şekilde belirtiniz.

$$R(x) = 24x - 85$$

3.12. Bir ofis makinesinin değeri 12,000 TL'dir ve yıllık 1500 TL değer kaybına uğramaktadır. Makinenin değer V fonksiyonunu geçen yıl sayısının t bir fonksiyonu olacak şekilde belirtiniz.

$$V(t) = 12{,}000 - 1500t$$

3.13. Tam rekabet piyasası koşulları altındaki bir çiftçi buğdayın çuvalını 35 TL'ye satmaktadır. (*a*) Çiftçinin gelir fonksiyonunu R sattığı çuval adedinin x bir fonksiyonu olacak şekilde belirtiniz, (*b*) $x = 10{,}000$ olması halinde ve (*c*) $x = 25{,}000$ olması halinde çiftçinin gelirini hesaplayınız.

(*a*) $R(x) = 35x$

(*b*) $R(10{,}000) = 35(10{,}000) = 350{,}000$

(*c*) $R(25{,}000) = 35(25{,}000) = 875{,}000$

3.14. Problem 3.13'te bahsedilen çiftçinin 425,000 TL sabit maliyeti ve bir çuval buğday başına düşen 15 TL değişken maliyeti bulunmaktadır. (*a*) Çiftçinin maliyet fonksiyonunu C sattığı çuval adedinin x bir fonksiyonu olacak şekilde belirtiniz, (*b*) $x = 5000$ olması halinde ve (*c*) $x = 20{,}000$ olması halinde çiftçinin maliyetlerini hesaplayınız.

(*a*) $C(x) = 15x + 425{,}000$

(*b*) $C(5000) = 15(5000) + 425{,}000 = 500{,}000$

(*c*) $C(20{,}000) = 15(20{,}000) + 425{,}000 = 725{,}000$

3.15. (*a*) Aynı çiftçinin kâr fonksiyonunu π sattığı buğday çuvalının x bir fonksiyonu olarak ifade etmek için fonksiyonlarda işlem kurallarını kullanınız ve fonksiyonu (*b*) $x = 20{,}000$ ve (*c*) $x = 30{,}000$ için hesaplayınız.

(*a*) $\pi(x) = R(x) - C(x)$

$\pi(x) = 35(x) - [15(x) + 425{,}000]$

$\pi(x) = 20(x) - 425{,}000$

(*b*) $\pi(20{,}000) = 20(20{,}000) - 425{,}000 = -25{,}000$

(*c*) $\pi(30{,}000) = 20(30{,}000) - 425{,}000 = 175{,}000$

3.16. Bir firmanın sabit maliyeti 8250 TL'dir ve üretilen her bir birim başına düşen marjinal maliyeti 450 TL'dir. (*a*) Firmanın maliyet fonksiyonunu *C*'yi üretilen her bir *x* birim malının fonksiyonu olacak şekilde belirtiniz, (*b*) $x = 20$ ve (*c*) $x = 50$ için hesaplayınız.

(*a*) $C(x) = 450x + 8250$

(*b*) $C(20) = 450(20) + 8250 = 17{,}250$

(*c*) $C(50) = 450(50) + 8250 = 30{,}750$

3.17. Problem 3.16'daki firmanın sattığı ürün başına 800 TL ücret aldığı varsayıldığında (*a*) firmanın kâr fonksiyonunu π'yi satılan her bir *x* birim malının fonksiyonu olacak şekilde belirtiniz, (*b*) $x = 25$ ve (*c*) $x = 40$ için hesaplayınız.

(*a*) Toplam gelir fonksiyonu *R*, $R(x) = 800x$ olan firmanın kâr fonksiyonu;

$\pi(x) = R(x) - C(x)$
$\pi(x) = 800(x) - [450(x) + 8250] = 350x - 8250$

(*b*) $\pi(25) = 350(25) - 8250 = 500$

(*c*) $\pi(40) = 350(40) - 8250 = 7570$

Fonksiyon olarak yazılabilecek önceki uygulamalar için Problem 2.21'den 2.34'e kadar olan sorulara bakınız.

DOĞRUSAL OLMAYAN FONKSİYONLARIN GRAFİĞİNİN ÇİZİLMESİ

3.18. Aşağıdaki ikinci dereceden fonksiyonların grafiklerini çiziniz, tepe noktalarını ve simetri eksenlerini belirleyiniz.

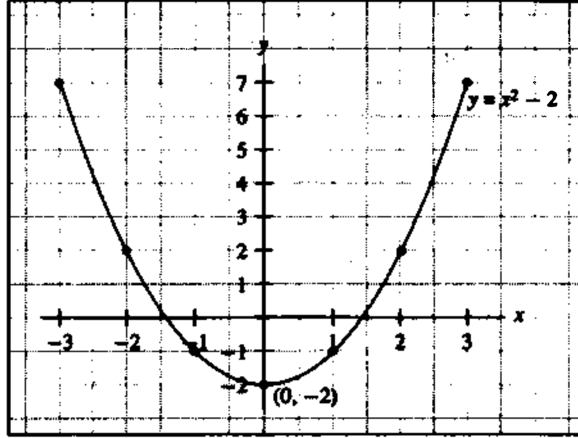
(*a*) $f(x) = x^2 - 2$

Öncelikle birkaç *x* değeri seçilir ve fonksiyon bu değerlere göre çözülür. $f(x)$ fonksiyonunu temsilen *y* değeri kullanılır. Bulunan sıralı ikililer çizilir ve bulunan bu noktalar bir eğri yardımıyla birleştirilir. Noktalar birbirlerine ne kadar yakın olurlarsa grafik o kadar doğru olur. Şekil 3-7'ye bakınız.

x	$f(x) = x^2 - 2$	$= y$
−3	$f(-3) = (-3)^2 - 2$	= 7
−2	$f(-2) = (-2)^2 - 2$	= 2
−1	$f(-1) = (-1)^2 - 2$	= −1
0	$f(0) = (0)^2 - 2$	= −2
1	$f(1) = (1)^2 - 2$	= −1
2	$f(2) = (2)^2 - 2$	= 2
3	$f(3) = (3)^2 - 2$	= 7

Tepe noktası: (0, −2)

Simetri ekseni: $x = 0$, Parabolün simetri ekseni aynı zamanda *y* eksenidir.



Şekil 3-7

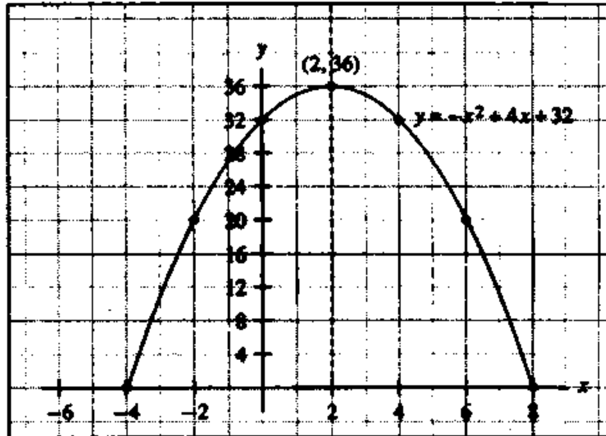
(*b*) $f(x) = -x^2 + 4x + 32$

x	$f(x)$	$= -x^2$	$+ 4x$	$+ 32$	$= y$
−4	$f(-4)$	$= -(-4)^2$	$+ 4(-4)$	$+ 32$	$= 0$
−2	$f(-2)$	$= -(-2)^2$	$+ 4(-2)$	$+ 32$	$= 20$
0	$f(0)$	$= -(0)^2$	$+ 4(0)$	$+ 32$	$= 32$
2	$f(2)$	$= -(2)^2$	$+ 4(2)$	$+ 32$	$= 36$
4	$f(4)$	$= -(4)^2$	$+ 4(4)$	$+ 32$	$= 32$
6	$f(6)$	$= -(6)^2$	$+ 4(6)$	$+ 32$	$= 20$
8	$f(8)$	$= -(8)^2$	$+ 4(8)$	$+ 32$	$= 0$

Tepe noktası: (2, 36)

Simetri ekseni: $x = 2$

Şekil 3-8'e bakınız.



Şekil 3-8

$x = 2$ simetri ekseni etrafındaki simetriye dikkat edin. $x = 2 \pm 2$ değerlerinin her ikisi için de $y = 32$ değerini almaktadır, $x = 2 \pm 4$ değerlerinin her ikisi için de $y = 20$ değerini almaktadır, $x = 2 \pm 6$ değerlerinin her ikisi için de $y = 0$ değerini almaktadır.

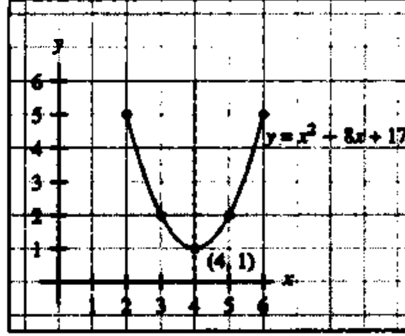
(*c*) $f(x) = -x^2 - 8x + 17$

x	$f(x)$	$=$	x^2	$-\ 8x$	$+\ 17$	$= y$
2	$f(2)$	$=$	$(2)^2$	$-\ 8(2)$	$+\ 17$	$= 5$
3	$f(3)$	$=$	$(3)^2$	$-\ 8(3)$	$+\ 17$	$= 2$
4	$f(4)$	$=$	$(4)^2$	$-\ 8(4)$	$+\ 17$	$= 1$
5	$f(5)$	$=$	$(5)^2$	$-\ 8(5)$	$+\ 17$	$= 2$
6	$f(6)$	$=$	$(6)^2$	$-\ 8(6)$	$+\ 17$	$= 5$

Tepe noktası: (4, 1)

Simetri ekseni: $x = 4$

Şekil 3-9'u inceleyiniz.



Şekil 3-9

$x = 4$ simetri eksenine dikkat edin. $x = 4 \pm 1$ değerleri için $y = 2$, $x = 4 \pm 2$ için de $y = 5$ değerini almaktadır.

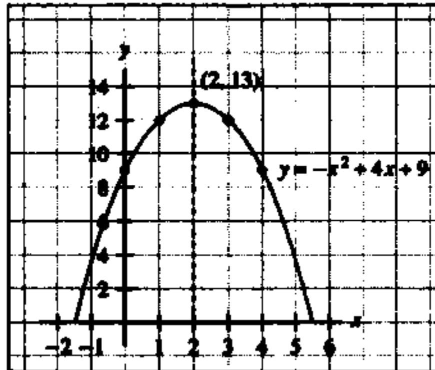
(*d*) $f(x) = -x^2 + 4x + 9$

x	$f(x)$	$=$	$-x^2$	$+\ 4x$	$+\ 9$	$= y$
0	$f(0)$	$=$	$-(0)^2$	$+\ 4(0)$	$+\ 9$	$= 9$
1	$f(1)$	$=$	$-(1)^2$	$+\ 4(1)$	$+\ 9$	$= 12$
2	$f(2)$	$=$	$-(2)^2$	$+\ 4(2)$	$+\ 9$	$= 13$
3	$f(3)$	$=$	$-(3)^2$	$+\ 4(3)$	$+\ 9$	$= 12$
4	$f(4)$	$=$	$-(4)^2$	$+\ 4(4)$	$+\ 9$	$= 9$

Tepe noktası: (2, 13)

Simetri ekseni: $x = 2$

Şekil 3-10'u inceleyiniz



Şekil 3-10

3.19. Aşağıdaki rasyonel fonksiyonlarda birkaç nokta belirleyerek grafikleri basitçe çiziniz.

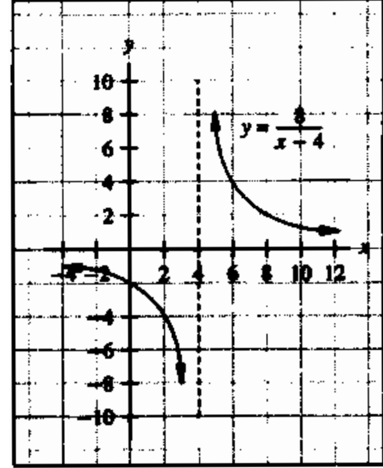
(*a*) $y = \dfrac{8}{x-4}$

x	y
−4	−1
0	−2
2	−4
3	−8
- - -	- - -
5	8
6	4
8	2
12	1

Dikey asimptot: $x = 4$

Yatay asimptot $y = 0$

Şekil 3-11'e bakınız.



Şekil 3-11

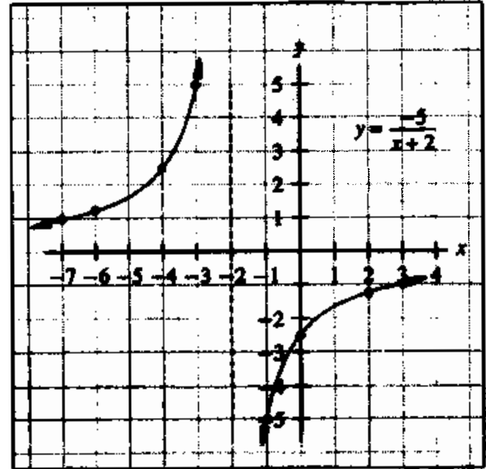
(*b*) $y = \dfrac{-5}{x+2}$

x	y
−7	1
−6	1.25
−4	2.5
−3	5
- - -	- - -
−1	−5
0	−2.5
2	−1.25
3	−1

Dikey asimptot: $x = -2$

Yatay asimptot $y = 0$

Şekil 3-12'ye bakınız.



Şekil 3-12

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

3.20. Aşağıdaki ikinci dereceden denklemleri çarpanlarına ayırarak çözünüz.

(*a*) $x^2 + 10x + 21 = 0$

Problem 1.6 (*a*)'dan,

$$x^2 + 10x + 21 = (x + 3)(x + 7)$$

$(x + 3)(x + 7)$ çarpımı 0'a eşit olduğu için $x + 3 = 0$ ya da $x + 7 = 0$ olmalıdır. Her iki denklem de sıfıra eşitlenerek x için çözülür,

$$x + 3 = 0 \qquad x + 7 = 0$$
$$x = -3 \qquad x = -7$$

(*b*) $x^2 - 13x + 30 = 0$

Problem 1.7 (*a*)'dan,

$$x^2 - 13x + 30 = (x - 3)(x - 10) = 0$$
$$x - 3 = 0 \qquad x - 10 = 0$$
$$x = 3 \qquad x = 10$$

(*c*) $x^2 + 19x - 42 = 0$

Problem 1.8 (*a*)'dan,

$$x^2 + 19x - 42 = (x - 2)(x + 21) = 0$$
$$x - 2 = 0 \qquad x + 21 = 0$$
$$x = 2 \qquad x = -21$$

(*d*) $x^2 - 8x - 48 = 0$

Problem 1.9 (*a*)'dan,

$$x^2 - 8x - 48 = (x + 4)(x - 12) = 0$$
$$x + 4 = 0 \qquad x - 12 = 0$$
$$x = -4 \qquad x = 12$$

(*e*) $3x^2 + 22x + 24 = 0$

Problem 1.11 (*b*)'den,

$$3x^2 + 22x + 24 = (3x + 4)(x + 6)$$
$$3x + 4 = 0 \qquad x + 6 = 0$$
$$x = -\tfrac{4}{3} \qquad x = -6$$

3.21. Aşağıdaki ikinci dereceden denklemleri ikinci dereceden denklem çözümü formülü kullanarak çözünüz.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.1}$$

(*a*) $3x^2 - 35x + 22 = 0$

Formülde $a = 3$, $b = -35$ ve $c = 22$ değerlerini yerine yazılır,

$$x = \frac{-(-35) \pm \sqrt{(-35)^2 - 4(3)(22)}}{2(3)}$$

Kısım 1.7.6 ve 1.7.7'de açıklandığı gibi hesap makinası yardımıyla sonuçlar hesaplanır.

$$x = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 264}}{6} = \frac{35 \pm \sqrt{961}}{6} = \frac{35 \pm 31}{6}$$

Paya 31 eklenir ve çıkartılır,

$$x = \frac{35+31}{6} = 11 \qquad x = \frac{35-31}{6} = \frac{2}{3}$$

(*b*) $7x^2 - 32x + 16 = 0$

$$x = \frac{-(-32) \pm \sqrt{(-32)^2 - 4(7)(16)}}{2(7)}$$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 448}}{14} = \frac{32 \pm \sqrt{576}}{14} = \frac{32 \pm 24}{14}$$

$$x = \frac{32+24}{14} = 4 \qquad x = \frac{32-24}{14} = \frac{4}{7}$$

(*c*) $5x^2 + 7x - 52 = 0$

$$x = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(5)(-52)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 1040}}{10} = \frac{-7 \pm \sqrt{1089}}{10} = \frac{-7 \pm 33}{10}$$

$$x = \frac{-7+33}{10} = 2.6 \qquad x = \frac{-7-33}{10} = -4$$

(*d*) $3x^2 - 13x - 56 = 0$

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(3)(-56)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 672}}{6} = \frac{13 \pm \sqrt{841}}{6} = \frac{13 \pm 29}{6}$$

$$x = \frac{13+29}{6} = 7 \qquad x = \frac{13-29}{6} = -2\frac{2}{3}$$

(*a*)'dan (*d*)'ye kadar olan sorularda çarpanlarına ayırarak nasıl aynı sonuçların elde edilebileceğini görebilmek için Problem 1.11 (*c*)'den (*f*)'ye kadar olan soruların çözümlerine bakınız.

DOĞRUSAL OLMAYAN GRAFİKLERİN ÇİZİMİ

3.22. Kısım 3.6'da $y = ax^2 + bx + c$ şeklindeki ikinci dereceden fonksiyonların grafiklerini çizmek için belirtilen üç aşamalı kuralları kullanarak aşağıdaki ikinci dereceden fonksiyonların grafiklerini basitçe çiziniz.

(*a*) $y = -x^2 + 10x - 16$

(1) $a = -1$, $b = 10$ ve $c = -16$'dır. $a < 0$ olduğu için parabolün kolları aşağı doğrudur.

(2) $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(10)}{2(-1)} \qquad y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-16) - (10)^2}{4(-1)}$

$x = 5 \qquad y = \frac{64 - 100}{-4} = \frac{-36}{-4} = 9$

Tepe noktasının koordinatları: (5, 9)

(3) Parabolün yatay ekseni kestiği x koordinatlarının bulunabilmesi için fonksiyon sıfıra eşitlenir.

$$-x^2 + 10x - 16 = 0$$

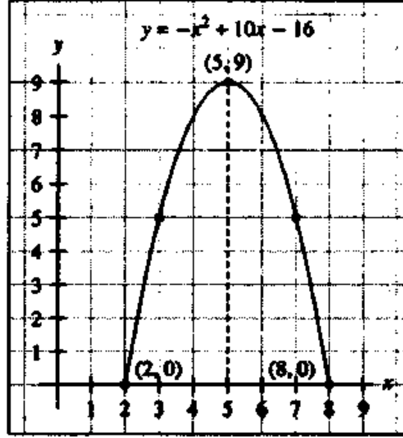
Çarpanlarına ayırmadan önce eşitliğin her iki tarafı da –1 'e bölünür.

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x-2)(x-8) = 0$$

$$x = 2 \qquad x = 8$$

Yatay ekseni kestiği noktalar: (2, 0) ve (8, 0) noktalarıdır. Şekil 3-13 'e bakınız.



Şekil 3-13

(*b*) $y = x^2 - 8x + 18$

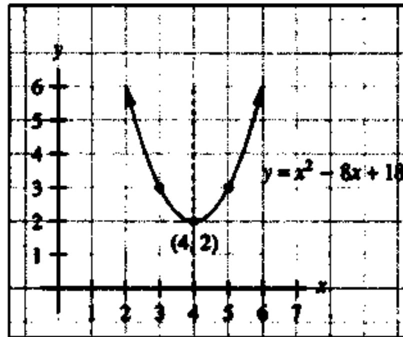
(1) $a > 0$ olduğu için parabolün kolları yukarıya doğru bakmaktadır.

(2) $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-8)}{2(1)}$ $\qquad y = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{4(1)(18) - (-8)^2}{4(1)}$

$x = 4$ $\qquad y = \dfrac{72 - 64}{4} = 2$

Tepe noktasının koordinatları: (4, 2)

(3) Tepe noktasının koordinatları (4, 2) olduğu ve parabolün kolları yukarıya doğru baktığı için, parabolün yatay ekseni kestiği nokta bulunmamaktadır. Şekil 3-14'e bakınız.



Şekil 3-14

(*c*) $y = -2x^2 + 10x - 8$

(1) $a = -2 < 0$ olduğu için parabolün kolları aşağıya doğrudur.

(2) $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(10)}{2(-2)}$ $y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(-8) - (10)^2}{4(-2)}$

$x = 2.5$ $y = \frac{64 - 100}{-8} = \frac{-36}{-8} = 4.5$

Tepe noktasının koordinatları: (2.5, 4.5)

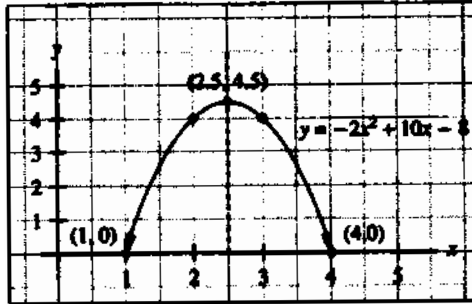
(3) $-2x^2 + 10x - 8 = 0$

Öncelikle eşitliğin her iki tarafı –2'ye bölünür, sonrasında çarpanlarına ayrılır.

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0 \qquad (x = 1, x = 4)$$

Parabolün x eksenini kestiği noktanın koordinatları (1, 0) ve (4, 0)'dır. Şekil 3-15'e bakınız.



Şekil 3-15

(*d*) $y = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 21$

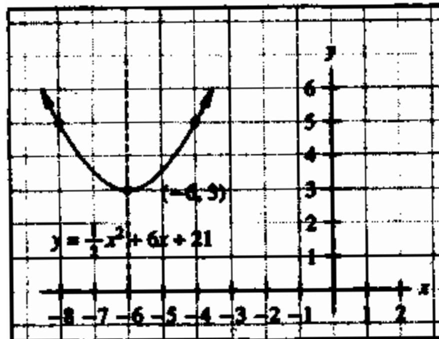
(1) $a = \frac{1}{2} > 0$ olduğu için parabolün kolları yukarıya doğrudur.

(2) $x = \frac{-(6)}{2(1/2)}$ $y = \frac{4(1/2)(21) - (6)^2}{4(1/2)}$

$x = -6$ $y = \frac{42 - 36}{2} = 3$

Tepe noktasının koordinatları: (–6, 3)

(3) Parabol x eksenini kesmemektedir. Şekil 3-16'ya bakınız.



Şekil 3-16

(*e*) $y = -x^2 + 8x - 7$

(1) Parabolün kolları aşağıya doğrudur.

(2) $x = \dfrac{-(8)}{2(-1)} = 4 \qquad y = \dfrac{4(-1)(-7) - (8)^2}{4(-1)} = 9$

Tepe noktasının koordinatları: (4, 9)

(3) $-x^2 + 8x - 7 = 0$

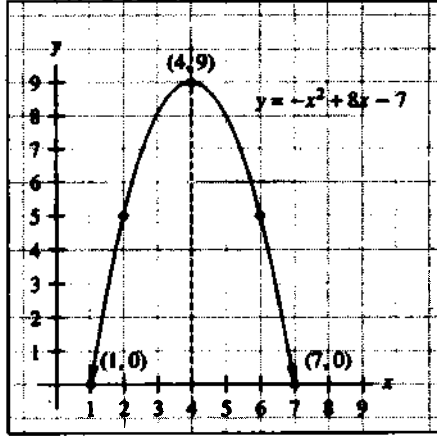
Denklemin her iki tarafı –1'e bölünür ve çarpanlara ayrılır.

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x - 1)(x - 7) = 0 \qquad (x = 1, x = 7)$$

x eksenini kestiği noktaların koordinatları: (1, 0), (7, 0)

Şekil 3-17'ye bakınız.



Şekil 3-17

(*f*) $y = x^2 + 8x + 12$

(1) Parabolün kolları yukarıya doğru bakmaktadır.

(2) $x = \dfrac{-(8)}{2(1)} = -4 \qquad y = \dfrac{4(1)(12) - (8)^2}{4(1)} = -4$

Tepe noktasının koordinatları: (–4, –4)

(3) $x^2 + 8x + 12 = 0$

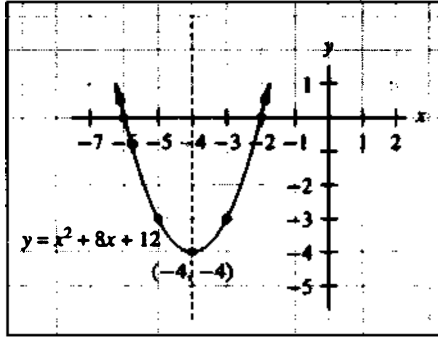
$$(x + 2)(x + 6) = 0$$

$$x = -2 \qquad x = -6$$

x ekseni kesim noktaları: (–2, 0), (–6, 0)

Şekil 3-18'e bakınız

3.23. Aşağıdaki rasyonel fonksiyonların grafiklerini (1) dikey asimptotlarını, (2) yatay asimptotlarını ve (3) fonksiyonu sağlayan birkaç değer belirleyerek, Kısım 3.6'da gösterildiği şekilde kabaca çiziniz.



Şekil 3-18

(*a*) $y = \dfrac{-4}{x+6}$

(1) Payda 0'a eşitlenerek x için çözülür ve dikey asimptot bulunur.

$x + 6 = 0 \qquad x = -6 \qquad$ dikey asimptot

(2) Fonksiyon x için çözülerek yatay asimptot bulunur.

$$y = \frac{-4}{x+6}$$

$$y(x+6) = -4$$

$$yx = -6y - 4$$

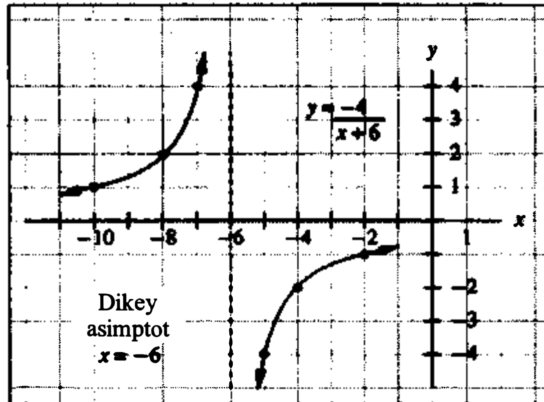
$$x = \frac{(6y+4)}{y}$$

Sonrasında elde edilen fonksiyonun paydası sıfıra eşitlenerek y için çözülür ve yatay asimptot bulunur.

$y = 0$ yatay asimptot.

(3) Fonksiyonu sağlayan noktalar seçilir ve grafik Şekil 3-19'da olduğu şekilde çizilir.

x	y
−10	1
−8	2
−7	4
- - -	- - -
−5	−4
−4	−2
−2	−1



Şekil 3-19

(*b*) $y = \dfrac{-3}{x-5}$

(1) $x - 5 = 0$

$x = 5$ dikey asimptot.

(2) $y(x-5) = -3$

$yx = -3 + 5y$

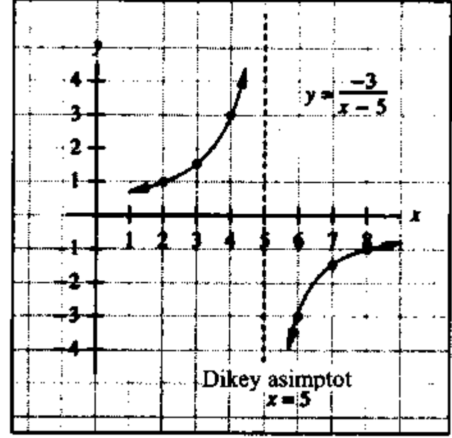
$$x = \frac{-3+5y}{y}$$

$y = 0$ yatay asimptot.

(3)

x	y
8	−1
7	−1.5
6	−3
- - -	- - -
4	3
3	1.5
2	1

Şekil 3-20'yi inceleyiniz



Şekil 3-20

(*c*) $y = \dfrac{2x+3}{x-4}$

(1) Dikey asimptot: $x = 4$

(2) Denklemin her iki tarafı da $(x - 4)$ ile çarpılır ve yatay asimptotun bulunabilmesi için x için çözülür.

$$y(x-4) = 2x + 3$$

$$yx - 4y = 2x + 3$$

$$yx - 2x = 4y + 3$$

$$x(y-2) = 4y + 3$$

$$x = \frac{4y+3}{y-2}$$

Daha sonra elde edilen kesrin paydası sıfıra eşitlenerek y için çözülür,

$y - 2 = 0$ $\quad\quad$ $y = 2$ yatay asimptot

(3). Basamak için bir sonraki sayfanın başını inceleyiniz

(*d*) $y = \dfrac{3x+5}{4x-9}$

(1) $4x - 9 = 0$

$4x = 9$

$x = 2.25$

dikey asimptot

(2) $y(4x-9) = 3x + 5$

$4xy - 9y = 3x + 5$

$4xy - 3x = 9y + 5$

$x(4y-3) = 9y + 5$

$$x = \frac{9y+5}{4y-3}$$

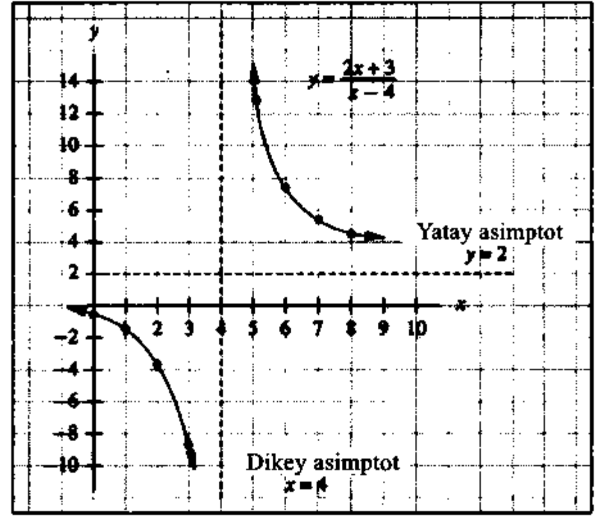
Yeni elde edilen kesrin paydası 0'a eşitlenir ve y için çözülür,

$$y = \frac{3}{4} \text{ yatay asimptot}$$

(3)

x	y
0	−0.75
1	−1.67
2	−3.5
3	−9.0
---	----
5	13.0
6	7.5
7	5.67
8	4.75

Şekil 3-21'i inceleyiniz

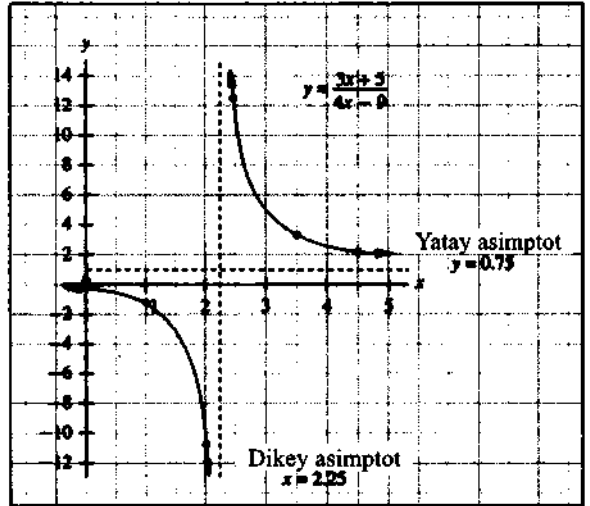


Şekil 3-21

(3)

x	y
0	− 0.56
1.0	− 1.6
2.0	−11.0
---	-----
2.5	12.5
3.5	3.1
4.5	2.06

Şekil 3-22'yi inceleyiniz



Şekil 3-22

İŞLETME VE İKTİSATTA DOĞRUSAL OLMAYAN FONKSİYONLAR

3.24. Aşağıdaki doğrusal talep fonksiyonuna sahip üreticiler için toplam gelir fonksiyonunu R bulunuz.

(a) $Q = -8P + 425$ (b) $Q = -\frac{1}{2}P + 235$

(a) Tanıma göre toplam gelir fiyat ve miktarın aşağıda gösterildiği şekilde çarpımına eşittir.

$$R = P \cdot Q$$

Yukarıda verilen Q fonksiyonu yerine yazıldığında,

$$R = P(-8P + 425)$$

$$R = -8P^2 + 425P$$

(*b*)

$$R = P(-\frac{1}{2}P + 235)$$

$$R = -\frac{1}{2}P^2 + 235P$$

Doğrusal talep fonksiyonundan elde edilen toplam gelir fonksiyonunun her zaman ikinci dereceden fonksiyon olduğuna dikkat ediniz.

3.25. Aşağıda verilen toplam gelir $R(x)$ ve toplam maliyet $C(x)$ fonksiyonları için (1) kârı π'yi x'in bir fonksiyonu olarak belirtiniz, (2) $\pi(x)$ fonksiyonunun tepe noktasını bularak maksimum kâr miktarını belirleyiniz ve (3) fonksiyonun x eksenini kestiği noktaları belirleyerek grafiğini kabaca çiziniz.

(*a*) $R(x) = 600x - 5x^2$ $\quad\quad$ $C(x) = 100x + 10{,}500$

(1) $\pi(x) = R(x) - C(x)$
$\pi(x) = 600x - 5x^2 - (100x + 10{,}500)$
$\pi(x) = -5x^2 + 500x - 10{,}500$

(2) Problem 3.22'de gösterilen yöntemi kullanılır fakat y yerine π yazılır.

$$x = \frac{-(500)}{2(-5)} \qquad \pi = \frac{4(-5)(-10,500) - (500)^2}{4(-5)}$$

$$x = 50 \qquad \pi = \frac{210{,}000 - 250{,}000}{-20} = 2000$$

Tepe noktasının koordinatları: (50, 2000) $\quad\quad$ Maksimum kâr: $\pi(50) = 2000$

(3) $\pi(x) = 0$ fonksiyonu çarpanlarına ayrılarak x eksenini kestiği noktalar belirlenir.

$$-5x^2 + 500x - 10{,}500 = 0$$

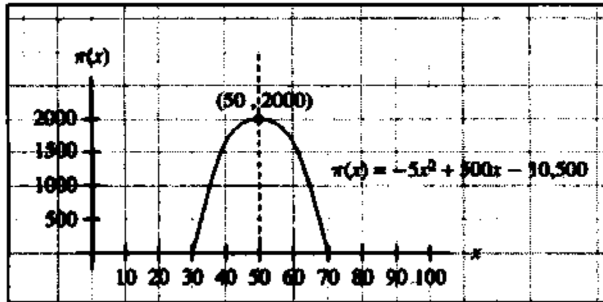
$$-5(x^2 - 100x + 2100) = 0$$

$$(x - 30)(x - 70) = 0$$

$$x = 30 \qquad x = 70$$

x ekseni kesim noktaları: (30, 0), (70, 0)

Şekil 3-23'e bakınız.



Şekil 3-23

(*b*) $R(x) = 280x - 2x^2$ $\quad\quad$ $C(x) = 60x + 5600$

(1) $\pi(x) = -2x^2 + 220x - 5600$

(2) $$x = \frac{-(220)}{2(-2)} = 55 \qquad \pi = \frac{4(-2)(-5600) - (220)^2}{4(-2)} = 450$$

Tepe noktasının koordinatları: (55, 450) $\quad\quad$ Maksimum kâr: $\pi(55) = 450$

(3) $\pi(x) = 0$ fonksiyonu çarpanlarına ayrılarak x eksenini kestiği noktalar belirlenir.

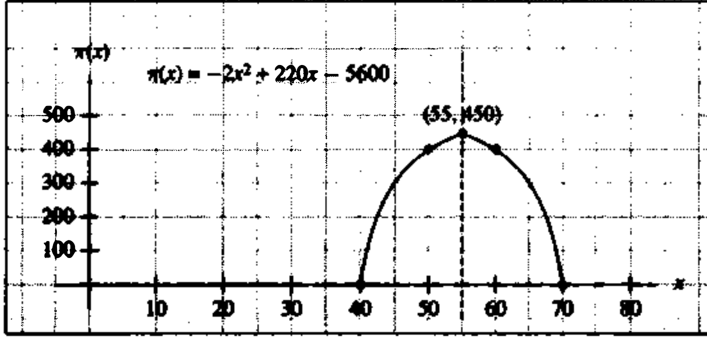
$$-2(x^2 - 110x + 2800) = 0$$

$$(x - 40)(x - 70) = 0$$

$$x = 40 \qquad x = 70$$

x ekseni kesim noktaları: (40, 0), (70, 0)

Şekil 3-24'e bakınız.



Şekil 3-24

(*c*) $R(x) = 540x - 3x^2$ $\qquad C(x) = 90x + 16{,}200$

(1) $\pi(x) = -3x^2 + 450x - 16{,}200$

(2) $x = \dfrac{-(450)}{2(-3)} = 75 \qquad \pi = \dfrac{4(-3)(-16{,}200) - (450)^2}{4(-3)} = 675$

Tepe noktasının koordinatları: (75, 675) Maksimum kâr: $\pi(75) = 675$

(3) $\pi(x) = 0$ fonksiyonu çarpanlarına ayrılarak x eksenini kestiği noktalar belirlenir.

$$-3(x^2 - 150x + 5400) = 0$$

$$(x - 60)(x - 90) = 0$$

$$x = 60 \qquad x = 90$$

x ekseni kesim noktaları: (60, 0), (90, 0)

Şekil 3-25'e bakınız.

(*d*) $R(x) = 48x - 3x^2$ $\qquad C(x) = 6x + 120$

(1) $\pi(x) = -3x^2 + 42x - 120$

(2) $x = \dfrac{-(42)}{2(-3)} = 7 \qquad \pi = \dfrac{4(-3)(-120) - (42)^2}{4(-3)} = 27$

Tepe noktasının koordinatları: (7, 27) Maksimum kâr: $\pi(7) = 27$

(3) $\pi(x) = 0$ fonksiyonu çözülerek x eksenini kestiği noktalar belirlenir.

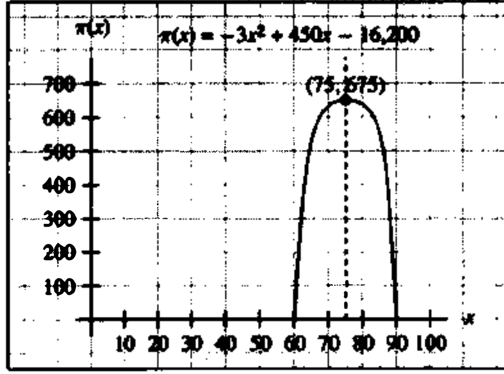
$$-3(x^2 - 14x + 40) = 0$$

$$(x - 4)(x - 10) = 0$$

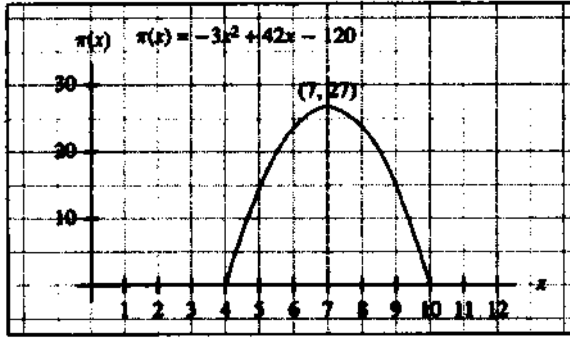
$$x = 4 \qquad x = 10$$

x ekseni kesim noktaları: (4, 0), (10, 0)

Şekil 3-26'ya bakınız.



Şekil 3-25



Şekil 3-26

3.26. Uzun dönem ortalama maliyet AC(x) ikinci dereceden bir fonksiyon yardımıyla gösterilebilir. Aşağıda verilen ortalama maliyet AC(x) fonksiyonunun tepe noktasını belirleyerek minimum uzun dönem ortalama maliyet noktasını (LRAÇ) bulunuz ve grafiği basitçe çiziniz.

$$AC(x) = x^2 - 120x + 4100$$

(1) $a > 0$ olduğu için parabolün kolları yukarıya doğrudur.

(2) $x = \dfrac{-(-120)}{2(1)} = 60 \qquad AC = \dfrac{4(1)(4100) - (-120)^2}{4(1)} = 500$

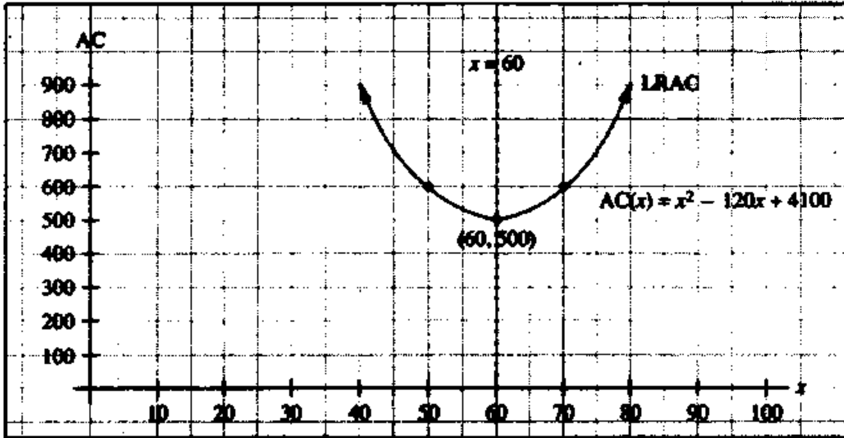
Tepe noktasının koordinatları: (60, 500) Minimum: AC(x) = 500

(3) Parabol (60, 500) tepe noktasında yukarıya doğru çıktığı için parabolün x eksenini kesmemektedir. Şekil 3-27'ye bakınız.

3.27. Bir maden eritme ocağının bacasından çıkan karbon monoksit gazının temizlenmesi için kurulacak olan arıtma sisteminin maliyeti aşağıdaki rasyonel fonksiyon yardımıyla gösterilmektedir.

$$C(x) = \frac{150x}{110 - x} \qquad (0 \leq x \leq 100)$$

C, %x oranında karbon monoksit gazı arıtmanın maliyetini bin TL cinsinden gösterir. Temizleme yüzdesi arttıkça maliyetlerin hızla yükseldiğini grafik yardımıyla gösteriniz.



Şekil 3-27

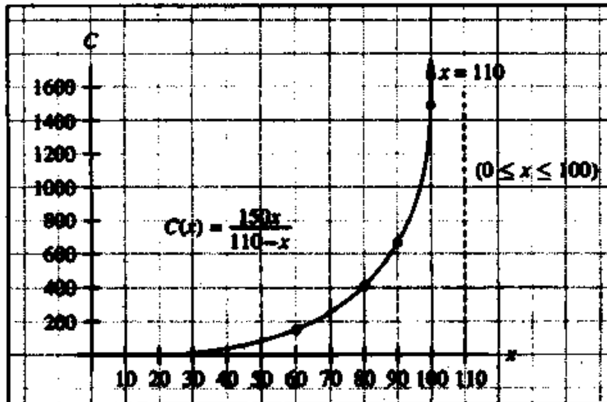
x	y
60	180
80	400
90	675
100	1500

Dikey asimptot:

$110 - x = 0$

$x = 110$

Şekil 3-28'e bakınız.



Şekil 3-28

3.28. Otomobil gibi ürünlerde *artan amortisman* değeri bulunmaktadır, doğrusal amortismana kıyasla daha hızlı değer kaybederler. Değeri 10,000 TL ve kullanım ömrü 10 yıl olan bir araba için (a) *artan amortisman* altında arabanın değerini gösteren fonksiyonun $V(t)$ grafiğini düz bir çizgi ile çiziniz, (*b*) doğrusal amortisman altında arabanın değerini gösteren fonksiyonun grafiğini kesikli çizgi ile çiziniz.

(*a*) $V(t) = 100t^2 - 2000t + 10{,}000$ (*b*) $V(t) = 10{,}000 - 1000t$

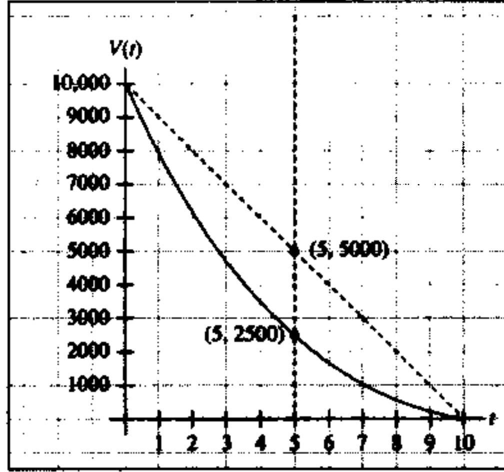
(*a*)

t	V
0	10,000
2	6,400
5	2,500
8	400

(*b*)

t	V
0	10,000
2	8,000
5	5,000
8	2,000

Şekil 3-29'a bakınız.



Şekil 3-29

Doğrusal amortisman durumu altında $t = 5$ zamanında arabanın değeri 5000 TL iken, artan amortisman durumu altında yalnızca 2500 TL olduğuna dikkat ediniz.

3.29. Kullanım ömrü 8 yıl olan 12,000 TL değerindeki bir araba için benzer grafikleri (*a*) $V(t) = 187.5t^2 - 3000t + 12{,}000$ artan amortisman durumu altında, (*b*) $V(t) = 12{,}000 - 1500t$ doğrusal amortisman durumu altında çiziniz.

(*a*)

t	V
0	12,000
2	6,750
4	3,000
6	750

(*b*)

t	V
0	12,000
2	9,000
4	6,000
6	3,000

Şekil 3-30'a bakınız.

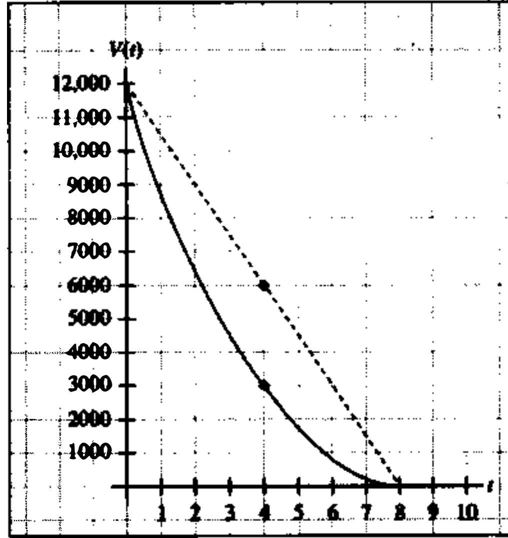
İŞLETME VE İKTİSATTA BİLEŞKE FONKSİYON

3.30. Bir fabrikanın maliyeti $C(q)$ üretilen ürün miktarının bir fonksiyonudur, çıktı miktarı $q(t)$ ise zamanın bir fonksiyonudur. Aşağıda verilenleri kullanarak fabrikanın maliyetini zamanın bir fonksiyonu olarak belirtiniz.

(*a*) $C(q) = 1500 + 40q$ $\qquad q(t) = 16t - \frac{1}{4}t^2$

$C(q)$ fonksiyonundaki q değerlerinin yerine $q(t)$ yazılır.

$$C[q(t)] = 1500 + 40(16t - \frac{1}{4}t^2)$$
$$= 1500 + 640t - 10t^2$$



Şekil 3-30

(*b*) $C(q) = q^2 + 3q + 75 \qquad q(t) = 8(t - \frac{1}{4})$

$$q(t) = 8(t - \tfrac{1}{4}) = 8t - 2$$

$C(q)$'da q değeri yerine yazılır.

$$C[q(t)] = (8t - 2)^2 + 3(8t - 2) + 75$$
$$= (64t^2 - 32t + 4) + (24t - 6) + 75$$
$$= 64t^2 - 8t + 73$$

3.31. Çevre bilimciler havadaki ortalama karbon monoksit gazı düzeyinin insan sayısı n bin adet olduğunda, her bir milyon partikül için $L(n) = (1 + 0.6n)$ olduğunu tahmin etmişlerdir. t zamanında bin kişi cinsinden popülasyon $n(t) = 400 + 30t + 0.15t^2$ varsayılırsa, (*a*) havadaki karbon monoksit gazı miktarını zamanın bir fonksiyonu olarak yazınız, (*b*) $t = 5$ zamanında havadaki karbon monoksit gazı miktarını hesaplayınız.

(*a*) $L[n(t)]$ bileşke fonksiyonunu oluşturmak için $L(n)$ fonksiyonundaki her bir n değişkeninin yerine $n(t)$ fonksiyonu yazılır.

$$L[n(t)] = 1 + 0.6(400 + 30t + 0.15t^2)$$
$$= 241 + 18t + 0.09t^2$$

(*b*) $L[n(5)] = 241 + 18(5) + 0.09(5)^2 = 333.25$ milyon partikül

3.32. Belirli bir bölgede yüzlük birimde kurbağa popülasyonu F binlik birimdeki böcek popülasyonuna m bağlıdır: $F(m) = 65 + \sqrt{m/8}$ Böcek popülasyonu ise yağış miktarına r bağlıdır: $m(r) = 43r + 7.5$.

(*a*) Kurbağa popülasyonunu yağış miktarının bir fonksiyonu olarak yazınız. (*b*) Yağış miktarının 1.5 birim iken kurbağa popülasyonunu hesaplayınız.

(*a*) $F = [m(r)] = 65 + \sqrt{\dfrac{43r + 7.5}{8}}$

(*b*) $F[m(1.5)] = 65 + \sqrt{\dfrac{43(1.5) + 7.5}{8}} = 65 + \sqrt{9} = 68$ veya 6800 kurbağa

Ek Problemler

FONKSİYONLAR

3.33. Verilen x değerleri için aşağıdaki fonksiyonları hesaplayınız.

(a) $x = 3$ için $f(x) = x^2 - 9x + 42$

(b) $x = -4$ için $g(x) = 2x^2 + 5x - 9$

(c) $x = 2$ için $h(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 7$

(d) $x = 5$ için $F(x) = (5x^2 - 4x + 7)/(3x - 7)$

3.34. x değişkenlerine tanımlanan parametrik değerler için aşağıdaki fonksiyonları hesaplayınız.

(a) $x = a$ için $f(x) = 7x^3 - 12x^2 - 38x + 115$

(b) $x = a + 2$ için $g(x) = 8x^2 + 5x - 13$

(c) $x = b - 4$ için $h(x) = 4x^2 - 6x + 7$

(d) $x = b + 5$ için $G(x) = (12x^2 - 9x + 15)/(4x - 3)$

FONKSİYONLARDA İŞLEMLER

3.35. $f(x) = 7x - 2$ ve $g(x) = 3x + 8$ fonksiyonları için (a) $(f + g)(x)$ fonksiyonunu, (b) $(f \cdot g)(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

3.36. $g(x) = 4x - 9$ ve $h(x) = 12 - 5x$ fonksiyonları için (a) $(g - h)(x)$ fonksiyonunu, (b) $(g \div h)(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

3.37. $F(x) = 3x^2 - 7x + 8$ ve $G(x) = 9x - 4$ fonksiyonları için (a) $(F + G)(x)$ fonksiyonunu, (b) $(F \cdot G)(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

3.38. $f(x) = 30x^2 - x - 99$ ve $h(x) = 5x + 9$ fonksiyonları için (a) $(f - h)(x)$ fonksiyonunu, (b) $(f \div h)(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

3.39. $G(x) = 6/(x + 3)$ ve $H(x) = 11/x^2$ fonksiyonları için (a) $(G + H)(x)$ fonksiyonunu, (b) $(G \cdot H)(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

3.40. $f(x) = (x - 7)/(x + 2)$ ve $g(x) = (x + 3)/(x - 8)$ fonksiyonları için (a) $(f - g)(x)$ fonksiyonunu, (b) $(f \div g)(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

3.41. $f(x) = x^3 - 3x + 4$ ve $g(x) = 5x^2$ fonksiyonları için (a) $f[g(x)]$, (b) $g[f(x)]$ bileşke fonksiyonlarını bulunuz.

3.42. $F(x) = (9x - 2)/4x$ ve $G(x) = x^5$ için fonksiyonların fonksiyonu olarak da isimlendirilen (a) $F[G(x)]$, (b) $G[F(x)]$ bulunuz.

İŞLETME VE İKTİSATTA DOĞRUSAL FONKSİYONLAR

3.43. Bir firmanın sabit maliyeti 125,000 TL ve değişken maliyeti 685 TL'dir. Firmanın toplam maliyet fonksiyonunu **TC** çıktı miktarı x'in bir fonksiyonu olarak yazınız.

3.44. 13,500 TL'ye alınan bir araba her yıl 2250 TL değer kaybetmektedir. Arabanın değerini V zamanın t bir fonksiyonu olarak yazınız.

3.45. Tam rekabet piyasası koşulları altında işleyen bir firma sattığı ürün başına 95 TL gelir elde etmektedir. Firmanın sabit maliyetleri 8800 TL ve ürün başına düşen marjinal maliyeti 67.50 TL ise firmanın kâr fonksiyonunu π satılan ürün miktarının bir fonksiyonu olarak yazınız.

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

3.46. Aşağıdaki ikinci dereceden denklemleri çarpanlarına ayırarak çözünüz.

(a) $x^2 - 11x + 28$ (b) $x^2 + 5x - 24$ (c) $x^2 + 11x + 18$

(d) $x^2 - 8x - 48$

3.47. Aşağıdaki ikinci dereceden denklemleri ikinci dereceden denklem çözüm formülü yardımıyla çözünüz.

(*a*) $6x^2 + 31x + 40$ (*b*) $8x^2 - 50x + 33$ (*c*) $4x^2 - 31x - 45$

(*d*) $9x^2 - 67.5x + 126$

DOĞRUSAL OLMAYAN FONKSİYONLARIN GRAFİĞİNİN ÇİZİLMESİ

3.48. Aşağıdaki ikinci dereceden fonksiyonların (1) kollarının aşağıya doğru mu yukarıya doğru mu baktığını, (2) tepe noktasının koordinatlarını ve (3) varsa x eksenini kestiği noktaların koordinatlarını belirleyerek şekillerini belirtiniz.

(*a*) $y = -x^2 + 12x - 27$ (*b*) $y = x^2 - 8x - 48$

(*c*) $y = -x^2 - 16x - 28$ (*d*) $y = x^2 - 5x + 30$

3.49. Aşağıdaki rasyonel fonksiyonların (1) dikey asimptotlarını ve (2) yatay asimptotlarını belirleyerek, (3) grafiği sağlayan birkaç nokta tespit edip şekillerini belirtiniz.

(*a*) $y = \frac{6}{x-8}$ (*b*) $y = \frac{-7}{x+3}$ (*c*) $y = \frac{x+9}{x-6}$ (*d*) $y = \frac{4-x}{5+x}$

İŞLETME VE İKTİSATTA DOĞRUSAL OLMAYAN FONKSİYONLAR

3.50. Aşağıda doğrusal talep fonksiyonları verilen firmaların toplam gelir fonksiyonlarını **TR** belirleyiniz.

(*a*) $P = -17.5Q + 2675$ (*b*) $P = -9.8Q + 860$

3.51. Aşağıda verilen toplam gelir fonksiyonu TR ve toplam maliyet fonksiyonu TC için öncelikle kâr fonksiyonunu π çıktının bir fonksiyonu olarak belirleyiniz ve sonra parabolün tepe noktasını bularak maksimum kâr miktarını belirleyiniz.

(*a*) $\text{TR} = -6x^2 + 1200x$, $\text{TC} = 180x + 3350$

(*b*) $\text{TR} = -4x^2 + 900x$, $\text{TC} = 140x + 6100$

(*c*) $\text{TR} = -7x^2 + 4100x$, $\text{TC} = 600x + 12{,}500$

(*d*) $\text{TR} = -9x^2 + 6600x$, $\text{TC} = 660x + 19{,}600$

Ek Problemlerin Cevapları

3.33. (*a*) $f(3) = 24$ (*b*) $g(-4) = 3$ (*c*) $h(2) = 1$ (*d*) $F(5) = 14$

3.34. (*a*) $f(a) = 7a^3 - 12a^2 - 38a + 115$ (*b*) $g(a + 2) = 8a^2 + 37a + 29$

(*c*) $h(b - 4) = 4b^2 - 38b + 95$ (*d*) $G(b+5) = \frac{12b^2 + 111b + 270}{4b + 17}$

3.35. (*a*) $(f + g)(x) = 10x + 6$ (*b*) $(f \cdot g)(x) = 21x^2 + 50x - 16$

3.36. (*a*) $(g - h)(x) = 9x - 21$ (*b*) $(g \div h)(x) = \frac{4x-9}{12-5x}$

3.37. (*a*) $(F + G)(x) = 3x^2 + 2x + 4$ (*b*) $(F \cdot G)(x) = 27x^3 - 75x^2 + 100x - 32$

3.38. (*a*) $(f - h)(x) = 30x^2 - 6x + - 108$ (*b*) $(f \div h)(x) = 6x - 11$

3.39. (*a*) $(G + H)(x) = \frac{6x^2 + 11x + 33}{x^3 3x^2}$ (*b*) $(G \cdot H)(x) = \frac{66}{x^3 + 3x^2}$

3.40. (*a*) $(f - g)(x) = \frac{-20x + 50}{x^2 - 6x - 16}$ (*b*) $(f \div g)(x) = \frac{x^2 - 15x + 56}{x^2 + 5x + 6}$

3.41. (*a*) $f[g(x)] = 125x^6 - 15x^2 + 4$

(*b*) $g[f(x)] = 5(x^3 - 3x + 4)^2 = 5x^6 - 30x^4 + 40x^3 + 45x^2 - 120x + 80$

3.42. (*a*) $F[G(x)] = \dfrac{9x^5 - 2}{4x^5}$ (*b*) $G[F(x)] = \left(\dfrac{9x - 2}{4x}\right)^5$

3.43. $\text{TC} = 685x + 125{,}000$

3.44. $V = -2250t + 13{,}500$

3.45. $\pi = 27.50x - 8800$

3.46. (*a*) $x = 4, 7$ (*b*) $x = 3, -8$ (*c*) $x = -2, -9$ (*d*) $x = -4, 12$

3.47. (*a*) $x = -2.5, -2.67$ (*b*) $x = 0.75, 5.5$ (*c*) $x = -1.25, 9$ (*d*) $x = 3.5, 4$

3.48. (*a*) Kollar aşağıya doğru, tepe noktası: (6, 9), *x* ekseni kesim noktaları: (3, 0), (9, 0).
(*b*) Kollar yukarıya doğru, tepe noktası: (4, −64), *x* ekseni kesim noktaları: (−4, 0), (12, 0).
(*c*) Kollar aşağıya doğru, tepe noktası: (−8, 36), *x* ekseni kesim noktaları: (−2, 0), (−14, 0).
(*d*) Kollar yukarıya doğru, tepe noktası: (2.5, 23.75), *x* eksenini kestiği nokta yoktur.

3.49. *a*) Dikey Asimptot: $x = 8$
Yatay Asimptot: $y = 0$

x	y
2	−1
7	−6
- - -	- - -
9	6
14	1

(*b*) Dikey Asimptot: $x = -3$
Yatay Asimptot: $y = 0$

x	y
−10	1
−4	7
- - -	- - -
−2	−7
4	−1

(*c*) Dikey Asimptot: $x = 6$
Yatay Asimptot: $y = 1$

x	y
3	−4
5	−14
- - -	- - -
7	16
9	6

(*d*) Dikey Asimptot: $x = -5$
Yatay Asimptot: $y = -1$

x	y
−10	−2.8
−6	−10
- - -	- - - -
−4	8
0	0.8

3.50. (*a*) $\text{TR} = -17.5Q^2 + 2675Q$ (*b*) $\text{TR} = -9.8Q^2 + 860Q$

3.51. (*a*) $\pi = -6x^2 + 1020x - 3350$ Tepe noktası: (85, 40,000) Maksimum: $\pi(85) = 40{,}000$
(*b*) $\pi = -4x^2 + 760x - 6100$ Tepe noktası: (95, 30,000) Maksimum: $\pi(95) = 30{,}000$
(*c*) $\pi = -7x^2 + 3500x - 12{,}500$ Tepe noktası: (250, 425,000) Maksimum: $\pi(250) = 425{,}000$
(*d*) $\pi = -9x^2 + 5940x - 19{,}600$ Tepe noktası: (330, 960,500) Maksimum: $\pi(330) = 960{,}500$

Bölüm 4

DENKLEM SİSTEMLERİ

4.1 GİRİŞ

Önceki konular tek denklemli analizler üzerine yoğunlaşmaktaydı. Ancak çoğu matematik modeli birden çok denklem içermektedir. Böyle modellerin denklemleri *denklem sistemleri* olarak da adlandırılmaktadır. Denklem sisteminin çözümü, sistemdeki tüm denklemleri sağlayan değerlerdir. n denklemli ve v değişkenli bir denklem sistemi $n \times v$ *sistemi* ya da $n \times v$ *boyutlu* sistem olarak adlandırılmaktadır.

Denklem sisteminin tek bir çözümü olması için en az değişken sayısı kadar denklem bulunmalıdır. Denklem sayısı ve değişken sayısı eşit olan ($n = v$) denklem sistemleri *tam kısıtlanmış denklem sistemleri* olarak adlandırılırlar. Denklem sayısı değişken sayısından az olan ($n < v$) denklem sistemleri *kısıt altı denklem sistemleri* olarak adlandırılırlar. Denklem sayısı değişken sayısından fazla olan denklem sistemleri ($n > v$) *kısıt üstü denklem sistemleri* olarak adlandırılırlar. Kısıt altı denklem sistemlerinin ya sonsuz sayıda çözümü olmakta ya da çözümü olmamaktadır. Tam kısıtlanmış denklem sistemlerinin ya da kısıt üstü denklem sistemlerinde tek bir çözüm, bir çözüm kümesi olabilir ya da çözüm olmayabilir. Bu bölümde denklem sistemlerinin farklı çözüm yöntemleri ve işletme ile iktisat için çok çeşitli uygulamaları üzerinde durulacaktır.

ÖRNEK 1. Altta verilen denklem sistemlerinin boyutları aşağıda gösterilmiştir.

(*a*) $y = 5x + 7$
$y = 8x - 3$

(*b*) $y = 3x_1 + 7x_2 - 4x_3$
$y = 9x_1 - 5x_2 + 2x_3$

(*c*) $y = 6x - 12$
$y = 9x + 15$
$y = 7x - 11$

(*a*) sisteminde iki denklem ve iki değişken: x ve y bulunmaktadır. Bu sistem (2×2) sistemdir ve bu nedenle tam kısıtlı sistemdir. (*b*) sisteminde iki denklem ve dört değişken: x_1, x_2, x_3 ve y bulunmaktadır. Bu sistem (2×4) sistemidir ve kısıt altı sistemdir. (*c*) sisteminde üç denklem ve iki değişken: x ve y bulunmaktadır. Bu sistem (3×2) sistemdir ve bu nedenle kısıt üstü sistemdir.

4.2 GRAFİKSEL ÇÖZÜMLER

(2×2) doğrusal bir denklem sisteminin grafiği iki doğrudan oluşmaktadır. Bu iki doğru eğer bir noktada kesişirse (x_1, y_1) ve bu nokta her iki denklemi de sağlarsa bu noktanın koordinatları sistemin tek çözümüdür. Eğer iki doğru kesişmiyorsa, bu denklem sisteminin ortak çözümü yoktur yani çözüm yoktur. Denklemler *tutarsızdır*. Son olarak eğer iki doğru çakışırsa, doğruların sonsuz sayıda ortak noktası vardır ve denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır. Bu denklemler *denk* ya da *bağımlı denklemler* olarak adlandırılmaktadır. Üç olası durumun oluşabilmesi için gerekli şartlar aşağıda özetlenmiştir ve Örnek 2.'de gösterilmiştir.

(2×2) lik doğrusal bir denklem sistemi için Denklem (2.2)'de verilen eğim-kesişim formülü:

$$y = m_1x + b_1$$
$$y = m_2x + b_2$$

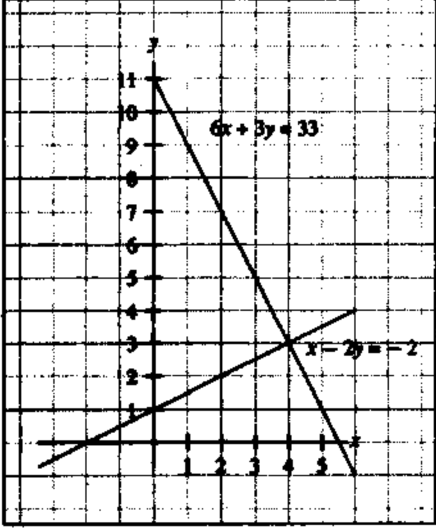
1. Eğer $m_1 \neq m_2$ ise denklem sisteminin tek çözümü vardır.
2. Eğer $m_1 = m_2$ ve $b_1 \neq b_2$ ise denklemler tutarsızdır ve denklem sisteminin çözümü yoktur.
3. Eğer $m_1 = m_2$ ve $b_1 = b_2$ ise denklemler denktir ve çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

ÖRNEK 2. Aşağıda verilen farklı denklem sistemleri grafik yardımıyla çözümlenmektedir:

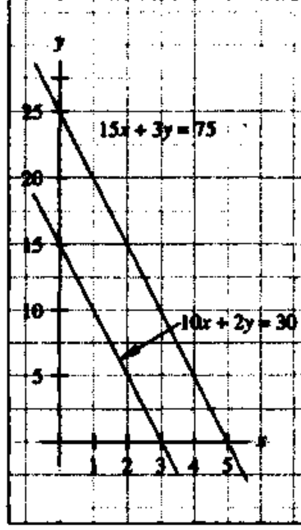
(*a*) $x - 2y = -2$ $6x + 3y = 33$	(*b*) $10x + 2y = 30$ $15x + 3y = 75$	(*c*) $21x - 7y = 14$ $-15x + 5y = -10$

Denklemler eğim kesişim formuna çevrilir, Şekil 4-1'de olduğu şekilde grafikleri çizilir.

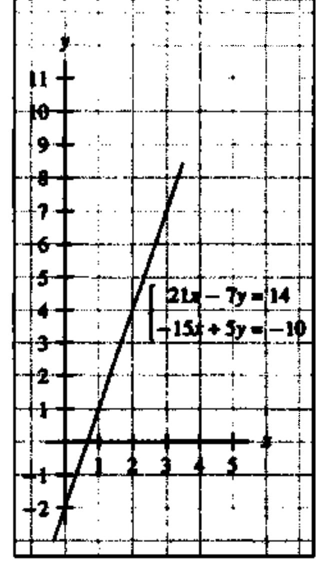
(*a*) $y = 1/2x + 1$ $y = 2x + 11$	(*b*) $y = 5x + 15$ $y = 5x + 25$	(*c*) $y = 3x - 2$ $y = 3x - 2$



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Şekil 4-1

(*a*) Denklem sisteminin çözümü $x = 4$, $y = 3$ noktasıdır. Sistemin tek çözümü bulunmaktadır çünkü sistem tam kısıtlıdır ($n = v$) ve denklemler tutarlı ve bağımsızdır $m_1 \neq m_2$.

(*b*) Denklem sisteminin çözümü yoktur. Sistem tam kısıtlıdır ($n = v$) ancak denklemler tutarsızdır $m_1 = m_2$ but $b_1 \neq b_2$.

(*c*) Denklem sisteminin sonsuz sayıda çözümü vardır. Sistem tam kısıtlıdır fakat denklemler bağımlı ya da denktir $m_1 = m_2$ ve $b_1 = b_2$.

4.3 ARZ VE TALEP ANALİZİ

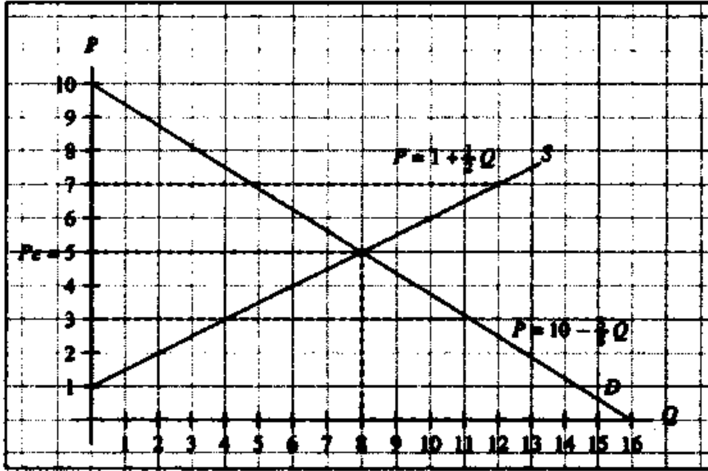
İktisada giriş derslerinde arz ve talep analizi genellikle grafikler üzerinden anlatılmaktadır. Genel kabul edilmiş kurallar sonucunda fiyat P bağımlı değişken olarak alınır ve dikey eksende gösterilir, miktar Q ise bağımsız değişken olarak alınır ve yatay eksende gösterilir. Arz eğrisi S ve talep eğrisinin D kesişim noktası modelde *denge* noktasını gösterir. Denge, arz edilen miktarın Q_s talep edilen miktara eşit olduğu noktada, *denge fiyatı* olarak adlandırılan tek bir fiyat seviyesinde P_e gerçekleşir. $Q_s = Q_d$ noktası *denge miktarı* Q_e olarak adlandırılır. Örnek 3 yardımıyla gösterilmiştir.

Arz ve talep analizi aynı zamanda denklemler yardımıyla da gerçekleştirilebilir. Amaç P_e denge fiyatını ve Q_e denge miktarını belirlemektir. Denge fiyatı P_e, $Q_s = Q_d = Q_e$ durumunda ortaya çıktığı için yapılması gereken arz ve talep denklemlerini birbirine eşitleyerek çözümü gerçekleştirmektir. Çözüm yönteminin ispatı Örnek 4'te ve Problem 4.4 ve 4.5'te gösterilmiştir.

ÖRNEK 3. Aşağıda verilen arz ve talep denklem sisteminin grafiksel çözümü Şekil 4-2'de gösterilmiştir.

$$\text{Arz: } P = 1 + \frac{1}{2}Q$$

$$\text{Talep: } P = 10 - \frac{5}{8}Q$$



Şekil 4-2

Arz ve talep sisteminin çözümü $P = 5 = P_e$ ve $Q = 8 = Q_e$ noktasında gerçekleşmektedir. Aşağıdaki bilgilere dikkat ediniz:

1) $P_e = 5$ fiyat seviyesinde $Q_s = Q_d = 8 = Q_e$ olmaktadır ve $Q_e = 8$ denge miktar seviyesinde $P_s = P_d = 5 = P_e$ olmaktadır.

2) $P > 5$ olduğunda $Q_s > Q_d$ olmaktadır. Örneğin $P = 7$ iken $Q_s = 12$, $Q_d = 4.8$ olmaktadır. $Q_s > Q_d$ ise bu *arz fazlası* durumudur. Tam rekabet piyasasında arz fazlası durumunda fiyatlar P_e denge fiyat seviyesine inme eğilimindedir.

3) $P < 5$ olduğunda $Q_d > Q_s$ olmaktadır. Örneğin $P = 3$ fiyat seviyesinde $Q_d = 11.2$, $Q_s = 4$ olmaktadır. $Q_d > Q_s$ ise bu *talep fazlası (kıtlık)* durumudur. Tam rekabet piyasasında talep fazlası durumunda fiyatlar P_e denge fiyat seviyesine yükselme eğilimindedir.

4) Yukarıda madde 2 ve madde 3'te anlatıldığı gibi tam rekabet piyasasında fiyatlar sürekli olarak denge fiyatı noktasına P_e gitme eğiliminde olduğu için bu duruma *kendi kendini dengeleme* durumu denilmektedir.

ÖRNEK 4. Bazen arz ve talep dengesi sistemini matematiksel olarak çözmek daha uygundur. İktisat matematiğinde genellikle tercih edilen Q'nun bağımlı değişken olduğu yeni bir denklem sistemi kullanıldığına dikkat ediniz.

$$\text{Arz: } Q = -50 + 6P$$
$$\text{Talep: } Q = 230 - 8P$$

Denge noktasını sağlayan fiyat seviyesi arandığından, denge $Q_s = Q_d$ durumunda oluştuğu için denklemler birbirlerine eşitlenir ve P için çözülür.

$$Q_s = Q_d$$

$$-50 + 6P = 230 - 8P$$

$$14P = 280$$

$$P = 20 = P_e$$

Sonrasında $P_e = 20$ denge fiyatı (a) arz denkleminde ve ya (b) talep denkleminde yerine yazılarak Q_e denge miktarı bulunur.

(a) $Q_s = -50 + 6(20)$
$Q_s = -50 + 120 = 70 = Q_e$

(b) $Q_d = 230 - 8(20)$
$Q_d = 230 - 160 = 70 = Q_e$

4.4 BAŞABAŞ NOKTASI ANALİZİ

Yeni bir girişim planlanırken, kâra geçilecek olan minimum satış miktarının belirlenmesi büyük öneme sahiptir. Bir firma bilançosunun zarardan kâra geçiş noktasının tahmini *başabaş noktası analizi* olarak adlandırılır. Başabaş noktası (1) kârın sıfıra eşit olduğu veya (2) toplam gelirin toplam maliyete eşit olduğu noktadaki satış miktarı olarak tanımlanabilir. Başabaş noktası Örnek 5'te doğrusal fonksiyonlar için ve Örnek 6'da ikinci dereceden fonksiyonlar için hem matematiksel olarak hem de grafik yardımıyla bulunmuştur.

ÖRNEK 5. Toplam gelir fonksiyonu $R(x) = 80x$, toplam maliyet fonksiyonu $C(x) = 30x + 2000$ ve kâr fonksiyonu $\pi(x) = R(x) - C(x) = 50x - 2000$ olan bir firmanın başabaş noktası aşağıdaki üç yoldan herhangi biri ile bulunabilir.

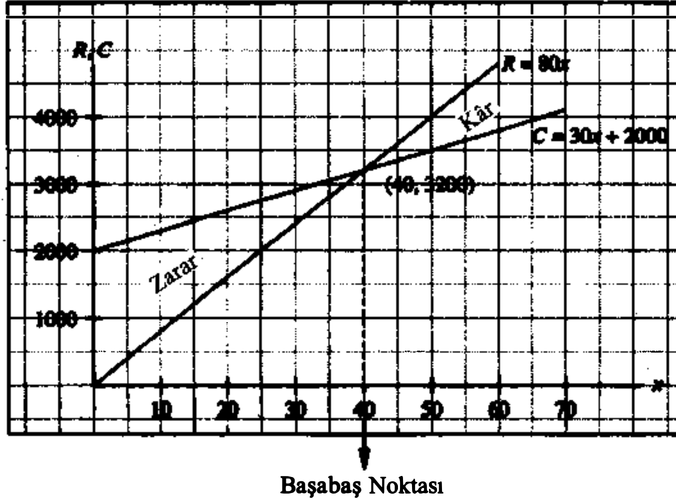
(a) $\pi = 0$ olacak şekilde kâr fonksiyonu çözülür.

$$50x - 2000 = 0$$
$$x = 40 \quad \text{Başabaş noktasındaki çıktı miktarı}$$

(b) $R(x) = C(x)$ eşitliği x için çözülür.

$$80x = 30x + 2000$$
$$50x = 2000$$
$$x = 40 \quad \text{Başabaş noktasındaki çıktı miktarı}$$

(c) $R(x)$ ve $C(x)$ fonksiyonlarının grafikleri çizilir, kesişim noktaları Şekil 4-3'te olduğu gibi başabaş noktasıdır.



Şekil 4-3

$x < 40$ olan bölgede $C(x) > R(x)$ olduğu için zarar edildiğine, $x > 40$ olan bölgede ise $R(x) > C(x)$ olduğu için kâr edildiğine dikkat ediniz. Ayrıca Problem 4.6'ya bakınız.

ÖRNEK 6. Toplam gelir fonksiyonu $R(x) = -3x^2 + 48x$, toplam maliyet fonksiyonu $C(x) = 6x + 120$ ve kâr fonksiyonu $\pi(x) = R(x) - C(x) = -3x^2 + 42x - 120$ olmak üzere başabaş noktası Örnek'deki yollardan herhangi biri ile bulunabilir.

(*a*) $\pi = 0$ alınır, kâr fonksiyonun her iki tarafı –3'e bölünür ve çarpanlarına ayrılarak x için çözülür.

$$-3x^2 + 42x - 120 = 0$$
$$x^2 - 14x + 40 = 0$$
$$(x - 4)(x - 10) = 0$$

$x = 4, \quad x = 10$ Başabaş noktasındaki çıktı miktarı

(*b*) $R(x) = C(x)$ alınır ve sadeleştirilir,

$$-3x^2 + 48x = 6x + 120$$
$$-3x^2 + 42x - 120 = 0$$

sonrasında (*a*)'da olduğu gibi çarpanlarına ayrılarak x için çözülür.

$x = 4, \quad x = 10$ Başabaş noktasındaki çıktı miktarı

(*c*) $R(x)$ ve $C(x)$ fonksiyonlarının grafikleri çizilir ve kesişim noktaları belirlenir. $R(x)$ fonksiyonu gibi ikinci dereceden fonksiyonların grafiğinin çizilmesi için Kısım 3.6'da gösterilen yöntemler kullanılır.

1) $a < 0$ olduğu için parabolün kolları aşağıya doğrudur.

2) $$x = \frac{-b}{2a} \qquad y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$x = \frac{-(48)}{2(-3)} = 8 \qquad y = \frac{4(-3)(0) - (48)^2}{4(-3)} = \frac{-2304}{-12} = 192$$

Tepe noktasının koordinatları: (8, 192)

3) $R(x) = 0$ alınır ve çarpanlarına ayrılarak denklemin x eksenini kestiği noktaları bulmak için çözülür.

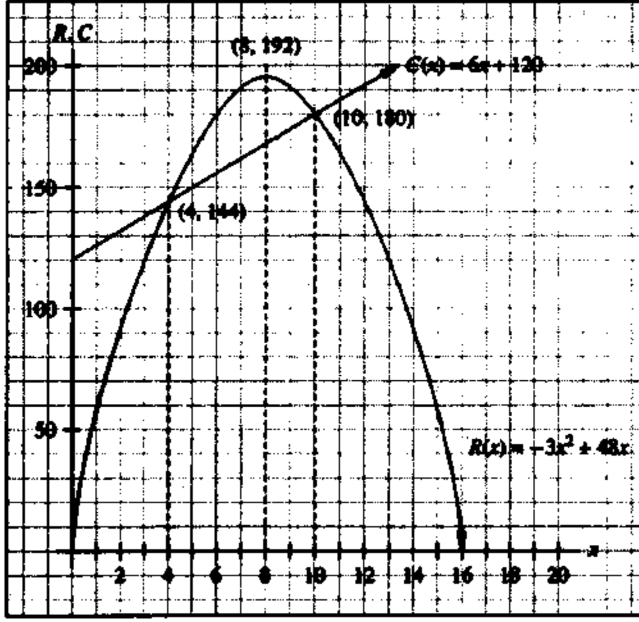
$$-3x^2 + 48x = 0$$
$$-3x(x - 16) = 0$$
$$-3x = 0 \qquad x - 16 = 0$$
$$x = 0 \qquad x = 16$$

Grafiğin x eksenini kestiği noktalar (0, 0) ve (16, 0) noktalarıdır. Şekil 4-4'e bakınız. Şekil 4-4'teki kesişim noktalarından bu firmanın başabaş noktalarının (4, 144) noktası ve (10, 180) noktası olduğu görülmektedir. $x < 4$ olan bölgede $C(x) > R(x)$ olduğundan zarar edildiğine, $4 < x < 10$ olan bölgede $R(x) > C(x)$ olduğundan kâr edildiğine ve $x > 10$ olan bölgede tekrar $C(x) > R(x)$ olduğu için zarar edildiğine dikkat ediniz. Ayrıca Problem 4.7'ye bakınız.

4.5 ELEME VE YERİNE KOYMA YÖNTEMLERİ

Bir denklem sistemini sağlayan tek çözümün elde edilebilmesi için (1) denklemler tutarlı olmalıdır, (2) denklemler birbirinden bağımsız olmalıdır (Birbirlerinin, çarpım, kare, karekök ve benzeri dönüşümleri olmamalıdır) ve (3) değişken sayısı kadar denklem bulunmalıdır (tam kısıtlı denklem sistemi). Bu şekildeki denklem sistemlerinin çözümünde 2 genel yöntem bulunmaktadır. (*a*) Eleme yöntemi ve (*b*) yerine koyma yöntemi.

Eleme yönteminde tek bir değişken kalacak şekilde diğer değişkenlerin katsayıları eşitlenerek sistemden çıkarılırlar. x ve y değişkenlerinin bulunduğu 2×2 bir sistemde eleme yöntemini uygulamak için her iki denklemden de silinmek istenilen değişken seçilir (burada x silinecektir) ve bu değişkenler için en küçük ortak katsayı belirlenir. En küçük katsayının belirlenmesine ihtiyaç duyulmadığı durumlarda birinci denklemdeki x'in katsayısı ile ikinci denklemi genişletmek ve ikinci denklemdeki x'in katsayısı ile birinci denklemi genişletmek her zaman bu değişkenleri ortak bir katsayıda buluşturacaktır.



Şekil 4-4

x değişkenlerinin katsayıları mutlak değerce denk olacaklardır. Sonrasında x değişkeni elenip y için sonucu bulmak için iki denklemin toplanması ya da çıkarılması yeterlidir. Örnek 7 (a)'ya bakınız. (3×3)'lük bir sistemin çözümü için Problem 4.14'e bakınız.

2×2 bir sistemde *yerine koyma metodunda* ise değişkenlerden biri diğerine göre (x'e göre y olsun) yazılacak şekilde denklemlerden biri çözülür ve sonra diğer denklemde bulunan yeni y değeri yerine yazılır ve x için çözümlenir. Örnek 7 (b)'ye bakınız.

ÖRNEK 7. Aşağıdaki eşanlı denklem sistemi iki farklı yöntemle çözülmüştür.

$$2x + 5y = 52 \qquad (4.1)$$

$$3x - 4y = -14 \qquad (4.2)$$

(a) Eleme yöntemi:

1) Eleme için x değişkeni seçilir ve (4.1) denklemi 3 ile (4.2) denklemi 2 ile çarpılır.

$$3(2x + 5y = 52) = 6x + 15y = 156 \qquad (4.3)$$

$$2(3x - 4y = -14) = 6x - 8y = -28 \qquad (4.4)$$

2) x değişkenini elemek için (4.4)'teki tüm terimlerin işareti değiştirilip (4.3)'e eklenmesiyle (4.4), (4.3)'ten çıkarılır.

$$23y = 184$$

$$y = 8$$

3) Sonra x değerini bulmak için (4.1)'de ya da (4.2)'de $y = 8$ değeri yerine yazılır.

$$2x + 5(8) = 52$$

$$x = 6$$

(*b*) Yerine koyma yöntemi:

1) Denklemlerden biri x ya da y için çözülür. Burada denklem (4.1) x için çözülmüştür.

$$2x = 52 - 5y$$

$$x = 26 - 2.5y \qquad (4\text{-}5)$$

2) Denklem (4.5)'te elde edilen x değeri denklem (4.2)'de yerine yazılır.

$$3(26 - 2.5y) - 4y = -14$$

$$78 - 7.5y - 4y = -14$$

$$-11.5y = -92$$

$$y = 8$$

3) Daha sonra elde edilen $y = 8$ değeri denklem (4.1)'de ya da (4.2)'de yerine yazılır. Burada denklem (4.2)'de yerine yazılmıştır.

$$3x - 4(8) = -14$$

$$x = 6$$

Ayrıca Problem 4.8'den 4.13'e kadar bakınız. (3 × 3) lük bir sistemin çözümü için Problem 4.14'e bakınız. Ayrıca Gaussian Eleme Yöntemi için Kısım 5.10'u, Cramer Kuralı için Kısım 6.3'ü ve matris yöntemi için Kısım 6.6'yı inceleyiniz.

4.6 GSYİH BELİRLEME MODELLERİ

GSYİH'in belirlenmesi modelleri genel olarak ekonomideki dört temel sektörün gelirleri toplamının GSYİH ile eşitlenmesi ile kurulur.

$$Y = C + I + G + (X - M)$$

Burada Y = GSYİH, C = tüketim harcamaları, I = *yatırım harcamaları*, G = kamu harcamaları, X = ihracat ve M = ithalat harcamalarını göstermektedir. İlgili verileri toplayarak denge gelir seviyesinin çözülmesi oldukça kolaydır. Denklemin sağ tarafındaki değişkenlerin *toplamı* aynı zamanda iki boyutlu uzayda denge gelir grafiğinin çizilmesini de kolaylaştırmaktadır. Örnek 8 ve Problem 4.15'ten 4.20'ye kadar bakınız.

ÖRNEK 8. $Y = C + I$, $C = C_0 + bY$ ve $I = I_0$ olmak üzere iki sektörlü bir ekonomik model varsayımı altında, $C_0 = 95$, $b = 0.8$ ve $I_0 = 75$ ise gelir dengesi (*a*) genel parametreler ile ve (*b*) verilen değerler kullanılarak iki farklı şekilde hesaplanabilir.

(*a*) Denge denklemi şu şekildedir:

$$Y = C + I$$

C ve I yerine yazılır.

$$Y = C_0 + bY + I_0$$

Sonrasında elde edilen denklem Y için çözülür.

$$Y - bY = C_0 + I_0$$

$$(1 - b)Y = C_0 + I_0$$

$$Y = \frac{1}{1 - b}(C_0 + I_0) = Y_e$$

Bu şekildeki çözüm indirgenmiş formda çözümdür. İndirgenmiş formda eşitlik içsel ya da bağımlı değişkenin (burada Y) dışsal ya da bağımsız değişkenlerin (C_0, I_0) ve parametrelerin (*b*) fonksiyonu olarak gösterilmesi şeklidir.

Açık fonksiyon eşitliğin solunda yalnızca içsel değişkenin sağında ise bütün dışsal değişken ve parametrelerin olduğu fonksiyondur.

(*b*) Gelir dengesinin miktarı parametrelerin değerlerinin (1) orijinal denklemde ya da (2) azaltılmış formda denklemde yerlerine yazılmalarıyla elde edilebilir.

(1)
$$Y = C_0 + bY + I_0$$
$$Y = 95 + 0.8Y + 75$$
$$Y - 0.8Y = 170$$
$$0.2Y = 170$$
$$Y_e = 850$$

(2)
$$Y = \frac{1}{1-b}(C_0 + I_0)$$
$$Y = \frac{1}{1-0.8}(95 + 75)$$
$$Y = \frac{1}{0.2}(170)$$
$$Y = 5(170)$$
$$Y_e = 850$$

$1/(1 - b)$ terimi *otonom harcama çarpanı* olarak tanımlanmaktadır. Otonom harcamalarda gerçekleşen her bir TL değerindeki harcama artışının toplam gelirde neden olduğu değişimi göstermektedir. Modelde b = marjinal tüketim eğilimi (MPC) olduğu için çarpan $1/(1 - \text{MPC})$ şeklinde de gösterilebilir. Problem 4.15'ten 4.20'ye kadar bakınız.

4.7 IS-LM ANALİZİ

IS eğrisi mal piyasasında denge durumunun gerçekleştiği tüm gelir ve faiz oranı kombinasyonlarından oluşmaktadır. LM eğrisi ise para piyasasında denge durumunun gerçekleştiği tüm gelir ve faiz oranı kombinasyonlarından oluşmaktadır. IS-LM analizi hem para piyasasının hem de mal piyasasının eş anlı olarak dengede olduğu durumdaki denge gelir ve faiz oranının tespit edilmesini amaçlamaktadır. Bu denge noktası, eş anlı bir denklem sisteminin çözümüyle bulunabilmektedir. Kısım 4.6'daki basit gelir dengesi belirleme modelinin aksine IS-LM modeli faiz oranı ve faiz oranının modele etkisi ile ilgilenmektedir. Örnek 9'a ve Problem 4.21'den 4.24'e kadar bakınız.

ÖRNEK 9. İki sektörlü bir ekonomide mal piyasası dengesi $Y = C + I$ durumunda sağlanmaktadır. Para piyasası dengesi ise M_s para arzının, *işlem güdüsü ile ve ihtiyat güdüsü ile para talebi* M_t ve *spekülasyon güdüsüyle para talebinin* M_w toplamı olan M_d para talebine eşit olduğu noktada gerçekleşmektedir. $C = 34 + 0.9Y$, $I = 41 - 80i$, $M_s = 325$, $M_t = 0.4Y$ ve $M_w = 65 - 124i$ olan iki sektörlü bir ekonomi varsayılmaktadır.

$Y = C + I$ durumunda mal piyasası dengesi (IS) gerçekleşmektedir. Değerler yerine yazılır,

$$Y = 34 + 0.9Y + 41 - 80i$$

$$Y - 0.9Y = 75 - 80i$$

$$0.1Y + 80i - 75 = 0 \tag{4.6}$$

$M_s = M_t + M_w$ durumunda para piyasası dengesi (LM) gerçekleşmektedir. Değerler yerine yazılır,

$$325 = 0.4Y + 65 - 124i$$

$$0.4Y - 124i - 260 = 0 \tag{4.7}$$

(4.6) ve (4.7) numaralı denklemler birlikte çözülerek her iki pazarın eş anlı dengede olduğu nokta bulunabilir.

$$0.1Y + 80i - 75 = 0 \tag{4.6}$$

$$0.4Y - 124i - 260 = 0 \tag{4.7}$$

Kısım 4.5'teki eleme yöntemi kullanılır ve denklem (4.6) –4 ile çarpılarak denklem (4.8) elde edilir. Denklemler toplanarak Y değişkeni elenir, denklem sistemi i için çözülür.

$$\begin{array}{r} -0.4Y - 320i + 300 = 0 \\ 0.4Y - 124i - 260 = 0 \\ \hline -444i + 40 = 0 \end{array} \qquad (4.8)$$

$$i = \frac{-40}{-444} \approx 0.09 = \%9 = i_e$$

Daha sonra $i = 0.09$ değeri (4.6) ya da (4.7)'de yerine yazılarak Y bulunur.

$$0.1Y + 80(0.09) - 75 = 0$$
$$0.1Y = 67.8$$
$$Y_e = 678$$

$Y = 678$ ve $i = 0.09$ olduğunda mal piyasası ve para piyasası birlikte denge durumunda olmaktadırlar. Bu noktada, $C = 34 + 0.9(678) = 644.2$, $I = 41 - 80(0.09) = 33.8$, $M_t = 0.4(678) = 271.2$ ve $M_w = 65 - 124(0.09) = 53.8$ değerlerini almaktadır. Bulunan denge değerlerinin sağlaması yapıldığında, $Y = C + I = 644.2 + 33.8 = 678$ ve $M_d = M_t + M_w = 271.2 + 53.8 = 325 = M_s$ cevabın doğru olduğu görülmektedir.

4.8. İKTİSADİ VE MATEMATİKSEL MODELLEME (OPSİYONEL)

Matematiksel modelleme ve iktisadi modelleme arasında zaman zaman farklılıklar olabilmektedir. Aşağıda standart formda verilen doğrusal arz ve talep denklemleri ele alınırsa;

$$\text{Arz: } 6P - 3Q = 36 \qquad (4.9a)$$

$$\text{Talep: } 8P + 2Q = 192 \qquad (4.9b)$$

İktisatta, ünlü İngiliz iktisatçı Alfred Marshall'ın başlattığı geleneğe uygun olarak fiyat bağımlı değişken olarak alınmaktadır. Denklemlerin eğim kesişim formu Q'ya göre P'nin çözülmesi yani Q miktarının bir fonksiyonu olarak yazılmasıyla oluşturulur:

$$\text{Arz: } P = \frac{1}{2}Q + 6 \qquad (4.10a)$$

$$\text{Talep: } P = -\frac{1}{4}Q + 24 \qquad (4.10b)$$

Matematiksel denklemlerde ilk olarak ünlü Fransız iktisatçı Leon Walras tarafından ortaya atılan miktarın Q bağımlı değişken olarak kullanıldığı denklemler oluşturulmaktadır. Denklemlerin eğim kesişim formu P'nin Q'ya göre çözümlenmesi yani Q miktarın P fiyat seviyesinin bir fonksiyonu olarak yazılmasıyla oluşturulur.

$$\text{Arz: } Q = 2P - 12 \qquad (4.11a)$$

$$\text{Talep: } Q = -4P + 96 \qquad (4.11b)$$

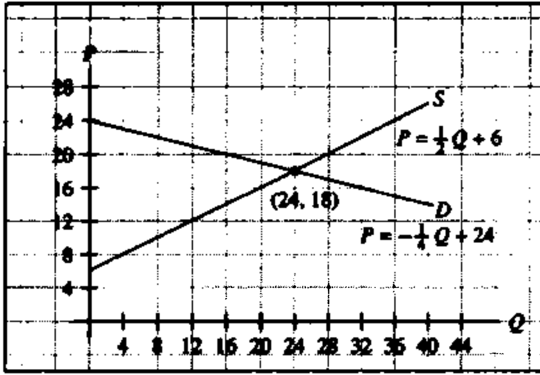
Bu iki farklı denklem türü grafiğe aktarıldığında y ekseninde farklı bağımlı değişkenler yer almaktadır. Başlangıçta kafa karışıklığına neden olsa da bu durum grafikleri ters çevirir ve sonuca etki etmez. Şekil 4-5'e bakınız.

Günümüzde pek çok iktisatçı Walras gibi talep edilen miktarı ve arz edilen miktarı fiyatın belirlediğini düşünseler de grafiklerini Marshall gibi bu arz edilen ve talep edilen miktarın fiyatı etkilediği anlamına gelen şekilde çizmeye devam etmektedirler ve Q değişkenini yatay eksene, P değişkenini dikey eksene yerleştirmektedirler.

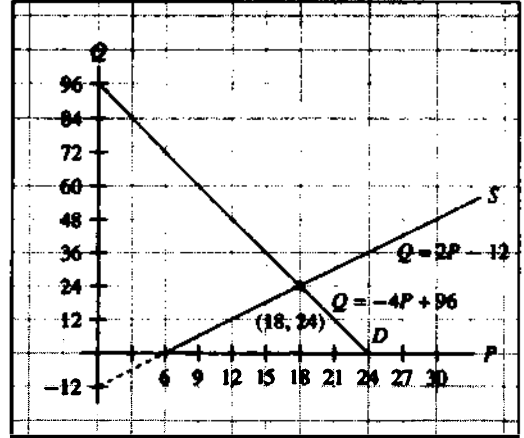
4.9 KAPALI FONKSİYON VE TERS FONKSİYON (OPSİYONEL)

(4.9a)'daki arz fonksiyonunu farklı bir formu ele alınırsa,

$$6P - 3Q - 36 = 0 \qquad (4.12)$$



(a)



(b)

Şekil 4-5

Denklem P ile Q arasındaki ilişkiyi vurgular ancak hangi değişkenin diğerine bağlı olduğunu belirtmez. Tekrar yazılırsa;

$$f(P, Q) = 6P - 3Q - 36 = 0 \qquad (4.13)$$

Bu türden fonksiyonlar *kapalı fonksiyon* olarak adlandırılır. Çünkü değişkenlerin her ikisi de eşitliğin aynı tarafındadır. Değişkenler arasında bir ilişki olasıdır ancak bağlılık yönü belirsizdir. Eğer bir kapalı fonksiyon (4.10a) ya da (4.11a)'da olduğu gibi matematiksel olarak bir değişken için diğer değişken türünden çözülebilirse kapalı olmayan fonksiyon şeklinde de yazılabilir:

$$P = g(Q) = \frac{1}{2}Q + 6 \qquad (4.14)$$

ya da

$$Q = h(P) = 2P - 12 \qquad (4.15)$$

Kapalı olmayan fonksiyonlarda bağımlı değişken eşitliğin soluna ve bağımsız değişken eşitliğin sağına yazılır. Böylelikle bağımlılığın sırası ve yönü açıkça belli olmaktadır.

(4.13)'te olduğu gibi bir kapalı fonksiyon (4.14) ve (4.15)'te olduğu gibi iki farklı açık fonksiyona dönüştürülebildiğinde bu fonksiyonlar birbirlerinin *ters fonksiyonu* olmaktadırlar. Ters fonksiyonlar önemlidir çünkü iktisatçılar ve matematikçiler arz talep analizlerinde farklı yollarla uğraşmaktadırlar. Temel iktisadi konularda karşılaşılan pek çok fonksiyonun tersi olmakla birlikte tüm fonksiyonların tersi bulunmamaktadır. $y = f(x)$ şeklinde gösterilen bir fonksiyonun tersi $x = f^{-1}(y)$ şeklinde gösterilmektedir. Bir fonksiyonun tersi eğer tüm y değerleri bir ve yalnızca bir x değerine karşılık geliyorsa vardır. Basit bir yöntemle, iktisadi bir fonksiyonun tersini almak için yapılması gereken şey Örnek 10'da gösterildiği şekilde verilen denklemi matematiksel olarak bağımlı değişkene göre bağımsız değişkeni çözmektir.

ÖRNEK 10. (4.14) ve (4.15) fonksiyonları birbirinin ters fonksiyonlarıdır:

$$g(Q) = h^{-1}(Q) \qquad (4.16)$$

$$h(P) = g^{-1}(P) \qquad (4.17)$$

(4.16)'daki ters ilişki (4.15)'teki denklem matematiksel olarak Q'ya göre P için çözülerek test edilebilir:

$$h(P): \quad Q = 2P - 12$$

$$-2P = -Q - 12$$

$$P = \frac{1}{2}Q + 6 = h^{-1}(Q) = g(Q)$$

Benzer şekilde (4.17)'deki ters ilişki (4.14)'teki denklem matematiksel olarak P'ye göre Q için çözülerek test edilebilir.

$$g(Q): \quad P = \frac{1}{2}Q + 6$$
$$-\frac{1}{2}Q = -P + 6$$
$$Q = 2P - 12 = g^{-1}(P) = h(P)$$

Çözümlü Problemler

DENKLEM SİSTEMLERİ

4.1. Aşağıdaki denklem sistemlerinin boyutlarını belirtiniz ve kısıtlı, kısıt altı ya da kısıt üstü olma durumlarını belirtiniz.

(*a*) $y = 4x_1 - 7x_2 - 6x_3$
$y = 9x_1 + 8x_2 - 4x_3$
$y = 7x_1 - 3x_2 + 2x_3$

(*b*) $5x + 2y - 8z = 42$
$9x - 7y + 4z = 37$
$6x - 3y - 5z = -9$

(*c*) $2x + 5y = 9$
$7x - 4y = 2$
$3x + 8y = 7$

(*a*) Üç denklem (n) ve dört değişken (v) – x_1, x_2, x_3 ve y – bulunmaktadır. Bu (3×4)'lük bir sistemdir. $n < v$ olduğu için kısıt altı bir sistemdir.

(*b*) Üç denklem ve üç değişken bulunduğu için (3×3)'lük bir sistemdir. $n = v$ olduğu için tam kısıtlı bir sistemdir.

(*c*) $n = 3$ ve $v = 2$ olduğu için (3×2)'lik bir sistemdir. $n > v$ olduğu için kısıt üstü bir sistemdir.

4.2. Problem 4.1'deki denklem sistemleri için ne tür sonuçların mümkün olduğunu belirtiniz.

(*a*) Kısıt altı bir sistemde sonsuz sayıda çözüm vardır ya da yeterli sayıda denklem olmadığı için tüm sistemi sağlayan tek bir çözüm olmayacağından çözüm yoktur.

(*b*) Tam kısıtlı bir sistemin tüm denklemleri sağlayan tek bir çözüm, birden çok çözümü bulunabilir ya da sistemi sağlayan hiçbir çözüm bulunmayabilir. İki ya da daha fazla denklemin denk ya da bağımlı denklemler ise sistemin birden çok çözümü bulunmaktadır. İki ya da daha fazla denklem tutarsız olursa sistemin çözümü olmamaktadır.

(*c*) Kısıt üstü bir sistemin tüm denklemleri sağlayan tek bir çözümü bulunabilir, hiçbir çözümü olmayabilir ya da birden çok çözümü bulunabilir. Eğer denklemler bağımlı değillerse tutarsızdırlar ve böyle sistemler genellikle çözümsüzdür.

GRAFİKSEL ÇÖZÜMLER

4.3. Aşağıdaki denklem sistemlerini (1) eğim-kesişim formlarını belirleyerek ve (2) grafiklerini çizerek grafiksel olarak çözünüz.

(*a*) $12x + 3y = 21 \qquad -2x + 4y = -8$

(1) Tüm denklemleri x'e göre y için çözerek eğim-kesişim formunda denklemler elde edilir.

$$12x + 3y = 21 \qquad -2x + 4y = -8$$
$$y = -4x + 7 \qquad y = \frac{1}{2}x - 2$$

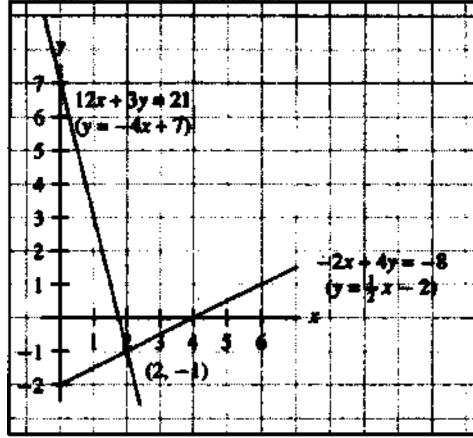
(2) Şekil 4-6'ya bakınız.

Şekil 4-6'daki kesişimde görüldüğü üzere çözüm $x = 2, y = -1$

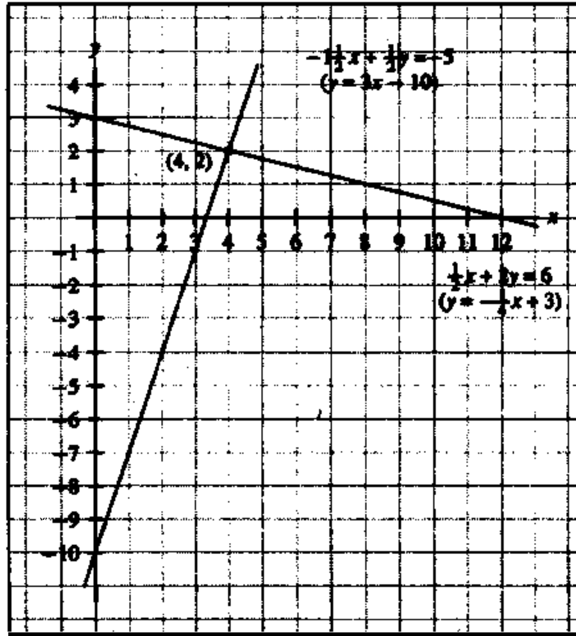
(*b*) $\frac{1}{2}x + 2y = 6 \qquad -1\frac{1}{2}x + 1/2y = -5$

(1) $y = -\frac{1}{4}x + 3 \qquad y = 3x - 10$

(2) Şekil 4-7'ye bakınız.



Şekil 4-6



Şekil 4-7

Şekil 4-7' de görüldüğü üzere çözüm $x = 4$, $y = 2$.

(c) $-6x + 2y = -16$ $\qquad x + 5y = 40$

(1) $y = 3x - 8$ $\qquad y = -\frac{1}{5}x + 8$

(2) Şekil 4-8'e bakınız.

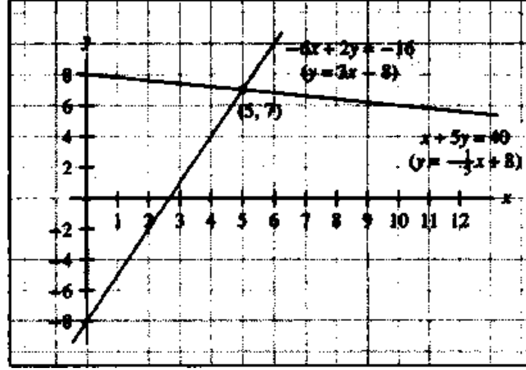
Şekil 4-8'de görüldüğü üzere çözüm $x = 5$, $y = 7$.

(d) $-8x + 4y = -12$ $\qquad 2x + 6y = 24$

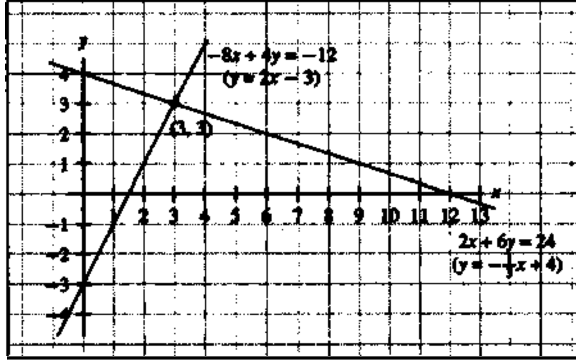
(1) $y = 2x - 3$ $\qquad y = -\frac{1}{3}x + 4$

(2) Şekil 4-9'a bakınız.

Şekil 4-9'da görüldüğü üzere çözüm $x = 3$, $y = 3$.



Şekil 4-8



Şekil 4-9

(*e*) $-3x + 2y = -6$ $\qquad x + \frac{1}{4}y = 2$

(1) $y = 1\frac{1}{2}x - 3$ $\qquad y = -4x + 8$

(2) Şekil 4-10'a bakınız.

Şekil 4-10'da görüldüğü üzere çözüm $x = 2$, $y = 0$.

(*f*) $5x - 10y = -30$ $\qquad -7x + 14y = 70$

(1) $y = \frac{1}{2}x + 3$ $\qquad y = -\frac{1}{2}x + 5$

(2) Şekil 4-11'e bakınız.

Şekil 4-11'de görüldüğü üzere kesişim yoktur ve bu nedenle çözüm yoktur. Denklemler tutarsızdır çünkü Kısım 4.2'de gösterildiği üzere $m_1 = m_2$ fakat $b_1 \neq b_2$. Tutarsız denklemlerin grafikleri paralel doğrulardır.

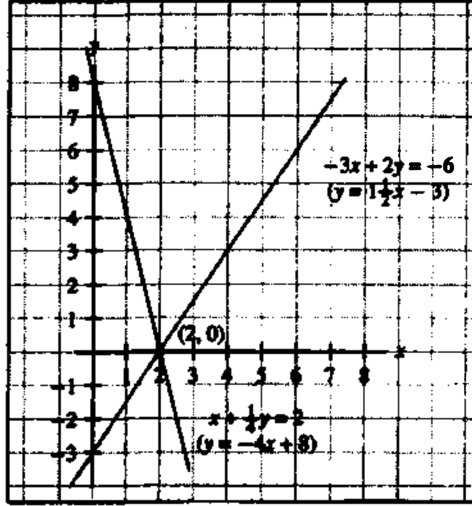
(*g*) $2x + 8y = 48$ $\qquad 3x + 12y = 72$

(1) $y = -\frac{1}{4}x + 6$ $\qquad y = -\frac{1}{4}x + 6$

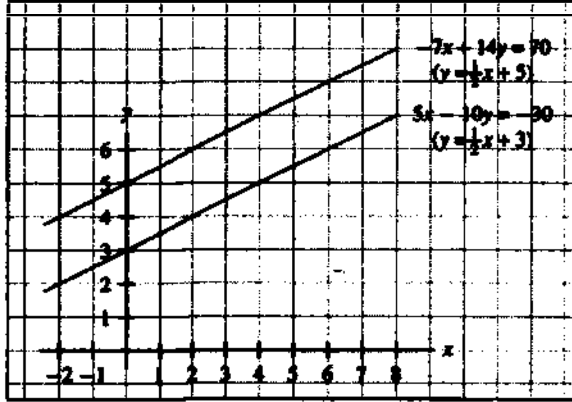
(2) Şekil 4-12'ye bakınız.

Şekil 4-12'de görüldüğü üzere tek bir çözüm yoktur ve sonsuz sayıda çözüm vardır. Çünkü iki denklem denk ya da bağımlıdır. Kısım 4.2'de gösterildiği üzere $m_1 = m_2$ ve $b_1 = b_2$. İki denklem birbirine denk olduğu için sistemde yalnızca bir bağımsız denklem vardır ve bu nedenle sistem kısıt altı bir sistemdir. Kısıt altı sistemlerin sonsuz çözümü olabilir ya da hiç çözümü olmayabilir. Ancak böyle sistemlerde asla tek bir çözüm yoktur.

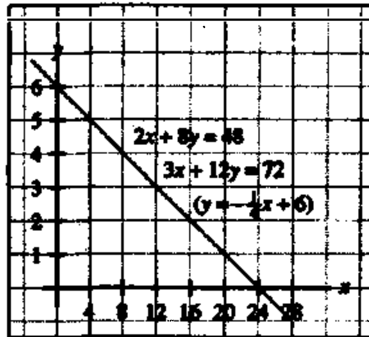
(*h*) $6x - 3y = -3$ $\qquad 7x - 7y = -14$ $\qquad 5x + 5y = 50$



Şekil 4-10



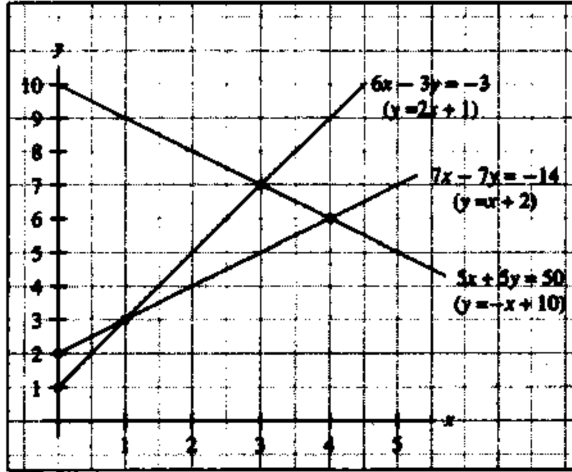
Şekil 4-11



Şekil 4-12

(1) $y = 2x + 1$ $y = x + 2$ $y = -x + 10$

(2) Şekil 4-13'e bakınız.



Şekil 4-13

Şekil 4-13'te görüldüğü üzere tek bir çözüm yoktur. Çünkü grafiklerin eş anlı kesiştiği tek bir nokta yoktur. $n > v$ durumundaki kısıt üstü sistemlerde nadiren tek bir çözüm bulunmaktadır.

ARZ VE TALEP

4.4. (1) Denklemleri ve (2) grafikleri kullanarak her bir pazar için denge fiyatını P_e ve denge miktarını Q_e bulunuz.

(*a*) Arz: $P = 3Q + 10$

Talep: $P = -\frac{1}{2}Q + 80$

(1) Denge için $P_s = P_d$ oluşturulur ve Q için çözülür.

$$3Q + 10 = -\frac{1}{2}Q + 80$$

$$3\frac{1}{2}Q = 70$$

$$Q = 20 = Q_e$$

Daha sonra bulunan $Q_e = 20$ değeri arz (ya da talep) denkleminde yerine yazılır.

$$P = 3(20) + 10$$
$$P = 70 = P_e$$

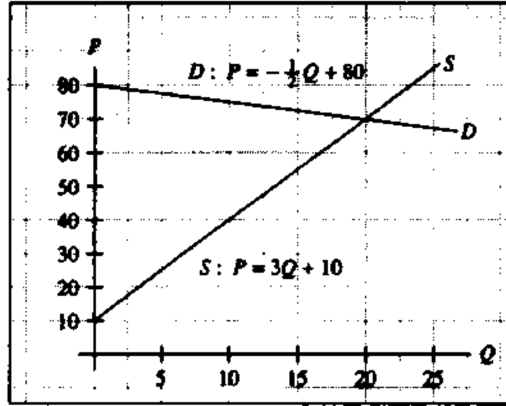
(2) Şekil 4-14'e bakınız.

(*b*) Arz: $P = \frac{1}{4}Q + 200$

Talep: $P = -\frac{1}{2}Q + 800$

(1) $\frac{1}{4}Q + 200 = -\frac{1}{2}Q + 800$

$$\frac{3}{4}Q = 600$$
$$Q = 800 = Q_e$$

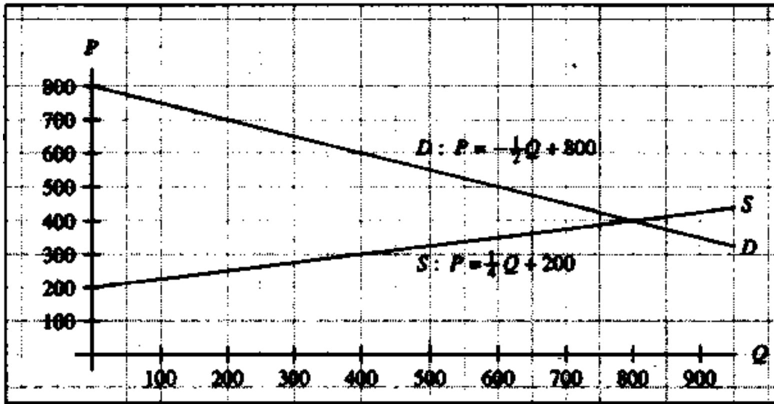


Şekil 4-14

$Q_e = 800$ değeri arz (ya da talep) denkleminde yerine yazılır.

$$P = \frac{1}{4}(800) + 200 = 400 = P_e$$

(2) Şekil 4-15'e bakınız.



Şekil 4-15

4.5. Aşağıdaki (1) denklemleri ve (2) grafikleri kullanarak arz ve talebin matematiksel modelleri için denge fiyat ve miktarını bulunuz.

(*a*) Arz: $Q = 5P + 10$
Talep: $Q = -3P + 50$

(1) $Q_s = Q_d$ eşitlenerek P için çözülür.

$$5P + 10 = -3P + 50$$

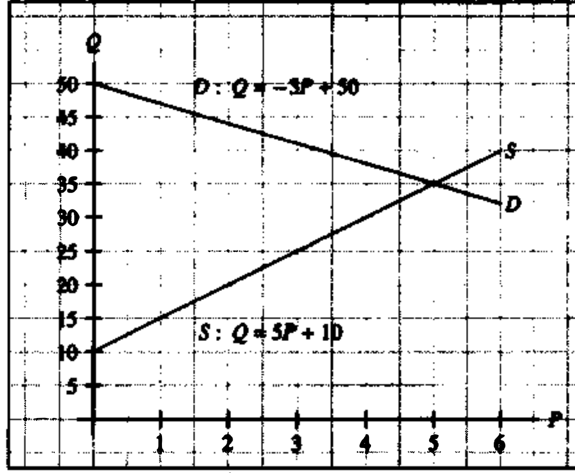
$$8P = 40$$

$$P = 5 = P_e$$

Daha sonra $P_e = 5$ değeri arz (ya da talep) denkleminde yerine yazılır.

$$Q = 5(5) + 10 = 35 = Q_e$$

(2) Şekil 4-16'ya bakınız. Q değerinin y eksenine yazıldığına dikkat ediniz.



Şekil 4-16

(*b*) Arz: $Q = \frac{2}{3}P + 150$

Talep: $Q = -\frac{1}{3}P + 450$

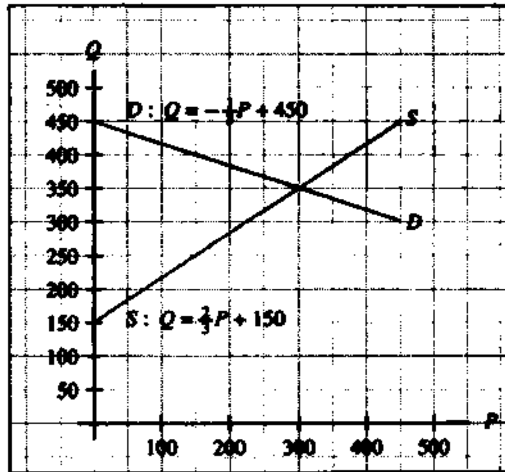
(1) $\frac{2}{3}P + 150 = -\frac{1}{3}P + 450$

$$P = 300 = P_e$$

Daha sonra $P_e = 300$ değeri arz (ya da talep) denkleminde yerine yazılır.

$$Q = \frac{2}{3}(300) + 150 = 350 = Q_e$$

(2) Şekil 4-17'ye bakınız.



Şekil 4-17

BAŞABAŞ NOKTASI ANALİZİ

4.6. Aşağıda toplam gelir fonksiyonları $R(x)$ ve toplam maliyet fonksiyonları $C(x)$ verilen firmaların başabaş noktalarını belirleyiniz. (1) Kâr fonksiyonunu $\pi(x)$ belirleyip, sıfıra eşitleyip, x için çözerek ve (2) $R(x) = C(x)$ eşitliğini sağlayıp x için çözerek ve (3) $R(x)$ fonksiyonunun ve $C(x)$ fonksiyonunun grafiklerini çizip kesişim noktalarını belirleyerek bu işlemi gerçekleştiriniz.

(*a*) $R(x) = 55x$
$C(x) = 30x + 250$

(1) Kar fonksiyonunu $\pi(x)$ bulunur,

$$\pi(x) = R(x) - C(x) = 55x - (30x + 250) = 25x - 250$$

Sıfıra eşitleyerek x için çözülür.

$$5x - 250 = 0$$

$x = 10$ Başabaş noktası çıktı miktarı

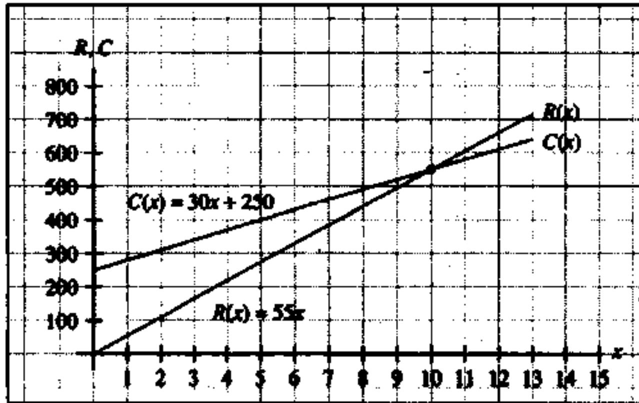
(2) $R(x) = C(x)$ eşitliği sağlanır ve x için çözülür.

$$55x = 30x + 250$$

$$25x = 250$$

$x = 10$ Başabaş noktası çıktı miktarı

(3) Şekil 4-18'e bakınız.



Şekil 4-18

(*b*) $R(x) = 50x$
$C(x) = 35x + 90$

(1) Kar fonksiyonu sıfıra eşitlenir $\pi(x) = 0$ ve x için çözülür.

$$\pi(x) = 50x - (35x + 90) = 0$$
$$15x - 90 = 0$$

$x = 6$ Başabaş noktası çıktı miktarı

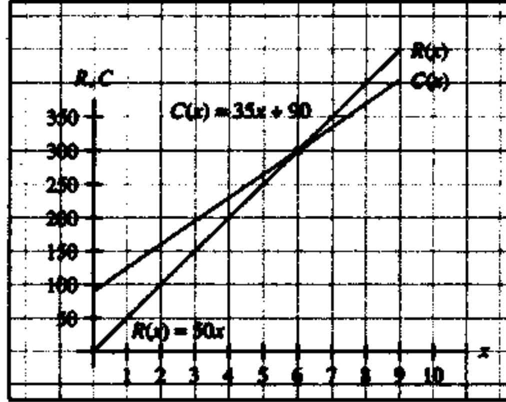
(2) $R(x) = C(x)$ eşitliği sağlanır ve x için çözülür.

$$50x = 35x + 90$$

$$15x = 90$$

$$x = 6 \qquad \text{Başabaş noktası çıktı miktarı}$$

(3) Şekil 4-19'a bakınız.



Şekil 4-19

4.7. Aşağıda ikinci dereceden toplam gelir fonksiyonları $R(x)$ ve doğrusal toplam maliyet fonksiyonları $C(x)$ verilen firmaların başabaş noktalarını belirleyiniz. (1) Kâr fonksiyonunu $\pi(x)$ belirleyip, sıfıra eşitleyip, x için çözerek ve (2) $R(x) = C(x)$ eşitliğini sağlayıp x için çözerek ve (3) $R(x)$ fonksiyonunun ve $C(x)$ fonksiyonunun grafiklerini çizip kesişim noktalarını belirleyerek bu işlemi gerçekleştiriniz.

(*a*) $R(x) = -4x^2 + 72x \qquad C(x) = 16x^2 + 180$

(1) $\pi(x) = -4x^2 + 72x - (16x + 180) = -4x^2 + 56x - 180$

Kar fonksiyonu sıfıra eşitlenir $\pi(x) = 0$ ve çarpanlarına ayrılır.

$$-4x^2 + 56x - 180 = 0$$

$$-4(x^2 - 14x + 45) = 0$$

$$(x - 5)(x - 9) = 0$$

$$x = 5 \qquad x = 9 \qquad \text{Başabaş noktası çıktı miktarları}$$

(2) $R(x) = C(x)$ eşitliği sağlanır

$$-4x^2 + 72x = 16x + 180$$

$$-4x^2 + 56x - 180 = 0$$

Sonra (1)'de olduğu gibi çarpanlarına ayrılır,

$$x = 5 \qquad x = 9 \text{ Başabaş noktası çıktı miktarları}$$

(3) İkinci dereceden denklemin $R(x) = -4x^2 + 72x$ grafiğini çizebilmek için Kısım 3.6'daki kurallar uygulanır.

(i) $a = -4 < 0$ olduğu için parabolün kolları aşağıya doğrudur.

(ii) $x = \dfrac{-b}{2a}$ $\qquad$ $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

$$x = \frac{-(72)}{2(-4)} = 9 \qquad y = \frac{4(-4)(0) - (72)^2}{4(-4)} = \frac{-5184}{-16} = 324$$

Tepe noktası: (9, 324)

(iii) Gelir fonksiyonu sıfıra eşitlenir $R(x) = 0$ ve çarpanlarına ayrılarak x eksenini kestiği noktalar belirlenir.

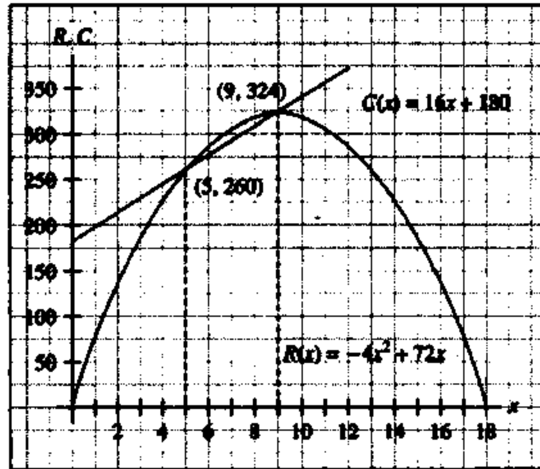
$$-4x^2 + 72x = 0$$

$$-4x(x - 18) = 0$$

$$-4x = 0 \qquad x - 18 = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 18$$

Denklemin x eksenini kestiği noktalar (0, 0) noktası ve (18, 0) noktalarıdır. $R(x)$ ve $C(x)$ fonksiyonlarının grafiklerini ve kesişim noktalarını görmek için Şekil 4-20'ye bakınız.



Şekil 4-20

(*b*) $R(x) = -5x^2 + 750x$ $\qquad$ $C(x) = 100x + 20{,}000$

(1) Kar fonksiyonu sıfıra eşitlenir $\pi(x) = 0$ ve çarpanlarına ayrılır.

$$\pi = -5x^2 + 650x - 20{,}000 = 0$$

$$-5(x^2 - 130x + 4000) = 0$$

$$(x - 50)(x - 80) = 0$$

$x = 50$ $\qquad$ $x = 80$ $\qquad$ Başabaş noktası çıktı miktarları

(2) $R(x) = C(x)$ eşitlenir.

$$-5x^2 + 750x = 100x + 20{,}000$$

(1)'de olduğu gibi çarpanlarına ayrılır,

$x = 50$ $\qquad$ $x = 80$ $\qquad$ Başabaş noktası çıktı miktarları

(3) İkinci dereceden denklemin $R(x) = -4x^2 + 72x$ grafiği yukarıdaki gibi çizilir

(i) $a = -5 < 0$ olduğu için parabolün kolları aşağıya doğrudur.

(ii) $x = \dfrac{-(750)}{2(-5)} = 75$ $\quad y = \dfrac{4(-5)(0) - (750)^2}{4(-5)} = \dfrac{-562{,}500}{-20} = 28{,}125$

Tepe noktası: (75, 28,125)

(iii) Gelir fonksiyonu sıfıra eşitlenir $R(x) = 0$ ve çarpanlarına ayrılarak x eksenini kestiği noktalar belirlenir.

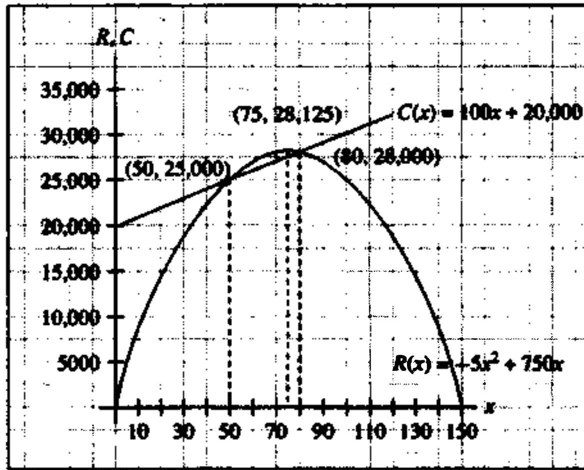
$$-5x^2 + 750x = 0$$

$$-5x(x - 150) = 0$$

$$-5x = 0 \qquad x - 150 = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 150$$

Denklemin x eksenini kestiği noktalar (0, 0) noktası ve (150, 0) noktalarıdır. Şekil 4-21'e bakınız.



Şekil 4-21

ELEME VE YERİNE KOYMA YÖNTEMLERİ

4.8. Aşağıdaki eş anlı denklem sistemlerini eleme yöntemini kullanarak çözünüz.

(*a*) $$3x + 4y = 37 \qquad (4.18)$$

$$8x + 5y = 76 \qquad (4.19)$$

x değişkenini elemek için (4.18) numaralı denklem 8 ile ve (4.19) numaralı denklem 3 ile çarpılır,

$$24x + 32y = 296 \qquad (4.20)$$

$$24x + 15y = 228 \qquad (4.21)$$

(4.20) numaralı denklemden (4.21) numaralı denklem çıkarılarak x değişkeni sistemden elenir.

$$17y = 68$$

$$y = 4$$

Daha sonra $y = 4$ değeri (4.18) ya da (4.19) numaralı denklemde yerine yazılarak x değeri elde edilir.

$$3x + 4(4) = 37$$
$$x = 7$$

(*b*)

$$5x + 2y = 46 \quad (4.22)$$

$$9x - 7y = -2 \quad (4.23)$$

Burada y değişkeni elemeye daha uygundur. Bu nedenle (4.22) numaralı denklem 7 ile ve (4.23) numaralı denklem 2 ile çarpılır.

$$35x + 14y = 322 \quad (4.24)$$

$$18x - 14y = -4 \quad (4.25)$$

(4.24) numaralı denklem ile (4.25) numaralı denklem taraf tarafa toplanarak y değişkeni elenir.

$$53x = 318$$
$$x = 6$$

$x = 6$ değeri (4.22) ya da (4.23) numaralı ilk denklemlerin birinde yerine yazılır,

$$5(6) + 2y = 46$$
$$y = 8$$

4.9. Aşağıdaki eş anlı denklem sistemlerini yerine koyma yöntemini kullanarak çözünüz.

(*a*)

$$12x - 7y = 106 \quad (4.26)$$

$$8x + y = 82 \quad (4.27)$$

(4.27) numaralı denklem y için çözülür,

$$y = 82 - 8x \quad (4.28)$$

(4.28) numaralı denklemde elde edilen y değeri (4.26) numaralı denklemde yerine yazılır,

$$12x - 7(82 - 8x) = 106$$
$$12x - 574 + 56x = 106$$
$$x = 10$$

Sonrasında bulunan $x = 10$ değeri (4.26) ya da (4.27) numaralı denklemlerden birinde yerine yazılır,

$$12(10) - 7y = 106$$
$$y = 2$$

(*b*)

$$5x + 24y = 100 \quad (4.29)$$

$$7x - 15y = -103 \quad (4.30)$$

(4.29) x için çözülür,

$$5x = 100 - 24y$$

$$x = 20 - 4.8y \quad (4.31)$$

(4.31) numaralı denklem (4.30) numaralı denklemde yerine yazılır.

$$7(20-4.8y)-15y=-103$$

$$140-33.6y-15y=-103$$

$$-48.6y=-243$$

$$y=5$$

Son olarak bulunan $y=5$ değeri (4.29) ya da (4.30) numaralı denklemlerden birinde yerine yazılır,

$$5x+24(5)=100$$

$$x=-4$$

4.10. Aşağıda biber b ve patates p olmak üzere iki farklı mal piyasası için eş anlı denklem sistemleri belirtilmiştir. Her iki mal piyasası için yerine koyma metodu kullanarak denge fiyat ve miktarını belirleyiniz.

$$Q_b^s=15P_b-5 \qquad Q_p^s=32P_p-6$$

$$Q_b^d=-3P_b+P_p+82 \qquad Q_p^d=2P_b-4P_p+92$$

Her iki piyasada da denge için $Q^s=Q^d$ sağlanır.

$$Q_b^s=Q_b^d \qquad Q_p^s=Q_p^d$$

$$15P_b-5=-3P_b+P_p+82 \qquad 32P_p-6=2P_b-4P_p+92$$

$$18P_b-P_p=87 \qquad -2P_b+36P_p=98$$

Bu işlem sonucunda denklem sistemi iki denklemli ve iki değişkenli hale gelir.

$$18P_b-P_p=87 \qquad (4.32)$$

$$-2P_b+36P_p=98 \qquad (4.33$$

(4.32) numaralı denklem P_p için çözülür,

$$P_p=18P_b-87 \qquad (4.34)$$

Sonrasında (4.34) numaralı denklemde elde edilen sonuç (4.33) numaralı denklemde yerine yazılır ve P_p için çözülür.

$$-2P_b+36(18P_b-87)=98$$

$$-2P_b+648P_b-3132=98$$

$$P_b=5$$

Bulunan $P_b=5$ değeri (4.32) ya da (4.33) numaralı denklemlerden birinde yerine yazılarak P_p değeri bulunur.

$$18(5)-P_p=87$$

$$P_p=3$$

Son olarak elde edilen $P_b=5$ ve $P_p=3$ değerleri arz ya da talep denklemlerinde yerlerine yazılarak her iki piyasa için de denge Q_b ve Q_p miktarları elde edilir.

$$Q_b^d=-3(5)+(3)+82 \qquad Q_p^d=2(5)-4(3)+92$$

$$Q_b^d=70=Q_b^s \qquad Q_p^d=90=Q_p^s$$

4.11. Aşağıda pantolon t ve ceket j olmak üzere iki tamamlayıcı mal piyasası için denklem sistemleri belirtilmiştir. Her iki mal piyasası için de denge fiyat ve miktarını, eleme yöntemini kullanarak belirleyiniz.

$$Q_t^s=3P_t-60 \qquad Q_j^s=2P_j-120$$

$$Q_t^d=-5P_t-2P_j+410 \qquad Q_j^d=-P_t-3P_j+295$$

Her iki piyasada da denge için $Q^s = Q^d$ sağlanır.

$$Q_t^s = Q_t^d \qquad\qquad Q_j^s = Q_j^d$$

$$3P_t - 60 = -5P_t - 2P_j + 410 \qquad\qquad 2P_j - 120 = -P_t - 3P_j + 295$$

$$8P_t + 2P_j = 470 \qquad\qquad P_t + 5P_j = 415$$

Bu işlem sonucunda denklem sistemi iki denklemli ve iki değişkenli hale gelir.

$$8P_t + 2P_j = 470 \tag{4.35}$$

$$P_t + 5P_j = 415 \tag{4.36}$$

(4.36) numaralı denklem 8 ile çarpılır

$$8P_t + 40P_j = 3320 \tag{4.37}$$

Elde edilen (4.37) numaralı denklem (4.35) numaralı denklemden çıkarılır. Başka bir ifadeyle (4.37) numaralı denklemdeki tüm terimlerin işaretleri değiştirilir ve (4.35) numaralı denklem ile toplanır.

$$-38P_t = -2850$$
$$P_j = 75$$

Bulunan $P_j = 75$ değeri (4.35) ya da (4.36) numaralı denklemde yerine yazılır,

$$8P_t + 2(75) = 470$$
$$P_t = 40$$

Son olarak bulunan $P_j = 75$ ve $P_t = 40$ değerleri her iki piyasa için de arz ya da talep denklemlerinde yerine yazılır,

$$Q_t^d = -5(40) - 2(75) + 410 \qquad\qquad Q_j^d = -(40) - 3(75) + 295$$

$$Q_t^d = 60 = Q_t^s \qquad\qquad Q_j^d = 30 = Q_j^s$$

4.12. Eleme ve yerine koyma yöntemleri ikinci dereceden denklemleri çözmek için kullanılabilir. Aşağıda ikinci dereceden arz ve talep denklem sistemlerini yerine koyma yöntemini kullanarak çözünüz.

$$\text{Arz: } P - 3Q^2 + 10Q - 5 = 0 \tag{4.38}$$

$$\text{Talep: } P + Q^2 + 3Q - 20 = 0 \tag{4.39}$$

(4.38) numaralı denklem Q'ya göre P için çözülür.

$$P = 3Q^2 - 10Q + 5 \tag{4.40}$$

(4.40) numaralı denklemde elde edilen P değeri (4.39) numaralı denklemde yerine yazılır,

$$(3Q^2 - 10Q + 5) + Q^2 + 3Q - 20 = 0$$

$$4Q^2 - 7Q - 15 = 0$$

Kısım 3.5'teki ikinci dereceden denklem köklerinin çözüm formülü kullanılarak Q değişkeninin değeri elde edilir.

$$Q = 3 \qquad Q = -1.25$$

P ve Q değişkenleri iktisatta yalnızca pozitif değerler alabilecekleri için $Q = 3$ alınır ve bu değer (4.38), (4.39) ya da (4.40) numaralı denklemlerin birinde yerine yazılarak P değeri elde edilir.

$$P - 3(3)^2 + 10(3) - 5 = 0$$
$$P = 2$$

4.13. Aşağıda verilen denklem sisteminde P_e ve Q_e değerlerini bulabilmek için eleme yöntemini kullanınız.

$$\text{Arz: } P - 2Q^2 + 3Q + 21 = 0 \tag{4.41}$$

$$\text{Talep: } 3P + Q^2 + 5Q - 102 = 0 \tag{4.42}$$

(4.41) numaralı denklem 3 ile çarpılır,

$$3P - 6Q^2 + 9Q + 213 = 0 \qquad (4.43)$$

(4.42) numaralı denklemden (4.43) numaralı denklem çıkarılır. (4.43) numaralı denklemde toplamadan önce tüm terimlerin işaretlerinin değiştiğine dikkat ediniz.

$$7Q^2 - 4Q - 315 = 0$$

İkinci dereceden denklem çözüm formülü yardımıyla Q değeri bulunur.

$$Q = 7 \qquad Q \approx -6.43$$

$Q = 7$ değeri (4.41) numaralı denklemde ya da (4.42) numaralı denklemde yerine yazılır,

$$P - 2(7)^2 + 3(7) + 71 = 0$$
$$P = 6$$

4.14. Arz ve talep analizleri birbirleriyle ilişkili ikiden fazla piyasayı kapsayabilir. Aşağıda denklem sistemleri verilen her üç piyasa için de P_e ve Q_e değerlerini eleme yöntemi kullanarak bulunuz.

$$Q_{s1} = 6P_1 - 8 \qquad Q_{d1} = -5P_1 + P_2 + P_3 + 23$$
$$Q_{s2} = 3P_2 - 11 \qquad Q_{d2} = P_1 - 3P_2 + 2P_3 + 15$$
$$Q_{s3} = 3P_3 - 5 \qquad Q_{d3} = P_1 + 2P_2 - 4P_3 + 19$$

Her bir piyasada eşitliğin sağlanması için,

$$Q_{s1} = Q_{d1}$$
$$6P_1 - 8 = -5P_1 + P_2 + P_3 + 23$$
$$11P_1 - P_2 - P_3 = 31 \qquad (4.44)$$

$$Q_{s2} = Q_{d2}$$
$$3P_2 - 11 = P_1 - 3P_2 + 2P_3 + 15$$
$$-P_1 + 6P_2 - 2P_3 = 26 \qquad (4.45)$$

$$Q_{s3} = Q_{d3}$$
$$3P_2 - 5 = P_1 + 2P_2 - 4P_3 + 19$$
$$-P_1 - 2P_2 + 7P_3 = 24 \qquad (4.46)$$

Üç bilinmeyenli üç denklem elde edilir.

$$11P_1 - P_2 - P_3 = 31 \qquad (4.44)$$
$$-P_1 + 6P_2 - 2P_3 = 26 \qquad (4.45)$$
$$-P_1 - 2P_2 + 7P_3 = 24 \qquad (4.46)$$

3 × 3 şeklindeki sistemin çözümünde şu üç işlem basamağı büyük kolaylık sağlamaktadır: 1) Üç denklemden herhangi ikisini kullanarak değişkenlerden biri elenir; 2) daha sonra üçüncü denklem ile önceki seçilen iki denklemden biri kullanılarak aynı değişken yine elenir; 3) bu işlemler sonucunda iki bilinmeyenli iki yeni denklem elde edilecektir. Bu denklemler daha önce anlatılan yöntemler ile çözülerek ilgili değerler elde edilir.

(1) Elemek için P_2 değişkeni seçilerek (4.44) numaralı denklem 2 ile çarpılır.

$$22P_1 - 2P_2 - 2P_3 = 62 \qquad (4.47)$$

(4.46) numaralı denklemden (4.47) numaralı denklem çıkarılır.

$$-23P_1 + 9P_3 = -38 \qquad (4.48)$$

(2) (4.46) numaralı denklem 3 ile çarpılır.

$$-3P_1 - 6P_2 + 21P_3 = 72 \qquad (4.49)$$

Daha sonra daha önce kullanılmamış denklem olan (4.45) numaralı denklem ile toplanır.

$$-4P_1 + 19P_3 = 98 \qquad (4.50)$$

(3) Bu işlemler sonucunda daha önce anlatılan yöntemlerle çözülebilen iki bilinmeyenli iki denklem elde edilir.

$$-23P_1 + 9P_3 = -38 \qquad (4.48)$$

$$-4P_1 + 19P_3 = 98 \qquad (4.50)$$

$$P_1 = 4 \qquad P_3 = 6$$

Daha sonra $P_1 = 4$ ve $P_3 = 6$ değerlerini (4.44), (445) ve (4.46) numaralı denklemlerin birinde yerine yazılır,

$$11(4) - P_2 - (6) = 31$$

$$P_2 = 7$$

GSYİH BELİRLEME MODELİ

4.15. (*a*) İndirgenmiş denklem formunu bulunuz, (*b*) gelir düzeyi eşitliğini (1) doğrudan ve (2) aşağıda verilen indirgenmiş form ile çözünüz.

$$Y = C + I + G \qquad C = C_0 + bY \qquad I = I_0 \qquad G = G_0$$

Burada $C_0 = 135$, $b = 0.8$, $I_0 = 75$ ve $G_0 = 30$ şeklindedir.

(*a*) Kısım 4.6'dan,

$$Y = C + I + G$$

Verilen değerler yerine yazılır ve parametreler (b) ve dışsal değişkenlere (C_0, I_0, G_0) göre Y değeri elde edilir.

$$Y = C_0 + bY + I_0 + G_0$$

$$Y - bY = C_0 + I_0 + G_0$$

$$(1 - b)Y = C_0 + I_0 + G_0$$

$$Y_e = \frac{1}{1-b}(C_0 + I_0 + G_0)$$

(*b*) (1)

$$Y = C + I + G$$

$$Y = 135 + 0.8Y + 75 + 30$$

$$Y - 0.8Y = 240$$

$$0.2Y = 240$$

$$Y_e = 1200$$

(2)

$$Y = \frac{1}{1-b}(C_0 + I_0 + G_0)$$

$$Y = \frac{1}{1-0.8}(135 + 75 + 30)$$

$$Y = \frac{1}{0.2}(240)$$

$$Y = 5(240)$$

$$Y_e = 1200$$

4.16. Aşağıda verilen değerleri kullanarak denge gelir seviyesini (Y_e) hesaplayınız.

$$Y = C + I + G$$

$$C = 125 + 0.8Y,\ I = 45 \ ve\ G = 90$$

Problem 4.15'ten denge gelir seviyesinin indirgenmiş formu bilinmektedir.

$$Y_e = \frac{1}{1-b}(C_0 + I_0 + G_0)$$

ve b = MPC = 0.8 olduğu için çarpan $1/(1-b) = 5$'tir. Bu bilgiyi kullanarak denge gelir seviyesi kısa yoldan hesaplanabilir.

$$Y_e = 5(125 + 45 + 90) = 1300$$

4.17. Aşağıda yatırımın otonom değil gelirin bir fonksiyonu olarak verildiği modelde (a) indirgenmiş formu, (b) denge gelir seviyesini ve (c) çarpan etkisini bulunuz.

$$Y = C + I \qquad C = C_0 + bY \qquad I = I_0 + aY$$

ve $C_0 = 65$, $I_0 = 70$, $b = 0.6$ ve $a = 0.2$

(a)

$$Y = C + I$$

$$Y = C_0 + bY + I_0 + aY$$

$$Y - bY - aY = C_0 + I_0$$

$$(1 - b - a)Y = C_0 + I_0$$

$$Y_e = \frac{1}{1 - b - a}(C_0 + I_0)$$

(b) Değerler yerine yazılarak kısa yoldan çözülür, istenirse düzenlenmiş form kullanılarak da çözülebilir.

$$Y = C + I$$

$$Y = 65 + 0.6Y + 70 + 0.2Y$$

$$Y - 0.6Y - 0.2Y = 135$$

$$0.2Y = 135$$

$$Y_e = 675$$

(c) Yatırım otonom değil gelirin bir fonksiyonu olduğunda çarpan $1/(1-b)$ den $1/(1-b-a)$ olarak değişmektedir. Bu durum çarpanın değerini arttırır çünkü kesrin paydası küçülmektedir. Problemdeki değerler yerine yazıldığında çarpanın değerinin arttığı görülmektedir.

$$\frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-0.6} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

$$\frac{1}{1-b-a} = \frac{1}{1-0.6-0.2} = \frac{1}{0.2} = 5$$

4.18. Aşağıda verilenleri kullanarak (a) indirgenmiş formu, (b) Y_e'nin sayısal değerini ve (c) tüketimin harcanabilir gelirin bir fonksiyonu olmasının ve götürü vergisinin alınmasının çarpana etkisini hesaplayınız.

$$Y = C + I \qquad C = C_0 + bY_d \qquad I = I_0 \qquad Y_d = Y - T$$

Burada $C_0 = 100$, $b = 0.6$, $I_0 = 40$ ve $T = 50$'dir.

(a)

$$Y = C + I = C_0 + bY_d + I_0$$

$$Y = C_0 + b(Y - T) + I_0 = C_0 + bY - bT + I_0$$

$$Y - bY = C_0 + I_0 - bT$$

$$Y_e = \frac{1}{1-b}(C_0 + I_0 - bT) \qquad (4.51)$$

(*b*)

$$Y = 100 + 0.6Y_d + 40 = 140 + 0.6(Y - T)$$
$$Y = 140 + 0.6(Y - 50) = 140 + 0.6Y - 30$$
$$Y - 0.6Y = 110$$
$$0.4Y = 110$$
$$Y_e = 275$$

Ya da değerler (4.51) numaralı denklemde yerine yazılır.

$$Y = \frac{1}{1 - 0.6}[100 + 40 - 0.6(50)]$$
$$Y = \frac{1}{0.4}(110)$$
$$Y_e = 275$$

(*c*) (*a*) bölümünde görüldüğü üzere modele götürü vergisi eklenilmesinin çarpana bir etkisi bulunmamaktadır. Yalnızca dışsal değişkenlerde $-bT$ kadarlık bir değişme gerçekleşmiştir. G_0, X_0 ya da Z_0 gibi diğer otonom değişkenlerin modele eklenmeleri de çarpan üzerinde bir etki göstermeyecektir.

4.19. Aşağıda verilenleri kullanarak (*a*) indirgenmiş formu, (*b*) Y_e'nin sayısal değerini ve (*c*) T gelir vergisinin t oranında modele dahil edilmesinin çarpana etkisini hesaplayınız.

$$Y = C + I \qquad C = C_0 + bY_d \qquad T = T_0 + tY \qquad Y_d = Y - T \qquad I = I_0$$

Burada $C_0 = 85$, $I_0 = 30$, $T_0 = 20$, $b = 0.75$, ve $t = 0.2$'dir.

(*a*)

$$Y = C + I = C_0 + bY_d + I_0$$
$$Y = C_0 + b(Y - T) + I_0 = C_0 + b(Y - T_0 - tY) + I_0$$
$$Y = C_0 + bY - bT_0 - btY + I_0$$
$$Y - bY + btY = C_0 + I_0 - bT_0$$
$$(1 - b + bt)Y = C_0 + I_0 - bT_0$$

$$Y_e = \frac{1}{1 - b + bt}(C_0 + I_0 - bT_0) \qquad (4.52)$$

(*b*)

$$Y = C + I = 85 + 0.75Y_d + 30 = 115 + 0.75(Y - T)$$
$$Y = 115 + 0.75(Y - 20 - 0.2Y)$$
$$Y = 115 + 0.75Y - 15 - 0.15Y$$
$$Y - 0.75Y + 0.15Y = 100$$
$$0.4Y = 100$$
$$Y_e = 250$$

Ya da değerler (4.52) numaralı denklemde yerine yazılır.

$$Y = \frac{1}{1 - 0.75 + (0.75)(0.2)}[85 + 30 - 0.75(20)]$$
$$Y_e = \frac{1}{0.4}(100) = 250$$

(*c*) Çarpan $1/(1-b)$ iken $1/(1-b+bt)$ olarak değişmiştir. Bu çarpanın değerini küçültmüştür çünkü payda büyümüş ve kesrin değeri azalmıştır.

$$\frac{1}{1-b}=\frac{1}{1-0.75}=\frac{1}{0.25}=4$$

$$\frac{1}{1-b+bt}=\frac{1}{1-0.75+0.75(0.2)}=\frac{1}{1-0.75+0.15}=\frac{1}{0.4}=2.5$$

4.20. Modele dış ticaret eklendiğinde ve marjinal ithalat eğiliminin z olduğu durumda (*a*) indirgenmiş formu, (*b*) denge gelir seviyesini ve (*c*) bu durumun çarpana etkisini hesaplayınız.

$$Y=C+I+G+(X-Z) \qquad C=C_0+bY_d \qquad Z=Z_0+zY$$

$$I=I_0 \qquad G=G_0 \qquad X=X_0$$

Burada $C_0=70, I_0=90, G_0=65, X_0=80, Z_0=40, b=0.9$ ve $z=0.15$'tir.

(*a*)

$$Y=C+I+G+(X-Z)$$

$$Y=C_0+bY+I_0+G_0+X_0-Z_0-zY$$

$$Y-bY+zY=C_0+I_0+G_0+X_0-Z_0$$

$$(1-b+z)Y=C_0+I_0+G_0+X_0-Z_0$$

$$Y_e=\frac{1}{1-b+z}(C_0+I_0+G_0+X_0-Z_0) \qquad (4.53)$$

(*b*) (4.53) numaralı denklemdeki indirgenmiş form kullanılır.

$$Y=\frac{1}{1-0.9+0.15}(70+90+65+80-40)$$

$$Y_e=\frac{1}{0.25}(265)=1060$$

(*c*) Modele marjinal ithalat eğiliminin eklenmesi paydanın büyümesine neden olduğu için çarpanı küçültür.

$$\frac{1}{1-b}=\frac{1}{1-0.9}=\frac{1}{0.1}=10$$

$$\frac{1}{1-b+z}=\frac{1}{1-0.9+0.15}=\frac{1}{0.25}=4$$

Ayrıca Problem 13.25 ve 13.26'ya bakınız.

IS-LM ANALİZİ

4.21. Para arzının $M_s=300$ olduğu durumda ve $C=102+0.7Y$, $I=150-100i$, $M_t=0.25Y$, $M_w=124-200i$ iken (*a*) ekonomiyi dengeye getiren gelir seviyesini ve faiz oranını bulunuz, (*b*) tüketim C, yatırım I, ihtiyat-işlem güdüsüyle para talebi M_t ve spekülasyon güdüsüyle para talebi M_w değerlerini hesaplayınız.

$$C=102+0.7Y \qquad I=150-100i \qquad M_t=0.25Y \qquad M_w=124-200i$$

(*a*) Mal piyasasında (IS) denge sağlanır,

$$Y=C+I=102+0.7Y+150-100$$

Tüm değerler eşitliğin soluna alınarak sıfıra eşitlenir.

$$Y-0.7Y-102-150+100i=0$$

$$0.3Y+100i-252=0 \qquad (4.54)$$

Sonrasında para piyasasında (LM) denge sağlanır.

$$M_s = M_t + M_w$$

$$300 = 0.25Y + 124 - 200i$$

$$0.25Y - 200i - 176 = 0 \qquad (4.55)$$

Elde edilen (4.54) ve (4.55) numaralı denklemler kullanılarak her iki piyasada eş anlı denge durumu sağlanır.

$$\text{IS} = 0.3Y + 100i - 252 = 0 \qquad (4.54)$$

$$\text{LM} = 0.25Y - 100i - 176 = 0 \qquad (4.55)$$

Kısım 4.5'te açıklandığı gibi (4.54) numaralı denklem 2 ile çarpılır.

$$0.6Y + 200i - 504 = 0 \qquad (4.56)$$

(4.55) ile (4.56) numaralı denklemler toplanarak i elenir.

$$0.85Y - 680 = 0$$

$$Y_e = 800$$

Daha sonra (4.54) ya da (4.55) numaralı denklemlerden herhangi birinde $Y = 800$ değeri yerine yazılır.

$$0.3(800) + 100i - 252 = 0$$

$$100i = 12$$

$$ie = 0.12$$

(*b*) $Y_e = 800$ ve $i_e = 0.12$ iken,

$$C = 102 + 0.7(800) = 662 \qquad M_t = 0.25(800) = 200$$

$$I = 150 - 100(0.12) = 138 \qquad M_w = 124 - 200(0.12) = 100$$

Ve

$$C + I = Y \qquad M_t + M_w = M_s$$

$$662 + 138 = 800 \qquad 200 + 100 = 300$$

4.22. Problem 4.21'de belirtilen para arzı miktarı 17 kat artarsa, (a) denge gelir ve faiz oranı nasıl etkilenir? (b) Yeni dengede C, I, M_t ve M_w değerleri ne olur?

(a) Eğer para arzı 17 kat artarsa yeni LM denklemi aşağıdaki şekilde gerçekleşir.

$$M_s = M_t + M_w$$

$$317 = 0.25Y + 124 - 200i$$

$$0.25Y - 200i - 193 = 0 \qquad (4.57)$$

IS denklemi değişmeden (4.54)'ten olduğu gibi kalır.

$$0.3Y + 100i - 252 = 0 \qquad (4.58)$$

(4.58) numaralı denklem 2 ile çarpılır.

$$0.6Y + 200i - 04 = 0 \qquad (4.59)$$

(4.59) ve (4.57) numaralı denklemler toplanır.

$$0.85Y - 697 = 0$$

$$Y_e = 820$$

(4.57) ya da (4.58) numaralı denklemlerin herhangi birinde $Y = 820$ değeri yerine yazılır.

$$0.25(820) - 200i - 193 = 0$$

$$200i = 12$$

$$i_e = 0.06$$

Diğer şartlar sabitken para arzında gerçekleşen bir artış denge gelir miktarında bir artışa ve denge faiz oranında bir azalışa neden olur.

(*b*) $Y_e = 800$ ve $i_e = 0.06$ iken,

$$C = 102 + 0.7(820) = 676 \qquad M_t = 0.25(820) = 205$$

$$I = 150 - 100(0.06) = 144 \qquad M_w = 124 - 200(0.06) = 112$$

Ve

$$C + I = Y \qquad M_s + M_t = M_w$$

$$676 + 144 = 820 \qquad 317 = 205 + 112$$

4.23. $M_s = 275$ ve $C = 89 + 0.6Y$, $I = 120 - 150i$, $M_t = 0.1Y$ ve $M_w = 240 - 250i$ olduğu durumda (a) denge gelir ve faiz oranını, (b) C, I, M_t ve M_w değerlerini hesaplayınız.

(*a*) IS için: $Y = 89 + 0.6Y + 120 - 150i$

$$0.4Y + 150i - 209 = 0 \qquad (4.60)$$

LM için: $M_s + M_t = M_w$

$$275 = 0.1Y + 240 - 250i$$

$$0.1Y - 250i - 35 = 0 \qquad (4.61)$$

Denge durumunda: $0.4Y + 150i - 209 = 0$ (4.60)

$$0.1Y - 250i - 35 = 0 \qquad (4.61)$$

(4.61) numaralı denklem 4 ile çarpılır

$$0.4Y - 1000i - 140 = 0 \qquad (4.62)$$

(4.60) numaralı denklemden (4.62) numaralı denklem çıkarılarak Y elenir.

$$1150i - 69 = 0$$

$$i_e = 0.06$$

$i_e = 0.06$ değeri (4.60) ya da (4.61) numaralı denklemlerin herhangi birinde yerine yazılır.

$$0.4Y + 150(0.06) - 209 = 0$$

$$0.4Y = 200$$

$$Y_e = 500$$

(*b*) $Y_e = 500$ ve $i_e = 0.06$ iken,

$$C = 89 + 0.6(500) = 389 \qquad M_t = 0.1(500) = 50$$

$$I = 120 - 150(0.06) = 111 \qquad M_w = 240 - 250(0.06) = 225$$

Ve

$$C + I = Y \qquad M_t + M_w = M_s$$

$$389 + 111 = 500 \qquad 50 + 225 = 275$$

4.24. Problem 4.23'te otonom yatırımlar 97'ye düştüğünde ne olacağını gösteriniz.

Eğer $I_0 = 97$ olursa IS denklemi aşağıdaki şekilde değişir,

$$Y = 89 + 0.6Y + 97 - 150i$$

$$0.4Y + 150i - 186 = 0 \qquad (4.63)$$

LM denklemi (*4.61*) numaralı denklemde olduğu şekilde kalır.

$$0.1Y - 250i - 35 = 0 \qquad (4.64)$$

Eşitlik sağlandığında,

$$0.4Y + 150i - 186 = 0 \qquad (4.63)$$

$$0.1Y - 250i - 35 = 0 \qquad (4.64)$$

(*4.64*) numaralı denklem 4 ile çarpılır,

$$0.4Y - 1000i - 140 = 0 \qquad (4.65)$$

(*4.63*) numaralı denklemden (4.65) numaralı denklem çıkarılır.

$$1150i - 46 = 0$$

$$i_e = 0.04$$

$i_e = 0.04$ (*4.63*) ya da (*4.64*) numaralı denklemlerin herhangi birinde yerine yazılır.

$$0.4Y + 150(0.04) - 186 = 0$$

$$0.4Y - 180 = 0$$

$$Y_e = 450$$

Otonom yatırımlarda bir düşüş, denge gelir seviyesinde bir azalış sağlarken denge faiz oranını düşürür.

MODELLEME VE TERS FONKSİYONLAR (OPSİYONEL)

4.25. Aşağıda standart formda arz ve talep fonksiyonları verilmiştir.

$$\text{Arz: } -7P + 14Q = -42 \qquad (4.66)$$

$$\text{Talep: } 3P + 12Q = 90 \qquad (4.67)$$

(*a*) Denklemleri eğim-kesişim form haline getiriniz, (1) iktisadi modellemeye ve (2) matematiksel modellemeye uygun olarak; (*b*) her bir model için denge fiyatının P_e ve denge miktarının Q_e sayısal değerlerini bulunuz; (*c*) P_e ve Q_e değerlerini bulmak için her iki denklem setinin de grafiklerini çiziniz.

(*a*) (1) İktisatçılar $P = f(Q)$ olarak kabul ettikleri için, eğim kesişim formundaki denklemler, her bir denklemin Q'ya göre P için çözülmesiyle bulunur. (*4.66*) Q'ya göre P için çözülür,

$$\text{Arz: } P = 2Q + 6 \qquad (4.68)$$

(4.67) Q'ya göre P için çözülür,

$$\text{Talep: } P = -4Q + 30 \qquad (4.69)$$

(2) Matematikçiler $Q = F(P)$ olarak kabul ettikleri için, eğim-kesişim formundaki denklemler, her bir denklemin P'ye göre Q için çözülmesiyle bulunur. (*4.66*) P'ye göre Q için çözülür,

$$\text{Arz: } Q = \frac{1}{2}P - 3 \qquad (4.70)$$

(4.67) P'ye göre Q için çözülür,

$$\text{Talep: } Q = \frac{1}{4}P + 7\frac{1}{2} \qquad (4.71)$$

(*b*) (1) $P_s = P_d = P_e$ eşitliği olduğu için (*4.68*) numaralı denklemdeki *P* ve (*4.69*) numaralı denklemdeki *P* değerleri birbirlerine eşitlenerek denklem çözülür.

$$2Q + 6 = -4Q + 30$$
$$6Q = 24 \qquad Q = 4 = Q_e$$

Daha sonra $Q = 4$ değeri (*4.68*) ya da (*4.69*) numaralı denklemlerin herhangi birinde yerine yazılır.

$$P = 2(4) + 6 = 14 = P_e$$

(2) $Q_s = Q_d = Q_e$ eşitliği olduğu için (*4.70*) numaralı denklemdeki *Q* ve (*4.71*) numaralı denklemdeki *Q* değerleri birbirlerine eşitlenerek denklem çözülür.

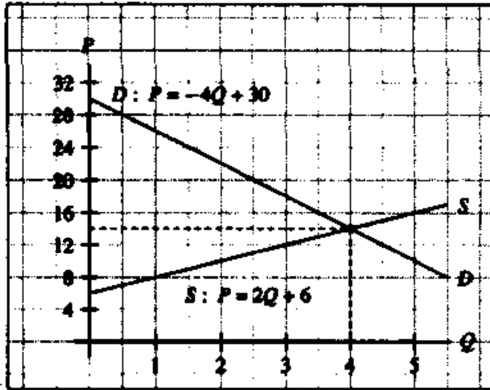
$$\frac{1}{2}P - 3 = -\frac{1}{4}P + 7\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}P = 10\frac{1}{2} \qquad P = 14 = P_e$$

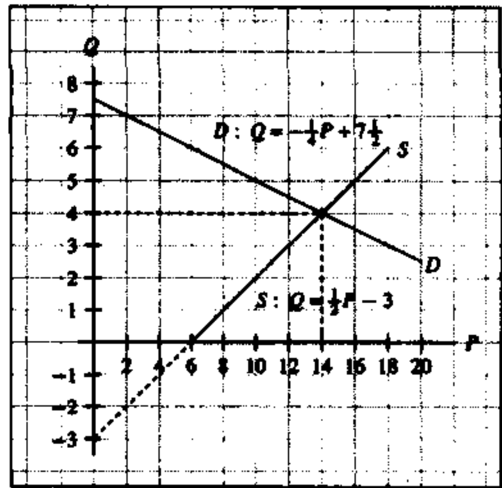
$P = 14$ değeri (4.70) ya da (4.71) numaralı denklemlerin herhangi birinde yerine yazılır.

$$Q = \frac{1}{2}(14) - 3 = 4 = Q_e$$

(*c*) İktisadi bir modelin grafiği çizilirken, Şekil 4-22(a)'da gösterildiği şekilde *Q* değişkeni *x* eksenine ve *P* değişkeni *y* eksenine yazılır. Matematiksel bir modelin grafiği çizilirken, Şekil 4-22(b)'de gösterildiği şekilde *P* değişkeni *x* eksenine ve *Q* değişkeni *y* eksenine yazılır.



(*a*)



(*b*)

Şekil 4-22

4.26. Aşağıda standart formda arz ve talep fonksiyonları verilmiştir.

$$\text{Arz: } 10P - 8Q = 50 \qquad (4.72)$$

$$\text{Talep: } 20P + 8Q = 700 \qquad (4.73)$$

(*a*) Denklemleri eğim-kesişim form haline getiriniz, (1) iktisadi modellemeye ve (2) matematiksel modellemeye uygun olarak; (*b*) her bir model için denge fiyatının P_e ve denge miktarının Q_e sayısal değerlerini bulunuz; (*c*) P_e ve Q_e değerlerini bulmak için her iki denklem setinin de grafiklerini çiziniz.

(*a*) (1) İktisadi model için;

$$\text{Arz: } P = \frac{4}{5}Q + 5 \qquad (4.74)$$

$$\text{Talep: } P = -\frac{2}{5}Q + 35 \qquad (4.75)$$

(2) Matematiksel model için;

$$\text{Arz: } Q = 1\frac{1}{4}P - 6\frac{1}{4} \qquad (4.76)$$

$$\text{Talep: } Q = -2\frac{1}{2}P + 87\frac{1}{2} \qquad (4.77)$$

(*b*) (1) (4.74) numaralı denklemdeki *P* ve (4.75) numaralı denklemdeki *P* değerleri eşitlenerek denklem çözülür.

$$\frac{4}{5}Q + 5 = -\frac{2}{5}Q + 35$$

$$6/5Q = 30 \qquad Q = 25 = Q_e$$

$Q = 25$ değeri (4.74) ya da (4.75) numaralı denklemlerin herhangi birinde yerine yazılır.

$$P = \frac{4}{5}(25) + 5 = 25 = P_e$$

(2) (4.76) numaralı denklemdeki *Q* ve (4.77) numaralı denklemdeki *Q* değerleri eşitlenerek denklem çözülür.

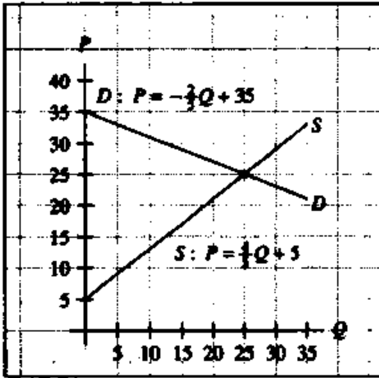
$$1\frac{1}{4}P - 6\frac{1}{4} = -2\frac{1}{2}P + 87\frac{1}{2}$$

$$3\frac{3}{4}P = 93\frac{3}{4} \quad . \quad P = 25 = P_e$$

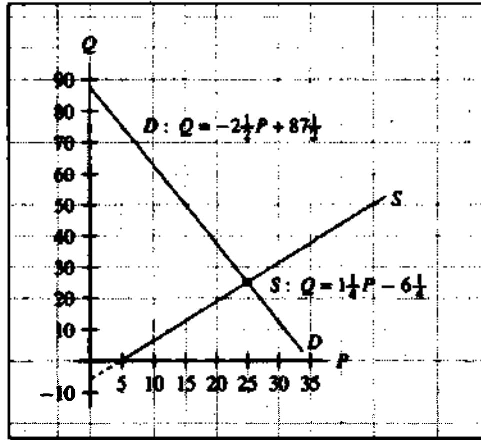
$P = 25$ değeri (4.76) ya da (4.77) numaralı denklemlerin herhangi birinde yerine yazılır.

$$Q = 1\frac{1}{4}(25) - 6\frac{1}{4} = 25\ Q_e$$

(*c*) İktisadi modelin grafiği çizilirken, Şekil 4-23(a)'da gösterildiği şekilde *Q* değişkeni x eksenine ve *P* değişkeni y eksenine yazılır. Matematiksel bir modelin grafiği çizilirken, Şekil 4-23(b)'de gösterildiği şekilde *P* değişkeni x eksenine ve *Q* değişkeni y eksenine yazılır.



(*a*)



(*b*)

Şekil 4-23

4.27. Aşağıda verilen kapalı fonksiyonda eğer varsa,

$$f(x, y) = 5x + 12y - 180 = 0 \qquad (4.78)$$

(*a*) $y = g(x)$ ve (*b*) $x = h(y)$ açık fonksiyonlarını bulunuz.

(*a*) Eğer varsa $y = g(x)$ açık fonksiyonunu bulmak için, $f(x, y)$ kapalı fonksiyonu *y* için *x*'e göre çözülür. Her bir *x* değeri için bir ve yalnızca bir *y* değeri bulunuyorsa, $y = g(x)$ fonksiyonu vardır. Böylece (4.78)'den,

$$12y = -5x + 180$$

$$y = -\frac{5}{12}x + 15$$

Her bir x değeri için yalnızca bir y değeri bulunduğu için fonksiyon sağlanır.

$$y = g(x) = -\frac{5}{12}x + 15 \tag{4.79}$$

(*b*) Eğer varsa $x = h(y)$ açık fonksiyonunu bulabilmek için, $f(x, y)$ kapalı fonksiyonu x için y'ye göre çözülür. Her bir y değeri için bir ve yalnızca bir x değeri bulunuyorsa, $x = h(y)$ açık fonksiyonu vardır. Böylece (4.78)'den,

$$5x = -12y + 180$$

$$x = -\frac{12}{5}y + 36$$

Her bir y değeri için yalnızca bir x değeri bulunduğu için fonksiyon sağlanır.

$$x = h(y) = -\frac{12}{5}y + 36 \tag{4.80}$$

İki değişkenli kapalı bir fonksiyondan iki farklı açık fonksiyon elde edilebildiği durumlarda, Problem 4.28'de gösterildiği gibi bu fonksiyonların birbirlerinin tersi olduğuna dikkat ediniz.

4.28. $y = f(x)$ şeklinde verilen bir fonksiyonun tersi $x = f^{-1}(y)$ şeklinde yazılır ve "x, y'nin ters fonksiyonudur" şeklinde okunur. Problem 4.27'de verilen fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulunuz.

(*a*) $$y = g(x) = -\frac{5}{12}x + 15 \tag{4.79}$$

(*b*) $$x = h(y) = -\frac{12}{5}y + 36 \tag{4.80}$$

Bir fonksiyonun tersini almak için bağımsız değişken yerine bağımlı değişkene göre çözülür, sonrasında fonksiyon şartlarını taşıyıp taşımadığı kontrol edilir. Şöyle ki,

(*a*) (4.79) numaralı denklemdeki $y = g(x) = -\frac{5}{12}x + 15$ denklemi y yerine x'e göre çözülür.

$$\frac{5}{12}x = -y + 15$$

$$x = -\frac{12}{5}y + 36$$

Her bir bağımsız değişkene (burada y) karşılık bir ve yalnızca bir bağımlı değişken (burada x) olduğu için $g^{-1}(y)$ ters fonksiyondur ve şu şekilde yazılır,

$$x = g^{-1}(y) = -\frac{12}{5}y + 36 \tag{4.81}$$

(*b*) (4.80) numaralı denklemdeki $x = h(y) = -\frac{12}{5}y + 36$ denklemi x'e göre y için göre çözülür.

$$-\frac{12}{5}y = -x + 36$$

$$y = -\frac{5}{12}x + 15$$

Her bir bağımsız değişkene (burada x) karşılık bir ve yalnızca bir bağımlı değişken (burada y) olduğu için $h^{-1}(x)$ ters fonksiyondur ve şu şekilde yazılır,

$$y = h^{-1}(x) = -\frac{5}{12}x + 15 \tag{4.82}$$

(4.81) numaralı denklemde gösterilen $g^{-1}(y)$ ters fonksiyonunun $h(y)$ fonksiyonuna eşit olduğu ve (4.82) numaralı denklemde gösterilen $h^{-1}(x)$ ters fonksiyonunun $g(y)$ fonksiyonuna eşit olduğu görülmektedir. İki değişkenli bir kapalı fonksiyon (4.78), her iki değişken için iki ayrı açık fonksiyon şeklinde ayrıldığında (4.79) ve (4.80), bu fonksiyonların birbirlerinin tersi olduğu daha önce gösterilmiştir. (4.79) ve (4.82)'den;

$$g(y) = h^{-1}(y) = -\frac{5}{12}y + 15$$

(4.80) ve (4.81)'den;

$$h(x) = g^{-1}(x) = -\frac{12}{5}x + 36$$

Ters fonksiyonun eğiminin ilkel fonksiyonun ya da fonksiyonun ilk halinin karşıtı olduğuna dikkat ediniz.

4.29. Aşağıda verilen fonksiyonun tersinin bulunup bulunmadığını (*a*) sayısal olarak ve (*b*) grafik yardımıyla test ediniz.

$$y = x^2 \tag{4.83}$$

(*a*) (4.83) numaralı denklem y'ye göre x için çözülür.

$$x = \pm\sqrt{y}$$

Her bir y değerine karşılık bir pozitif ve bir negatif olmak üzere iki x değeri gelmektedir. $x = \pm\sqrt{y}$ bir fonksiyon olmadığı için $y = x^2$ fonksiyonunun tersi yoktur.

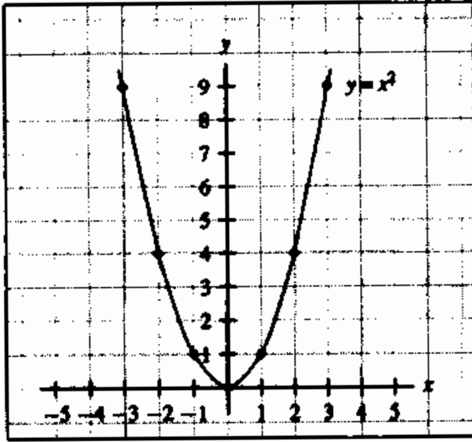
(*b*) Fonksiyonları sağlayan noktalar belirlenir, $y = x^2$ fonksiyonunun grafiği Şekil 4-24(a)'da olduğu şekilde ve $x = \pm\sqrt{y}$ denkliğinin grafiği ise 4-24(b)'de olduğu şekilde çizilir. $x = \pm\sqrt{y}$ denkliğinin grafiğinin dikey doğru testini geçemediği görülmektedir.

$y = x^2$

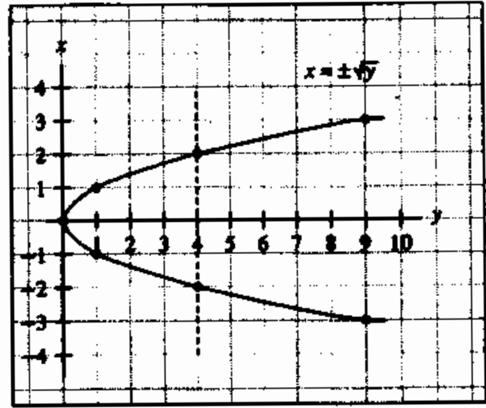
x	y
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

$x = \pm\sqrt{y}$

y	x
0	0
1	±1
4	±2
9	±3



(*a*)



(*b*)

Şekil 4-24

4.30. Tanım kümesi $x \geq 0$ olmak üzere $y = x^2$ ters fonksiyonunun bulunup bulunmadığını (*a*) sayısal olarak ve (*b*) grafik yardımıyla test ediniz.

(*a*) Tanım kümesi $x \geq 0$ olmak üzere $y = x^2$ fonksiyonunun tersi basitçe ;

$$x = \sqrt{y}$$

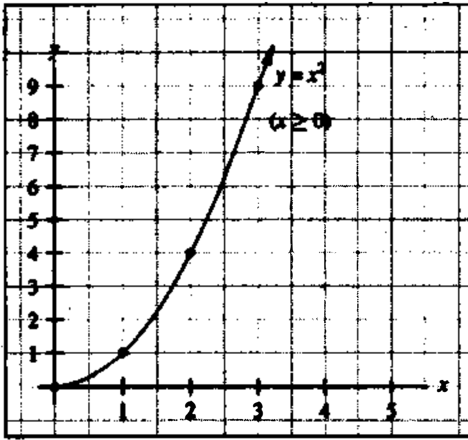
(*b*) Tablolar oluşturulur ve grafik Şekil 4-25'te olduğu şekilde çizilir. Tüm $x \geq 0$ değerleri için grafiğin dikey doğru testini geçtiği açıkça görülmektedir.

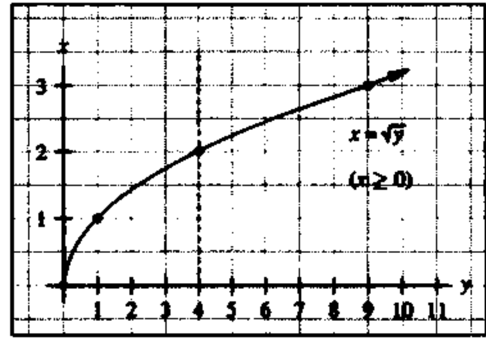
(*a*) $y = x^2$

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

(*b*) $x = \sqrt{y}$

y	x
0	0
1	1
4	2
9	3





(*a*) (*b*)

Şekil 4-25

Ek Problemler

4.31. Aşağıdaki denklem sistemlerinin boyutlarını belirtiniz.

(*a*) $z = 4w + 3x + 6y$
$z = 7w - 2x - 8y$
$z = 9w - 4x + 5y$

(*b*) $y = 6x_1 + 5x_2$
$y = 4x_1 + 9x_2$
$y = 3x_1 + 8x_2$

(*c*) $y = 8x + 5$
$y = 2x + 9$
$y = 3x + 7$

4.32. Aşağıdaki doğrusal denklem sistemlerini grafik yardımıyla çözünüz.

(*a*) $7x + 2y = 33$
$4x - 9y = -42$

(*b*) $6x - 8y = 10$
$5x + 3y = 47$

(*c*) $3x + 4y = 26$
$-x + 9y = 74$

(*d*) $6x - 2y = 26$
$15x - 5y = 85$

ARZ VE TALEP

4.33. Aşağıda her bir piyasa için verilen arz ve talep denklemleri için, dikey eksende P değişkeni olan iktisadi modele uygun grafikler yardımıyla denge fiyat ve miktarını (Q_e, P_e) bulunuz.

(*a*) Arz: $P = \frac{1}{4}Q + 2$
Talep: $P = -\frac{3}{4}Q + 22$

(*b*) Arz: $P = \frac{2}{5}Q + 3$
Talep: $P = -\frac{3}{5}Q + 33$

(*c*) Arz: $P = \frac{3}{8}Q + 1$
Talep: $P = -\frac{1}{2}Q\ 22$

(*d*) Arz: $P = \frac{2}{3}Q - 4$
Talep: $P = -\frac{1}{6} + 11$

4.34. Aşağıda $Q = f(P)$ şeklinde matematiksel modele uygun formatta verilen arz ve talep denklem sistemlerini matematiksel olarak çözerek her bir piyasa için denge fiyat ve miktarını bulunuz.

(*a*) Arz: $Q = 25P - 185$
Talep: $Q = -32P + 1240$

(*b*) Arz: $Q = 18P + 60$
Talep: $Q = -22P + 1260$

(*c*) Arz: $Q = 42P + 58$
Talep: $Q = -37P + 2112$

(*d*) Arz: $Q = 19P + 8$
Talep: $Q = -13P + 2184$

BAŞABAŞ NOKTASI ANALİZİ

4.35. Aşağıda tam rekabet piyasası koşulları altında faaliyet gösteren ve toplam gelir $R(x)$ ve toplam maliyet $C(x)$ fonksiyonları verilen firmaların her biri için başabaş noktalarını belirleyiniz.

(*a*) $R(x) = 125x$
$C(x) = 85x + 5200$

(*b*) $R(x) = 37.5x$
$C(x) = 22.25x + 1586$

(*c*) $R(x) = 495x$
$C(x) = 350x + 40{,}600$

(*d*) $R(x) = 85.5x$
$C(x) = 79.75x + 5888$

4.36. Aşağıdaki monopolcu firmaların her biri için başabaş noktalarını belirleyiniz.

(*a*) $R(x) = -x^2 + 22x$
$C(x) = 7x + 36$

(*b*) $R(x) = -5x^2 + 163x$
$C(x) = 23x + 800$

(*c*) $R(x) = -2x^2 + 85$
$C(x) = 11x + 420$

(*d*) $R(x) = -3x^2 + 201x$
$C(x) = 6x + 2250$

ELEME VE YERİNE KOYMA YÖNTEMİ

4.37. Aşağıdaki eş anlı denklem sistemlerinin çözümünde yerine koyma yöntemini kullanınız.

(*a*) $3x - y = 1$
$4x + 6y = 38$

(*b*) $7x + 2y = 62$
$x + 6y = 26$

(*c*) $5x + y = 26$
$8x - 3y = 60$

(*d*) $18x - 2y = 32$
$12x + 5y = -23$

4.38. Aşağıdaki denklem sistemlerinin çözümünde eleme yöntemini kullanınız.

(*a*) $4x - 3y = 22$
$7x - 6y = 38$

(*b*) $-5x + 8y = 42$
$15x + 9y = 6$

(*c*) $24x - 7y = 37$
$-6x + 9y = 27$

(*d*) $11x\ 3y = 53$
$4x - 18y = 172$

GELİR BELİRLEME MODELLERİ

4.39. Aşağıda verilen bilgileri kullanarak denge gelir seviyesini Y_e belirleyiniz.

(*a*) $Y = C + I,\ C = 150 + 0.75Y,\ I = 35$

(*b*) $Y = C + I,\ C = 275 + 0.75Y,\ I = 40 + 0.15Y$

(*c*) $Y = C + I + G,\ C = 320 + 0.65Y,\ I = 65 + 0.25Y,\ G = 150$

(*d*) $Y = C + I + G,\ C = 240 + 0.8Y_d,\ Y_d = Y - T,\ I = 70,\ G = 120,\ T = 50$

(*e*) $Y = C + I + G,\ C = 160 + 0.8Y_d,\ Y_d = Y - T,\ I = 80,\ G = 120,\ T = 40 + 0.25Y$

(*f*) $Y = C + I + G + (X - Z),\ C = 420 + 0.85Y,\ I = 130,\ G = 310,\ X = 90,\ Z = 30 + 0.25Y$

IS-LM EĞRİLERİ

4.40. Mal ve para piyasalarını eş anlı olarak dengeye getiren gelir ve faiz oranı seviyesini bulunuz. Aşağıda verilen durumlar altında tüketim *C,* yatırım *I,* spekülasyon güdüsüyle para talebi M_w ve işlem-ihtiyat güdüsüyle para talebi M_1 değerlerini hesaplayınız.

(*a*) Para arzı $M_s = 1000,\ C = 950 + 0.75Y,\ I = 310 - 125i,\ M_w = 264 - 175i$ ve $M_t = 0.15Y$

ve $M_s = 800,\ C = 1200 + 0.6Y,\ I = 227 - 120i,\ M_w = 127 - 180i$ ve $M_t = 0.2Y$.

Ek Problemlerin Cevapları

4.31. (a) 3 × 4 kısıt altı (b) 3 × 3 tam kısıtlı (c) 3 × 2 kısıt üstü

4.32. (*a*) (3, 6) (*b*) (7, 4) (*c*) (–2, 8) (*d*) hiç

4.33. (*a*) (2, 7) (*b*) (30, 15) (*c*) (24, 10) (*d*) (18, 8)

4.34. (*a*) $P_e = 25,\ Q_e = 440$ (*b*) $P_e = 30,\ Q_e = 600$
(*c*) $P_e = 26,\ Q_e = 1150$ (*d*) $P_e = 68,\ Q_e = 1300$

4.35. (*a*) $x = 130$ (*b*) $x = 104$ (*c*) $x = 280$ (*d*) $x = 1024$

4.36. (*a*) $x = 3, x = 12$ (*b*) $x = 8, x = 20$ (*c*) $x = 7, x = 30$ (*d*) $x = 15, x = 50$

4.37. (*a*) $x = 2, y = 5$ (*b*) $x = 8, y = 3$ (*c*) $x = 6, y = 4$ (*d*) $x = 1, y = -7$

4.38. (*a*) $x = 10, y = 6$ (*b*) $x = -2, y = 4$ (*c*) $x = 3, y = 5$ (*d*) $x = 7, y = -8$

4.39. (*a*) $Y_e = 740$ (*b*) $Y_e = 3150$ (*c*) $Y_e = 5350$ (*d*) $Y_e = 1950$
(*e*) $Y_e = 820$ (*f*) $Y_e = 2300$

4.40. (*a*) $Y = 5000,\ i = 0.08,\ C = 4700,\ I = 300,\ M_w = 250,\ M_t = 750$
(*b*) $Y = 3500,\ i = 0.15,\ C = 3300,\ I = 200,\ M_w = 100,\ M_t = 700$

Bölüm 5

LİNEER (VEYA MATRİS) CEBİR

5.1 GİRİŞ

Lineer (veya matris) cebir (1) doğrusal denklemlerden oluşan bir sistemin kısa, öz ve basitçe ifade edilmesini sağlar, (2) bir çözümün bulunup bulunmadığını belirlemeden önce kolay bir yöntem sağlar, (3) denklem sistemlerinin çözümüne kolaylık sağlar. Yalnızca doğrusal denklemlere uygulanabilir olmasına rağmen lineer cebir iktisatta ve işletmede büyük kolaylık sağlar çünkü pek çok ilişki doğrusal denklemler yardımıyla belirtilmekte ya da doğrusal denklemlere dönüştürülebilmektedir. Kısım 11.7'ye bakınız.

ÖRNEK 1. Aynı ürünlerin satıldığı pek çok mağazası bulunan bir firma için matrisler stok takibinde kolaylık sağlamaktadır.

Mağaza	Bilgisayar	Yazıcı	Monitör	Modem
1	120	145	130	85
2	165	105	155	90
3	110	115	95	80
4	185	170	165	105

Matrisin bir satırını okuyarak firma mağazasındaki ürün durumunu takip edebilmekte, bir sütunu okuyarak ise bir ürünün tüm mağazalardaki durumunu görebilmektedir.

5.2 TANIMLAR VE TERİMLER

Matris sayıların [7 2 6], parametrelerin [*a b c*] ya da değişkenlerin [*x y z*] anlamlı olarak dikdörtgensel bir biçimde dizilmeleridir. Sayılar (parametreler ya da değişkenler) matrisin *elemanlarıdır.* Yatay olarak dizilen elemanlar *satır* oluşturur, dikey olarak dizilen elemanlar ise *sütun* oluşturur. Satır sayısı r ve sütun sayısı c matrisin boyutunu $(r \times c)$ vermektedir. Satır sayısının her zaman sütun sayısından önce yazıldığına dikkat ediniz. Bir *kare matriste* satır sayısı her zaman sütun sayısına eşittir $(r = c)$. Eğer $(r \times 1)$ gibi bir matris pek çok satırdan ama tek bir sütundan oluşuyorsa böyle matrisler *sütun vektörü* olarak adlandırılır. Eğer $(1 \times c)$ gibi bir matris pek çok sütundan ama tek bir satırdan oluşuyorsa böyle matrisler satır vektörü olarak adlandırılır. Bir matrisin *devriği* A' ya da A^T şeklinde gösterilir. Bir matrisin devriği, satırları sütun olarak, sütunları da satır olarak yazılarak elde edilir.

ÖRNEK 2. Aşağıda verilen matrislerde,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 5 & 2 & 9 \end{bmatrix} \qquad C = [4 \quad 7 \quad 1] \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

A, aynı a parametresiyle gösterilen, birbirlerinden indislerle ayrılan (3×3) genel matristir. Matrisin tüm elemanları aynı parametre ile belirtilir, bulunduğu satır ve *sütun* numaralarını belirten indisler vardır. İlk indis parametrenin bulunduğu satırı, ikinci indis ise parametrenin bulunduğu sütunu belirtir. Konumlandırma matrislerde kesindir. Örneğin a_{13} elemanı matrisin birinci satırının üçüncü sütununda, a_{31} elemanı ise matrisin üçüncü satırının birinci sütununda bulunmaktadır.

B matrisi (2×3) bir matristir. Bir matrisin satır sayısını belirlemek için her zaman aşağı doğru satır sayısı; sütun sayısını belirlemek için ise her zaman yana doğru sütun sayısı sayılır. B matrisinde b_{12} elemanı 8'dir, b_{21} ise 5'tir. C matrisi (1×3) boyutlu bir satır vektörüdür.

X matrisi bir sütun vektörüdür ve (3 × 1) boyutludur. X matrisindeki tekil indisler yalnızca değişkenleri birbirlerinden ayırmaya yarar, tekil indisler hiçbir zaman konum belirtmezler.

A matrisinin satırları alınarak sütun olarak yazıldığında (ya da aynı şekilde sütunları alınarak satır olarak yazıldığında) A matrisinin devriği bulunur.

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Aynı şekilde X matrisinin devriği de şu şekildedir.

$$X' = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$$

5.3 MATRİSLERDE TOPLAMA VE ÇIKARMA

İki matrisin toplanabilmesi ($A + B$) ve çıkarılabilmesi ($A - B$) için boyutları aynı olmalıdır. Bir matrisin her bir elemanı, diğer matrisin karşılık gelen elemanı ile toplanır ya da çıkarılır. B matrisindeki b_{11} ile A matrisindeki a_{11}, b_{12} ile a_{12} ve bu şekilde devam edecek biçimde elemanlar arasında toplama ya da çıkarma işlemi yapılır. Örnek 3 ve 4 ile Problemler 5.4'ten 5.7'ye kadar bakınız.

ÖRNEK 3. $A + B$ matrislerin toplamları aşağıda gösterilmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7+3 & 4+9 \\ 6+8 & 5+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 14 & 7 \end{bmatrix}$$

$C - D$ matrislerin farkının alınması aşağıda gösterilmiştir.

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C - D = \begin{bmatrix} 8-5 & 3-7 \\ 2-8 & 9-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK 4. Aşağıda verilen D matrisi, Örnek 1'de gösterilen mağazaların yeni mal tedarik miktarlarını göstermektedir. Yeni stok durumunu gösteren matrisi hesaplayınız.

$$D = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 35 & 10 \\ 25 & 5 & 30 & 15 \\ 10 & 40 & 25 & 20 \\ 15 & 20 & 35 & 10 \end{bmatrix}$$

Yeni stok durumunu gösteren matrisi belirlemek için Örnek 1'de verilen S matrisi ile D matrisi toplanır. Her iki matrisin ilgili elemanlarının toplanması aşağıdaki şekilde gerçekleştirilir.

$$S + D = \begin{bmatrix} 120+20 & 145+15 & 130+35 & 85+10 \\ 165+25 & 105+5 & 155+30 & 90+15 \\ 110+10 & 115+40 & 95+25 & 80+20 \\ 185+15 & 170+20 & 165+35 & 105+10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 140 & 160 & 165 & 95 \\ 190 & 110 & 185 & 105 \\ 120 & 155 & 120 & 100 \\ 200 & 190 & 200 & 115 \end{bmatrix}$$

5.4 MATRİSLERİN SKALER ÇARPIMI

Lineer cebirde 7, –5 veya 0.08 gibi reel sayılar *skaler* olarak isimlendirilir. Matrisler bir sayısal değer ile çarpılırken, matrisin her bir elemanı o sayı ile çarpılır. Sayısal değere bağlı olarak matrisin elemanlarının değeri artıp ya da azalacağından bu işlem *skaler* çarpım olarak adlandırılır. Örnek 5 ve Problem 5.9'dan 5.11'e kadar bakınız.

ÖRNEK 5. $k = 5$ iken Ak skaler çarpımı aşağıda gösterilmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$Ak = \begin{bmatrix} 4(5) & 9(5) \\ 2(5) & 6(5) \\ 3(5) & 7(5) \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 20 & 45 \\ 10 & 30 \\ 15 & 35 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

5.5 VEKTÖREL ÇARPIM

A satır vektörü ile B sütun vektörünün çarpılabilmesi için her iki vektörün de aynı sayıda elemana sahip olması gerekmektedir. Sonuç, satır vektöründeki her bir elemanın sütun vektöründe karşılık gelen eleman ile birer birer çarpılıp, çarpımların toplanmasıyla elde edilir.

$$AB = (a_{11} \cdot b_{11}) + (a_{12} \cdot b_{21}) + (a_{13} \cdot b_{31}) + \dots$$

Böylelikle satır sütun çarpımının sonucu tek elemanlı bir matris şeklinde olacaktır. Satır-sütun vektörlerinin çarpımı konusu matrislerde önemli bir yere sahiptir. Matrislerde çarpma işleminin temelini oluşturur. Örnek 6 ve Problem 5.12'den 5.16'ya kadar bakınız.

ÖRNEK 6. Satır vektörü A ile sütun vektörü B çarpımı AB aşağıda gösterilmiştir.

$$A = [2 \quad 6 \quad 5 \quad 8]_{1\times 4} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

A ve B matrisleri aynı sayıda elemana sahiptirler ve işlem sonucu aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$AB = [2(7) + 6(3) + 5(9) + 8(4)] = [14 + 18 + 45 + 32] = [109]$$

C ve D matrislerinin çarpımı,

$$C = [6 \quad 1 \quad 9]_{1\times 3} \qquad D = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Yine aynı sayıda elemana sahiptirler ve işlem sonucu şu şekildedir,

$$CD = [6(8) + 1(5) + 9(3)] = [48 + 5 + 27] = [80]$$

Yukarıdaki işlemlerin her birinde çarpmanın sırasının tersi ve sütun-satır çarpımının (BA ve ya DC) tamamen farklı cevaplar verdiğine dikkat ediniz. Problem 5.27'ye bakınız.

5.6 MATRİSLERİN ÇARPIMI

$(r_1 \times c_1)$ ve $(r_2 \times c_2)$ boyutlarındaki iki matrisin çarpımı AB için matrislerin boyutlarının birbirlerine uygun olması gerekmektedir. Yani ilk matrisin sütun sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır ($c_1 = r_2$). Daha sonra ilk matristeki her bir satır vektörü

ile ikinci matristeki her bir sütun vektörü tek tek çarpılarak Kısım 5.5'teki satır sütun vektörleri çarpımı kuralları uygulanır. Her bir satır-sütun vektörü çarpım sonucu, sonuç matrisinin bir elemanını oluşturur. Yani C sonuç matrisinin c_{ij} elemanı ilk matrisin i satırı ile ikinci matrisin j sütununun çarpım sonucudur. Örnek 7 ve 8'i, Problem 5.17'den 5.31'e kadar bakınız.

ÖRNEK 7. Aşağıda verilen matrisler için,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 11 \\ 7 & 12 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 20 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 16 & 2 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Çarpma işlemini gerçekleştirmeden önce matrislerin çarpıma uygun olup olmadıklarının kontrolünde kolay bir yol olarak, iki matrisin boyutları bir eşitlik şeklinde yazılır. Eşittir sembolünün iki yanındaki sayılar bir çember içerisine alınır. Eğer çember içerisindeki sayılar birbirine eşitse bu, ilk matrisin sütun sayısının ikinci matrisin satır sayısına eşit olduğu anlamına gelir ve bu iki matris çarpma işlemi için uygundur. Ayrıca çemberin dışında kalan sayılar, sonuç matrisinin boyutlarını göstermektedir. AB matrislerinin çarpımı için uygulanırsa;

$$2 \times (3 = 3) \times 2$$
$$2 \times 2$$

İlk matrisin sütun sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşittir, $3 = 3$; matrisler verilen sıra ile çarpma işlemi için uygundur. AB çarpım matrisi ise 2×2 boyutundadır. AB gibi iki matris çarpma işlemine uygun olduklarında sonuç matrisi *tanımlı* denilmektedir.

BC matrislerinin çarpımı için,

$$3 \times (2 = 2) \times 3$$
$$3 \times 3$$

B matrisinin sütun sayısı C matrisinin satır sayısına eşittir, $2 = 2$; B ve C matrisleri verilen sıra ile çarpma işlemi için uygundur. BC çarpım matrisi ise 3×3 boyutundadır.

AC matrislerinin çarpımı için,

$$2 \times (3 \neq 2) \times 3$$

A ve C matrisleri çarpma işlemi için uygun değildir. AC tanımsızdır.

ÖRNEK 8. Örnek 7'de A ve B matrislerinin çarpma işlemi için uygun oldukları belirlenmiştir. Artık AB çarpımı bulunabilir. İlk matriste yalnızca satırların (R), ikinci matriste ise yalnızca sütunların (C) kullanılacağını, ilk matrisin birinci satırı (R_1) ile ikinci matrisin birinci sütunu (C_1) çarpılarak çarpım matrisinin ilk elemanının d_{11} ($= R_1C_1$) elde edileceğini unutmayınız. Daha sonra ilk matrisin birinci satırı (R_1) ile ikinci matrisin ikinci sütunu (C_2) çarpılarak çarpım matrisinin ikinci elemanı d_{12} ($= R_1C_2$) elde edilir. İkinci matriste başka sütun kalmadığı için işleme ilk matrisin ikinci satırı ile tekrar başlanır. İlk matrisin ikinci satırı (R_2) ile ikinci matrisin birinci sütunu (C_1) çarpılır ve sonuç matrisinin ikinci satır ilk elemanı d_{21} ($= R_2C_1$) elde edilir. Son olarak ilk matrisin ikinci satırı (R_2) ile ikinci matrisin ikinci sütunu (C_2) çarpılarak çarpım matrisinin son elemanı d_{22} ($= R_2C_2$) elde edilir. Böylece,

$$AB = D = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 \\ R_2C_1 & R_2C_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4(8) + 9(6) + 11(7) & 4(2) + 9(20) + 11(12) \\ 7(8) + 12(6) + 3(7) & 7(2) + 12(20) + 3(12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 163 & 320 \\ 149 & 290 \end{bmatrix}$$

Aynı işlem kullanılarak BC çarpım sonucu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$BC = E = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \\ R_3C_1 & R_3C_2 & R_3C_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8(5)+2(4) & 8(16)+2(3) & 8(2)+2(9) \\ 6(5)+20(4) & 6(16)+20(3) & 6(2)+20(9) \\ 7(5)+12(4) & 7(16)+12(3) & 7(2)+12(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 134 & 34 \\ 110 & 156 & 192 \\ 83 & 148 & 122 \end{bmatrix}$$

Ayrıca Problem 5.17'den 5.31'e kadar bakınız.

ÖRNEK 9. Örnek 1'de yer alan ürün matrisi üzerinden, bilgisayarın 900 TL, yazıcının 500 TL, monitörün 350 TL ve modemin 200 TL satış fiyatına sahip olduğu varsayılmaktadır. Farklı mağazalardaki stoktaki ürünlerin değerini gösteren matrisi V bulmak için stok matrisi S ile fiyat matrisi P çarpılır.

$$V = SP = \begin{bmatrix} 120 & 145 & 130 & 85 \\ 165 & 105 & 155 & 90 \\ 110 & 115 & 95 & 80 \\ 185 & 170 & 165 & 105 \end{bmatrix}_{4\times4} \begin{bmatrix} 900 \\ 500 \\ 350 \\ 200 \end{bmatrix}_{4\times1}$$

Matrisler çarpma işlemi için uygundur ve çarpım matrisi 4×1 boyutunda olacaktır:

$$4 \times (4 = 4) \times 1 \quad \to \quad 4 \times 1$$

İşlem gerçekleştirildiğinde,

$$V = \begin{bmatrix} R_1C_1 \\ R_2C_1 \\ R_3C_1 \\ R_4C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120(900)+145(500)+130(350)+85(200) \\ 165(900)+105(500)+155(350)+90(200) \\ 110(900)+115(500)+95(350)+80(200) \\ 185(900)+170(500)+165(350)+105(200) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 243,000 \\ 273,250 \\ 205,750 \\ 330,250 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matrislerde çarpma işleminin SP sıralaması ile gerçekleştirildiğinde anlamlı olduğuna, ancak PS sıralaması ile gerçekleştirilmek istendiğinde anlamsız olduğuna dikkat ediniz:

$$4 \times (1 \neq 4) \times 4$$

5.7 DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN MATRİSLER YARDIMIYLA GÖSTERİLMESİ

Matris cebiri doğrusal denklem sistemlerinin özlü bir şekilde gösterilmelerine olanak sağlar. Aşağıda verilen denklem sistemleri için

$$5x_1 + 12x_2 = 32 \qquad (5.1a)$$

$$7x_1 - 3x_2 = 32 \qquad (5.1b)$$

Tipik olarak cebirde yapıldığı gibi tüm terimler aynı sütunda yazılmış gibidir.

(*a*) Yukarıda yer alan katsayıları aynı sıra ile yazarak *katsayılar matrisi A* oluşturulur.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \qquad (5.2)$$

(*b*) Değişkenler denklemdeki sıralarına uygun şekilde yukarıdan aşağıya sıralanarak *değişkenler sütun vektörü X* oluşturulur.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

(*c*) *Sabitler sütun vektörü B* oluşturulur.

$$B = \begin{bmatrix} 32 \\ 25 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Sonrasında Örnek 10 ve 11'de, Problem 5.32'de ve 5.33'te de gösterildiği gibi denklem sistemi basitçe aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$AX = B \tag{5.5}$$

ÖRNEK 10. $AX = B$ matris çarpımının (5.1a) ve (5.1b) numaralı denklemlerden oluşan denklem sistemini belirttiğini göstermek için AX çarpımını bulunuz ve (5.5) numaralı denklemde yerine yazınız.

(5.2) ve (5.3)'ten,

$$AX = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}_{2\times2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2\times1} = \begin{bmatrix} 5x_1 + 12x_2 \\ 7x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}_{2\times1}$$

(5.5)'te yerine yazıldığında,

$$AX = B\colon \begin{bmatrix} 5x_1 + 12x_2 \\ 7x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}_{2\times1} = \begin{bmatrix} 32 \\ 25 \end{bmatrix}_{2\times1}$$

Burada, her bir satır toplama veya çıkarma işlemiyle daha fazla sadeleştirilemeyen tek bir elemandan oluştuğu için AX, 2×1 boyutunda bir sütun vektörüdür.

ÖRNEK 11. Kısım 5.7'de gösterilen işlem basamaklarını izleyerek ve matris çarpım işlemini ters çevirerek aşağıdaki denklem sistemini matris formunda belirtiniz.

$$9w + 4x - 5y + 2z = 10$$

$$9w - 7x + 11y - 6z = -2$$

Denklemlerin matris formunda belirtilişi;

$$\begin{bmatrix} 9 & 4 & -5 & 2 \\ 3 & -7 & 11 & -6 \end{bmatrix}_{2\times4} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{4\times1} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}_{2\times1}$$

Katsayılar matrisi = A, değişkenler sütun vektörü = W ve sabit terimler sütun vektörü = B olarak alınırsa, sistem şu şekilde kısaltılmış olarak yazılabilir.

$$A_{2\times4}W_{4\times1} = B_{2\times1}$$

Çarpımı kontol edilir.

5.8 GENİŞLETİLMİŞ MATRİS

$AX = B$ şeklinde matris formda verilen bir denklem sistemi için *genişletilmiş matris* $A|B$ katsayılar matrisi A ile sabit terimler sütun vektörü B'nin aynı tarafta, düz bir çizgi ile ayrılarak yazılmasıyla oluşturulur. (5.1a) ve (5.1b) numaralı denklemlerden oluşan sistem için genişletilmiş matris aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$A|B = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 12 & 32 \\ 7 & -3 & 25 \end{array}\right]$$

ÖRNEK 12. Aşağıda verilen denklem sistemi için genişletilmiş matris $A|B$ belirtilmiştir.

$$3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 58$$
$$6x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 22$$
$$x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 18$$

$$A|B = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 4 & 58 \\ 6 & 5 & -2 & 22 \\ 1 & -7 & 9 & 18 \end{array}\right]$$

5.9 SATIR İŞLEMLERİ

*Satır i*şlemleri matris satırlarına uygulanan basit matematiksel işlemleri kapsar. Doğrusal ilişkide bir değişiklik olmaksızın 3 temel satır işlemi bulunmaktadır. (1) Bir matrisin herhangi iki satırı yer değiştirebilir, (2) herhangi bir satır ya da satırları sıfırdan farklı bir sabit ile çarpılabilir ve (3) Örnek 13'te gösterildiği gibi herhangi bir satır çarpımı diğer satırdan toplanabilir ya da çıkarılabilir,

ÖRNEK 13. Temel matematiksel işlem uygulamaları kullanılarak satır işlemleri aşağıda gösterilmiştir.

$$6x + 5y = 43 \tag{5.6}$$

$$8x + 12y = 84 \tag{5.7}$$

Doğrusal ilişkide bir değişiklik olmaksızın,

1. Satırların yeri değiştirilebilir:

$$8x + 12y = 84$$
$$6x + 5y = 43$$

2. Herhangi bir satır bir sabit ile çarpılabilir, burada $8x + 12y = 84$ satırı $\frac{1}{4}$ ile çarpılmıştır.

$$2x + 3y = 21$$
$$6x + 5y = 43$$

3. Bir satırın çarpımı diğer bir satırdan çıkarılabilir, burada $6x + 5y = 43$'ten $3(2x + 3y = 21)$ çıkarılmıştır.

$$6x + 5y = 43$$
$$\underline{-6x - 9y = -63}$$
$$-4y = -20$$
$$y = 5$$

4. $y = 5$ değeri (5.6) ya da (5.7) numaralı denklemlerin birinde yerine yazılır ve x değeri elde edilir.

$$6x + 5(5) = 43$$
$$x = 3$$

5.10 DOĞRUSAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE GAUSS YÖNTEMİ

Doğrusal denklem sistemlerinin çözümünde Gauss eliminasyon yöntemini kullanmak için denklem sistemi genişletilmiş matris formunda gösterilir ve genişletilmiş matrislere çizginin solundaki katsayılar matrisi

birim matrisi halini alana kadar satır işlemleri uygulanır. *Birim matris*, köşegeni üzerindeki tüm terimleri ($i = j$ olan tüm a_{ij} terimleri) 1 olan ve diğer tüm terimleri ($i \neq j$ olan tüm a_{ij} terimleri) 0 olan bir kare matristir. Denklem sisteminin çözümü çizginin sağında bulunan sütun vektöründe bulunabilir. (Örnek 14'e bakınız.)

Katsayılar matrisini birim matrise çevirmek için, köşegen boyunca işlem gerçekleştirilir. Öncelikle a_{11} elemanının olduğu yer 1 olacak şekilde ve daha sonra birinci sütundaki diğer tüm elemanların 0 olması için satır işlemleri uygulanır. Daha sonra a_{22} elemanının olduğu yer 1 olacak şekilde ve ikinci sütundaki diğer tüm elemanların 0 olması için satır işlemleri uygulanır. Köşegen boyunca tüm elemanlar 1 yapılır ve birim matris elde edilinceye kadar işlemler tekrarlanır. Örnek 14'e ve Problem 5.34'ten 5.39'a kadar bakınız.

ÖRNEK 14. Aşağıda verilen doğrusal denklem sisteminin x_1 ve x_2 için çözümünde Gauss eleme yöntemi kullanılmıştır.

$$3x_1 + 12x_2 = 102$$
$$4x_1 + 5x_2 = 48$$

Öncelikle denklemler genişletilmiş matris formunda yazılır:

$$A|B = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 12 & 102 \\ 4 & 5 & 48 \end{array}\right]$$

Daha sonra,

1*a*. a_{11} elemanını 1'e eşitlemek için birinci satır $\frac{1}{3}$ ile çarpılır.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 34 \\ 4 & 5 & 48 \end{array}\right]$$

1*b*. Birinci satır 4 kere ikinci satırdan çıkarılır ve birinci sütunda köşegen dışındaki değerlerin 0 olması sağlanır.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 34 \\ 0 & -11 & -88 \end{array}\right]$$

2*a*. a_{22} elemanını 1'e eşitlemek için ikinci satır $-\frac{1}{11}$ ile çarpılır.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 34 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

2*b*. İkinci satır 4 kere birinci satırdan çıkarılır ve ikinci sütunda köşegen dışındaki değerlerin 0 olması sağlanır.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

Çözüm aşağıda gösterildiği gibi $x_1 = 2$, $x_2 = 8$ şeklinde bulunur.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 0 = 2$$
$$0 + x_2 = 8$$

Çözümlü Problemler

MATRİS FORMU

5.1. (*a*) Aşağıdaki matrislerin her birinin boyutlarını belirtiniz. (*b*) Matrislerin devriğini alınız ve yeni boyutlarını belirtiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 9 \\ 9 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad E = [-9 \quad 5 \quad 2 \quad -3 \quad 7] \quad F = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

(*a*) Matrislerin boyutlarının her zaman önce satır sonra sütun yazılarak gösterildiğini hatırlayınız. $A = 3 \times 2$, $B = 4 \times 3$, $C = 3 \text{ x } 1$, $D = 2 \times 4$, $E = 1 \times 5$ ve $F = 3 \times 4$, C aynı zamanda sütun vektörü olarak ve E satır vektörü olarak adlandırılmaktadır. (b) A matrisinin devriği satırların sütuna ve sütunların satıra dönüştürülmesidir.

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times3} \quad B' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 & 8 \\ 4 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 9 & 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times4} \quad C' = [6 \quad 13 \quad 9]_{1\times3}$$

$$D' = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}_{4\times2} \quad E' = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}_{5\times1} \quad F' = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 8 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}_{4\times3}$$

5.2. Verilen elemanları yerlerine yazarak aşağıdaki matrisi tamamlayınız. $a_{12} = 9$, $a_{21} = -4$, $a_{13} = -5$, $a_{31} = 2$, $a_{23} = 7$ ve $a_{32} = 3$.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & _ & _ \\ _ & 1 & _ \\ _ & _ & 6 \end{bmatrix}$$

İndisler her zaman satır ve sütun numarası sırasıyla yazıldığı için $a_{12} = 9$, 9 elemanının birinci satır ve ikinci sütunda yer aldığını; $a_{21} = -4$, -4 elemanının ikinci satırda ve birinci sütunda yer aldığı anlamına gelmektedir. Böylece,

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & -5 \\ -4 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

5.3. Dört perakende satış mağazası olan bir firmanın 1. mağazasında 35 televizyon *t*, 60 müzik seti *s*, 55 video kaset kayıt cihazı *v* ve 45 kamera *c* bulunmaktadır; 2. mağazasında 80*t*, 65*s*, 50*v* ve 38*c*; 3. mağazasında 29*t*, 36*s*, 24*v* ve 32*c* ve 4. mağazasında 62*t*, 49*s*, 54*v* ve 33*c* bulunmaktadır. Firmanın stok durumunu bir matris yardımıyla gösteriniz.

Perakende Satış Mağazası	*t*	*s*	*v*	*c*
1	35	60	55	45
2	80	65	50	38
3	29	36	24	32
4	62	49	54	33

MATRİSLERDE TOPLAMA VE ÇIKARMA

5.4. Aşağıdaki matrislerin toplamını $A + B$ bulunuz.

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

$$A+B=\begin{bmatrix}6+3 & 5+7\\ 8+9 & 2+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 12\\ 17 & 6\end{bmatrix}$$

(*b*) $A=\begin{bmatrix}-4 & 7\\ 1 & -8\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -6 & -9\end{bmatrix}$

$$A+B=\begin{bmatrix}-4+5 & 7+(-2)\\ 1+(-6) & -8+(-9)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -5 & -17\end{bmatrix}$$

(*c*) $A=[15 \quad 4 \quad 3 \quad 11]$ $\quad B=[8 \quad -6 \quad -9 \quad 5]$

$$A+B=[23 \quad -2 \quad -6 \quad 16]$$

(*d*) $A=\begin{bmatrix}12 & 5\\ -4 & 18\\ 7 & -6\\ 24 & -2\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}9 & -8\\ 7 & -4\\ 6 & 32\\ -5 & -4\end{bmatrix}$

$$A+B=\begin{bmatrix}21 & -3\\ 3 & 14\\ 13 & 26\\ 19 & -6\end{bmatrix}$$

5.5. Problem 5.3'te belirtilen firmanın mağazalarına gönderdiği ürünleri gösteren D matrisi aşağıda belirtilmiştir.

$$D=\begin{bmatrix}8 & 6 & 9 & 5\\ 4 & 7 & 5 & 2\\ 6 & 3 & 0 & 8\\ 5 & 9 & 7 & 4\end{bmatrix}$$

Mağazaların yeni stok durumunu nedir?

$$I_2=I_1+D=\begin{bmatrix}35 & 60 & 55 & 45\\ 80 & 65 & 50 & 38\\ 29 & 36 & 24 & 32\\ 62 & 49 & 54 & 33\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & 6 & 9 & 5\\ 4 & 7 & 5 & 2\\ 6 & 3 & 0 & 8\\ 5 & 9 & 7 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}43 & 66 & 64 & 50\\ 84 & 72 & 55 & 40\\ 35 & 39 & 24 & 40\\ 67 & 58 & 61 & 37\end{bmatrix}$$

5.6. Aşağıdaki matrislerin farkını $A-B$ bulunuz.

(*a*) $A=\begin{bmatrix}6 & 3 & 7\\ 2 & 9 & 1\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}5 & 8 & 9\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$

$$A-B=\begin{bmatrix}6-5 & 3-8 & 7-9\\ 2-4 & 9-1 & 1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -5 & -2\\ -2 & 8 & -1\end{bmatrix}$$

(*b*) $A=\begin{bmatrix}13\\ 9\\ 18\\ 5\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}8\\ 3\\ 15\\ 7\end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} 13 - 8 \\ 9 - 3 \\ 18 - 15 \\ 5 - 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(*c*) $$A = \begin{bmatrix} 14 & 8 & -3 \\ 6 & 19 & 11 \\ 20 & -1 & 18 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -8 & 16 & 7 \\ 13 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 14 & 3 & 4 \\ 7 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

5.7. Problem 5.5'teki firmanın aylık satış verileri R matrisinde belirtilmiştir.

$$R = \begin{bmatrix} 21 & 16 & 36 & 18 \\ 44 & 26 & 21 & 19 \\ 11 & 17 & 13 & 20 \\ 33 & 28 & 34 & 12 \end{bmatrix}$$

Ay sonunda firmanın mağazalarındaki stok durumunu belirtiniz.

$$I_3 = I_2 - R = \begin{bmatrix} 43 & 66 & 64 & 50 \\ 84 & 72 & 55 & 40 \\ 35 & 39 & 24 & 40 \\ 67 & 58 & 61 & 37 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 21 & 16 & 36 & 18 \\ 44 & 26 & 21 & 19 \\ 11 & 17 & 13 & 20 \\ 33 & 28 & 34 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 50 & 28 & 32 \\ 40 & 46 & 34 & 21 \\ 24 & 22 & 11 & 20 \\ 34 & 30 & 27 & 25 \end{bmatrix}$$

5.8.

$$A = [59 \quad 24] \qquad B = \begin{bmatrix} 39 \\ 44 \end{bmatrix} \qquad C = [7 \quad 4 \quad 8]$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 9 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 14 \\ 25 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Verilen matrislerin aşağıda belirtilen şekilde çarpımlarının tanımlı olup olmadıklarını yani çarpma sırasına uygun olup omadığını, eğer çarpımlar tanımlı ise çarpım matrisinin boyutlarını belirtiniz. (*a*) *AB*, (*b*) *AE*, (*c*) *EB*, (*d*) *BE*, (*e*) *CD*, (*f*) *CF*, (*g*) *DF*, (*h*) *FD*, (*i*) *FC*

(*a*) Verilen sıra ile *AB* matrislerinin boyutları $1 \times (2 = 2) \times 1$ şeklindedir. *AB* çarpımı tanımlıdır çünkü çembere alınan sayıların belirttiği gibi *A* matrisinin sütun sayısı ile *B* matrisinin satır sayısı birbirine eşittir. Çember dışında kalan sayılar 1×1 ise çarpım matrisinin boyutlarını belirtmektedir.

(*b*) *AE* matrislerinin boyutları $1 \times (2 = 2) \times 2$. *AE* çarpımı tanımlıdır, çarpım matrisi 1×2 boyutundadır.

(*c*) *EB* matrislerinin boyutları $2 \times (2 = 2) \times 1$. *EB* çarpımı tanımlıdır, çarpım matrisi 2×1 boyutundadır.

(*d*) *BE* matrislerinin boyutları $2 \times (1 \neq 2) \times 2$. *BE* çarpımı tanımsızdır. Matrisler verilen sıra ile çarpma işlemi için uygun değildir. [(c) bölümünde gösterildiği üzere *EB* çarpımının tanımlı olduğuna dikkat ediniz. Bu durum matrislerde çarpma işleminde değişme özelliği bulunmadığını gösterir: $EB \neq BE$]

(*e*) *CD* matrislerinin boyutları 1 x (3 = 3) x 3. *CD* çarpımı tanımlıdır, çarpım matrisi 1 x 3 boyutundadır.

(*f*) *CF* matrislerinin boyutları 1 x (3 = 3) x 1. *CF* çarpımı tanımlıdır, çarpım matrisi 1 x 1 boyutundadır.

(*g*) *DF* matrislerinin boyutları 3 x (3 = 3) x 1. *DF* çarpımı tanımlıdır, çarpım matrisi 3 x 1 boyutundadır.

(*h*) *FD* matrislerinin boyutları 3 x (1 ≠ 3) x 3 *FD* çarpımı tanımsızdır. Matrisler verilen sıra ile çarpma işlemi için uygun değildir. (g)'deki *DF* matrisi tanımlı olmasına rağmen *FD* çarpımı tanımsızdır.

(*i*) *FC* matrislerinin boyutları 3 x (1 = 1) x 3. *FC* çarpımı tanımlıdır, çarpım matrisi 3 × 3 boyutundadır. Bu cevabı (*f*)'deki 1 × 1 boyutunda *CF* çarpımı ile karşılaştırınız.

SKALER VE VEKTÖREL ÇARPIM

5.9. Aşağıda belirtilen matrisler için *Ak* çarpımını belirleyiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad k = 5$$

Burada *k* bir skalerdir ve skaler ile çarpım matrisin her boyutu için mümkündür.

$$Ak = \begin{bmatrix} 6(5) & 1(5) \\ 9(5) & 2(5) \\ 7(5) & 4(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 45 & 10 \\ 35 & 20 \end{bmatrix}$$

5.10. Aşağıda verilen *kA* çarpımını bulunuz.

$$k = -3 \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 2 \\ -9 & 5 & -6 \\ 1 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$kA = \begin{bmatrix} -3(7) & -3(-4) & -3(2) \\ -3(-9) & -3(5) & -3(-6) \\ -3(1) & -3(-8) & -3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & 12 & -6 \\ 27 & -15 & 18 \\ -3 & 24 & -3 \end{bmatrix}$$

5.11. Bir kayak mağazası sezon sonunda tüm kayaklarda, batonlarda ve ayak bağlamalarında %25 indirim yapmaktadır. V_1 matrisi mağazanın üç farklı şubesinde üç ürünün indirim öncesi fiyatlarını belirtmektedir. İndirimden sonraki oluşan V_2 matrisini bulunuz.

$$V_1 = \begin{bmatrix} 8400 & 7200 & 6800 \\ 4600 & 5400 & 5600 \\ 6200 & 7800 & 7400 \end{bmatrix}$$

%25 indirim uygulanması ekipmanların asıl fiyatlarının %75'inden satıldığı anlamına gelmektedir. Bu nedenle $V_2 = 0.75V_1$ olarak belirlenir.

$$V_2 = 0.75 \begin{bmatrix} 8400 & 7200 & 6800 \\ 4600 & 5400 & 5600 \\ 6200 & 7800 & 7400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6300 & 5400 & 5100 \\ 3450 & 4050 & 4200 \\ 4650 & 5850 & 5550 \end{bmatrix}$$

5.12. Aşağıda belirtilen *AB* çarpımını bulunuz.

$$A = [8 \quad 3 \quad 6] \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

AB çarpımı tanımlıdır: 1 x (3 = 3) x 1. Çarpım matrisi 1 × 1 boyutundadır. Satır vektöründeki *A* her bir eleman ile sütun vektöründeki *B* her bir eleman tek tek çarpılır ve çarpımlar toplanır.

$$AB = [8(2) + 3(5) + 6(7)] = [16 + 15 + 42] = [73]$$

5.13. Aşağıda belirtilen AB çarpımını bulunuz.

$$A = [5 \quad 12] \qquad B = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \end{bmatrix}$$

AB çarpımı tanımlıdır: $1 \times (2 = 2) \times 1$

$$AB = [5(21) + 12(10)] = [225]$$

5.14. Aşağıda belirtilen AB çarpımını bulunuz.

$$A = [6 \quad 3 \quad 5 \quad 8] \qquad B = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \\ 18 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Çarpım tanımlıdır: $1 \times (4 = 4) \times 1$.

$$AB = [6(11) + 3(15) + 5(18) + 8(9)] = [273]$$

5.15. Televizyonun fiyatı 400 TL, müzik setinin fiyatı 300 TL, video kaset kayıt cihazının fiyatı 250 TL ve kameranın fiyatı 500 TL ise Problem 5.3'teki 2. mağazanın stok değerini vektör çarpımını kullanarak bulunuz.

Stok değeri $V = QP$ çarpımı ile hesaplanmaktadır. 2. mağazanın stok değerleri vektör formunda $Q = [80 \quad 65 \quad 50 \quad 38]$ şeklindedir. Fiyat vektörü P ise aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$P = \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 250 \\ 500 \end{bmatrix}$$

QP çarpımı tanımlıdır: $1 \times (4 = 4) \times 1$. Böylece,

$$V = QP = 80(400) + 65(300) + 50(250) + 38(500) = 83{,}000$$

5.16. Problem 5.15'i, Problem 5.3'teki 3. mağaza verilerini kullanarak tekrar çözünüz.

Burada $Q = [29 \quad 36 \quad 24 \quad 32]$, P aynen kalmaktadır.

$$V = QP = 29(400) + 36(300) + 24(250) + 32(500) = 44{,}400$$

MATRİSLERDE ÇARPIM

5.17. AB çarpımının tanımlı olup olmadığını, çarpım matrisinin boyutlarını ve çarpım matrisini belirleyiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

AB çarpımı tanımlıdır: $2 \times (2 = 2) \times 2$; çarpım matrisi 2×2 boyutundadır. Matris çarpımı satır-sütun vektör çarpımlarından oluşmaktadır. Çarpım matrisinin a_{11} elemanı ilk matrisin birinci satırı R_1 ile ikinci matrisin birinci sütunu C_1 çarpılarak; a_{12} elemanı ilk matrisin birinci satırı R_1 ile ikinci matrisin ikinci sütunu C_2 çarpılarak elde edilir. Genel ifade ile çarpım matrisinin a_{ij} elemanı, birinci matrisin i. satırı R_i ile ikinci matrisin j. sütununun C_j çarpılmasıyla elde edilir. Böylece,

$$AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 \\ R_2C_1 & R_2C_2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 8(2) + 5(4) & 8(7) + 5(1) \\ 6(2) + 3(4) & 6(7) + 3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 61 \\ 24 & 45 \end{bmatrix}$$

5.18. Aşağıda verilen matrisler ile Problem 5.17'yi tekrar çözünüz.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 8 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

AB çarpımı tanımlıdır: $2 \times (2 = 2) \times 3$. AB çarpımı 2×3 boyutundadır.

$$AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4(3)+7(8) & 4(1)+7(2) & 4(6)+7(9) \\ 2(3)+5(8) & 2(1)+5(2) & 2(6)+5(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 & 18 & 87 \\ 46 & 12 & 57 \end{bmatrix}$$

5.19. Aşağıda verilen matrisler ile Problem 5.17'yi tekrar çözünüz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

AB çarpımı tanımsızdır: $2 \times (2 \neq 3) \times 2$. Matrislerin verilen sıra ile çarpılmaları uygun değildir. A matrisinin sütun sayısı (2) B matrisinin satır sayısına (3) eşit değildir. Bu nedenle matrisler verilen sıra ile çarpılamamaktadır.

5.20. Problem 5.19'daki BA matrisleri için Problem 5.17'yi tekrar çözünüz.

BA çarpımı tanımlıdır: $3 \times (2 = 2) \times 2$. BA 3×2 boyutundadır.

$$BA = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 \\ R_2C_1 & R_2C_2 \\ R_3C_1 & R_3C_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8(3)+1(9) & 8(5)+1(2) \\ 6(3)+7(9) & 6(5)+7(2) \\ 4(3)+2(9) & 4(5)+2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 42 \\ 81 & 42 \\ 30 & 24 \end{bmatrix}$$

5.21. Problem 5.19'daki AB' kullanarak Problem 5.17'yi için tekrar çözünüz. B', B matrisinin devriğidir.

$$B' = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

AB' çarpımı tanımlıdır: $2 \times (2 = 2) \times 3$. AB' 2×3 boyutundadır.

$$AB' = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(8)+5(1) & 3(6)+5(7) & 3(4)+5(2) \\ 9(8)+2(1) & 9(6)+2(7) & 9(4)+2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 53 & 22 \\ 74 & 68 & 40 \end{bmatrix}$$

Problem 5.19'dan 5.21'e kadar $AB \neq BA \neq AB'$ olduğuna dikkat ediniz. Bu matris çarpımlarının değişme özelliği olmadığını göstermektedir.

5.22. CD çarpımını bulunuz.

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 9 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

CD çarpımı tanımlıdır: $3 \times (2 = 2) \times 3$. CD 3×3 boyutundadır.

$$CD = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \\ R_3C_1 & R_3C_2 & R_3C_3 \end{bmatrix}$$

$$CD = \begin{bmatrix} 4(5)+1(4) & 4(8)+1(3) & 4(6)+1(1) \\ 6(5)+9(4) & 6(8)+9(3) & 6(6)+9(1) \\ 7(5)+2(4) & 7(8)+2(3) & 7(6)+2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 35 & 25 \\ 66 & 75 & 45 \\ 43 & 62 & 44 \end{bmatrix}$$

5.23. *EF* çarpımını bulunuz.

$$E = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

EF çarpımı tanımlıdır: **2 × (3 = 3) × 2**. *EF* 2 × 2 boyutundadır.

$$EF = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 \\ R_2C_1 & R_2C_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9(8)+2(2)+4(5) & 9(3)+2(7)+4(9) \\ 6(8)+5(2)+1(5) & 6(3)+5(7)+1(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 & 77 \\ 63 & 62 \end{bmatrix}$$

5.24. *AB* çarpımını bulunuz.

$$A = [2 \quad 6 \quad 5] \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 9 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

AB çarpımı tanımlıdır: **1 × (3 = 3) × 3**. *AB* 1 × 3 boyutundadır.

$$AB = [R_1C_1 \quad R_1C_2 \quad R_1C_3]$$
$$= [2(7)+6(4)+5(5) \quad 2(1)+6(3)+5(8) \quad 2(9)+6(6)+5(2)]$$
$$= [63 \quad 60 \quad 64]$$

5.25. *CD* çarpımını bulunuz.

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

CD çarpımı tanımsızdır: **3 × (1 ≠ 3) × 3**. Verilen sıra ile çarpım mümkün değildir.

5.26. Problem 5.25'teki matrisleri kullanarak *DC* çarpımını bulunuz.

DC çarpımı tanımlıdır: **3 × (3 = 3) × 1**. *DC* 3 × 1 boyutundadır.

$$DC = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_1C_1 \\ R_2C_1 \\ R_3C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(3)+7(7)+4(5) \\ 5(3)+9(7)+1(5) \\ 3(3)+6(7)+2(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 83 \\ 61 \end{bmatrix}$$

5.27. *EF* çarpımını bulunuz.

$$E = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad F = [3 \quad 6 \quad 4]$$

EF çarpımı tanımlıdır: **3 × (1 = 1) × 3**. *EF* 3 × 3 boyutundadır.

$$EF = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \\ R_3C_1 & R_3C_2 & R_3C_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8(3) & 8(6) & 8(4) \\ 2(3) & 2(6) & 2(4) \\ 5(3) & 5(6) & 5(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 48 & 32 \\ 6 & 12 & 8 \\ 15 & 30 & 20 \end{bmatrix}$$

5.28. *AB* çarpımını bulunuz.

$$A = [6 \quad 1 \quad 9] \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

AB çarpımı tanımsızdır: $1 \times (3 \neq 2) \times 1$.

5.29. Problem 5.28'deki matrisleri kullanarak *BA* çarpımını bulunuz.

BA çarpımı tanımlıdır: $2 \times (1 = 1) \times 3$. *BA* 2×3 boyutundadır.

$$BA = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} [6 \quad 1 \quad 9]$$

$$= \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(6) & 5(1) & 5(9) \\ 2(6) & 2(1) & 2(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 5 & 45 \\ 12 & 2 & 18 \end{bmatrix}$$

5.30. Problem 5.3'teki firmanın stok matrisini ve Problem 5.15'teki fiyat vektörünü kullanarak firmanın dört mağazasında da bulunan ürünlerin değerini belirten matrisi bulunuz.

$V = QP \cdot QP$ çarpımı tanımlıdır: $4 \times (4 = 4) \times 1$. *V* matrisi 4×1 boyutundadır.

$$V = \begin{bmatrix} 35 & 60 & 55 & 45 \\ 80 & 65 & 50 & 38 \\ 29 & 36 & 24 & 32 \\ 62 & 49 & 54 & 33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 250 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_1C_1 \\ R_2C_1 \\ R_3C_1 \\ R_4C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35(400) + 60(300) + 55(250) + 45(500) \\ 80(400) + 65(300) + 50(250) + 38(500) \\ 29(400) + 36(300) + 24(250) + 32(500) \\ 62(400) + 49(300) + 54(250) + 33(500) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68{,}250 \\ 83{,}000 \\ 44{,}400 \\ 69{,}500 \end{bmatrix}$$

5.31. Aşağıda verilen matrisler ile uygun olan birim matrislerin çarpımlarını bulunuz.

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ (*b*) $B = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

(*a*)

$$AI = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 \\ R_2C_1 & R_2C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(1) + 9(0) & 4(0) + 9(1) \\ 3(1) + 7(0) & 3(0) + 7(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

(*b*)

$$BI = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \\ R_3C_1 & R_3C_2 & R_3C_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1) + 9(0) + 4(0) & 2(0) + 9(1) + 4(0) & 2(0) + 9(0) + 4(1) \\ 5(1) + 8(0) + 1(0) & 5(0) + 8(1) + 1(0) & 5(0) + 8(0) + 1(1) \\ 3(1) + 7(0) + 6(0) & 3(0) + 7(1) + 6(0) & 3(0) + 7(0) + 6(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Bir matrisin uygun birim matrisle çarpımı, çarpım sırası değişmeksizin matrisin değerini değiştirmez: $AI = A = IA$, $BI = B = IB$. Matematikte 1 ile çarpmak ile denktir.

DOĞRUSAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE GAUSS YÖNTEMİ

5.32. Aşağıdaki doğrusal denklem sistemlerini (a) matris formunda ve (b) genişletilmiş matris formunda, A = katsayılar matrisi, X = değişkenler sütun vektörü, B = sabit terimler sütun vektörü olacak şekilde gösteriniz.

$$8x_1 + 3x_2 = 28$$

$$5x_1 + 9x_2 = 46$$

(*a*)

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 46 \end{bmatrix}$$

(*b*)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 8 & 3 & 28 \\ 5 & 9 & 46 \end{array}\right]$$

5.33. Aşağıda verilen denklemleri kullanarak Problem 5.32'yi tekrar çözünüz.

$$5x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 35$$

$$4x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 32$$

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 17$$

(*a*)

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 32 \\ 17 \end{bmatrix}$$

(*b*)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 9 & 2 & 35 \\ 4 & 7 & 6 & 32 \\ 1 & 3 & 8 & 17 \end{array}\right]$$

Problem 5.32 ve 5.33'te olduğu gibi denklemler düzenlenirse, aynı değişkenler hep alt alta gelecektir. Böylece birinci değişkenin kat sayısı her zaman birinci sütunda, ikinci değişkenin katsayısı her zaman ikinci sütunda olacaktır ve bu şekilde devam edecektir. Bu nedenle katsayılar matrisi, denklemlerdeki okunuş sırasına göre kolaylıkla oluşturulabilir. Her bir denklemdeki katsayılar ayrı bir satırı oluşturduğu için ve matrislerde çarpma işlemi satır-sütun işlemleri şeklinde gerçekleştiği için değişkenler her zaman sütun vektörü olarak yazılır. Eğer verilen denklemde değişkenlerden bazıları bulunmuyorsa, o değişkenlere ait katsayı 0'a denktir. Problem 5.39'a bakınız.

5.34. Aşağıdaki doğrusal denklem sistemini çözmek için Gaus eleme yöntemini kullanınız.

$$3x_1 + 8x_2 = 53$$

$$6x_1 + 2x_2 = 50$$

Öncelikle denklemler genişletilmiş matris formunda yazılır.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 8 & 53 \\ 6 & 2 & 50 \end{array}\right]$$

Daha sonra soldaki katsayılar matrisini birim matrise çevirmek için satır işlemleri uygulanır. Bunun en kolay yolu a_{11} elemanını 1'e çevirerek sütun 1'i temizlemektir, daha sonra a_{22} elemanı 1'e çevrilerek ikinci sütun temizlenir ve bu şekilde devam eder.

1*a*. Birinci satır $\frac{1}{3}$ ile çarpılır:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{8}{3} & \frac{53}{3} \\ 6 & 2 & 50 \end{array}\right]$$

1*b*. İkinci satırdan birinci satır 6 ile çarpılıp çıkarılır:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{8}{3} & \frac{53}{3} \\ 0 & -14 & -56 \end{array}\right]$$

2*a*. İkinci satır $-\frac{1}{14}$ ile çarpılır:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{8}{3} & \frac{53}{3} \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

2*b*. Birinci satırdan ikinci satır $\frac{8}{3}$ ile çarpılıp çıkarılır:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Böylece $\bar{x}_1 = 7$ ve $\bar{x}_2 = 4$ değerleri elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

5.35. Aşağıda verilen denklemler ile Problem 5.34'ü tekrar çözünüz.

$$4x_1 + 9x_2 = 62$$
$$5x_1 + 8x_2 = 58$$

Genişletilmiş matris şu şekildedir;

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 9 & 62 \\ 5 & 8 & 58 \end{array}\right]$$

1*a*. Birinci satır $\frac{1}{4}$ ile çarpılır:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{9}{4} & \frac{31}{2} \\ 5 & 8 & 58 \end{array}\right]$$

1*b*. İkinci satırdan birinci satır 5 ile çarpılıp çıkarılır:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{9}{4} & \frac{31}{2} \\ 0 & -\frac{13}{4} & -\frac{39}{2} \end{array}\right]$$

2*a*. İkinci satır $-\frac{9}{4}$ ile çarpılır:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{9}{4} & \frac{31}{2} \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

2*b*. Birinci satırdan ikinci satır $\frac{9}{4}$ ile çarpılıp çıkarılır:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Böylece $\bar{x}_1 = 2$ ve $\bar{x}_2 = 6$ değerleri elde edilir.

5.36. Aşağıda verilen denklemler için Problem 5.34'ü tekrar çözünüz.

$$6x_1 + 4x_2 = 47$$
$$2x_1 + 9x_2 = 77$$

Genişletilmiş matris şu şekildedir;

$$[A|B]=\left[\begin{array}{cc|c}6 & 4 & 47\\ 2 & 9 & 77\end{array}\right]$$

1*a*. Birinci satır $\frac{1}{6}$ ile çarpılır:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & \frac{2}{3} & \frac{47}{6}\\ 2 & 9 & 77\end{array}\right]$$

1*b*. İkinci satırdan birinci satır 2 ile çarpılıp çıkarılır:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & \frac{2}{3} & \frac{47}{6}\\ 0 & \frac{23}{3} & \frac{184}{3}\end{array}\right]$$

2*a*. İkinci satır $\frac{3}{23}$ ile çarpılır:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & \frac{2}{3} & \frac{47}{6}\\ 0 & 1 & 8\end{array}\right]$$

2*b*. Birinci satırdan ikinci satır $\frac{2}{3}$ ile çarpılıp çıkarılır.

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 2.5\\ 0 & 1 & 8\end{array}\right]$$

Böylece $\bar{x}_1 = 2.5$ ve $\bar{x}_2 = 8$ sonucu elde edilir.

5.37. Aşağıda verilen denklemler ile Problem 5.34'ü tekrar çözünüz.

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 21$$
$$3x_1 + 6x_2 + x_3 = 31$$
$$x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 37$$

Genişletilmiş matris şu şekildedir;

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}4 & 2 & 5 & 21\\ 3 & 6 & 1 & 31\\ 1 & 8 & 3 & 37\end{array}\right]$$

1*a*. Birinci satır $\frac{1}{4}$ ile çarpılır:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{21}{4}\\ 3 & 6 & 1 & 31\\ 1 & 8 & 3 & 37\end{array}\right]$$

1*b*. İkinci satırdan birinci satır 3 ile çarpılıp çıkarılır ve üçüncü satırdan birinci satır çıkarılır:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{21}{4}\\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{11}{4} & \frac{61}{4}\\ 0 & \frac{15}{2} & \frac{7}{4} & \frac{127}{4}\end{array}\right]$$

2*a*. İkinci satır $\frac{2}{9}$ ile çarpılır:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{21}{4}\\ 0 & 1 & -\frac{11}{18} & \frac{61}{18}\\ 0 & \frac{15}{2} & \frac{7}{4} & \frac{127}{4}\end{array}\right]$$

2*b*. Birinci satırdan ikinci satır $\frac{1}{2}$ ile çarpılıp çıkarılır ve üçüncü satırdan ikinci satır $\frac{15}{2}$ ile çarpılıp çıkarılır:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & \frac{14}{9} & \frac{32}{9}\\ 0 & 1 & -\frac{11}{18} & \frac{61}{18}\\ 0 & 0 & \frac{57}{9} & \frac{57}{9}\end{array}\right]$$

3*a*. Üçüncü satır $\frac{9}{57}$ ile çarpılır:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} & \frac{32}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{18} & \frac{61}{18} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3*b*. Birinci satırdan üçüncü satır $\frac{14}{9}$ ile çarpılıp çıkarılır ve ikinci satırdan üçüncü satır $\frac{11}{18}$ ile çarpılıp çıkarılır:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Böylece $\bar{x}_1 = 2, \bar{x}_2 = 4$ ve $\bar{x}_3 = 1$ sonucu bulunur.

5.38. Aşağıda verilen denklemler ile Problem 5.34'ü tekrar çözünüz.

$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 82$$
$$6x_1 - 6x_2 + x_3 = 11$$
$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -27$$

Genişletilmiş matris şu şekildedir;

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 82 \\ 6 & -3 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & -5 & -27 \end{bmatrix}$$

1*a*. Birinci satır $\frac{1}{2}$ ile çarpılır:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{7}{2} & 41 \\ 6 & -3 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & -5 & -27 \end{bmatrix}$$

1*b*. İkinci satırdan birinci satır 6 ile çarpılıp çıkarılır ve üçüncü satırdan birinci satır çıkarılır:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{7}{2} & 41 \\ 0 & -15 & -20 & -235 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{2} & -68 \end{bmatrix}$$

2*a*. İkinci satır $-\frac{1}{15}$ ile çarpılır:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{7}{2} & 41 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{47}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{17}{2} & -68 \end{bmatrix}$$

2*b*. Birinci satırdan ikinci satır 2 ile çarpılıp çıkarılır ve üçüncü satır olduğu gibi bırakılır:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{29}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{47}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{17}{2} & -68 \end{bmatrix}$$

3*a*. Üçüncü satır $-\frac{2}{17}$ ile çarpılır:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{29}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{47}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

3*b*. Birinci satırdan üçüncü satır $\frac{5}{6}$ ile çarpılıp çıkarılır ve ikinci satırdan üçüncü satır $\frac{4}{3}$ ile çarpılıp çıkarılır:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Böylece $\bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 5$ ve $\bar{x}_3 = 8$ sonucu bulunur.

5.39. Aşağıda verilen denklemler ile Problem 5.34'ü tekrar çözünüz.

$$\begin{aligned} 5x_1 \qquad - 2x_3 &= -3 \\ 4x_1 + 9x_2 \qquad &= 51 \\ - 6x_2 - x_3 &= -36 \end{aligned}$$

Genişletilmiş matris şu şekildedir;

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 0 & 51 \\ 0 & -6 & -1 & -36 \end{array}\right]$$

1*a*. Birinci satır $\frac{1}{5}$ ile çarpılır:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 4 & 9 & 0 & 51 \\ 0 & -6 & -1 & -36 \end{array}\right]$$

1*b*. İkinci satırdan birinci satır 4 ile çarpılıp çıkarılır ve a_{31} elemanı zaten 0 olduğu için üçüncü satır olduğu gibi bırakılır:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 9 & \frac{8}{5} & \frac{267}{5} \\ 0 & -6 & -1 & -36 \end{array}\right]$$

2*a*. İkinci satır $\frac{1}{9}$ ile çarpılır:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{45} & \frac{267}{45} \\ 0 & -6 & -1 & -36 \end{array}\right]$$

2*b*. Üçüncü satıra ikinci satır 6 ile çarpılıp eklenir ve $a_{12} = 0$ olduğu için birinci satır bırakılır:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{45} & \frac{267}{45} \\ 0 & 0 & \frac{1}{15} & -\frac{18}{45} \end{array}\right]$$

3*a*. Üçüncü satır 15 ile çarpılır:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{45} & \frac{267}{45} \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

3*b*. Birinci satıra üçüncü satır $\frac{2}{5}$ ile çarpılıp eklenir ve ikinci satıra üçüncü satır $-\frac{8}{45}$ ile eklenir:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

Böylece $\bar{x}_1 = -3$, $\bar{x}_2 = 7$ ve $\bar{x}_3 = -6$ sonucu bulunur.

Ek Problemler

Aşağıdaki soruların çözümünde altta verilen matrisleri dikkate alınız.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 13 \\ 6 & 11 & -5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 9 & 15 & 4 \\ 2 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}5 & -7\\ 9 & 22\\ 4 & -5\end{bmatrix}\quad F=\begin{bmatrix}4 & -9\\ 8 & -2\\ 3 & 16\end{bmatrix}\quad G=\begin{bmatrix}-4 & 9 & 15\\ 5 & 12 & -9\\ 18 & -6 & 20\end{bmatrix}\quad H=\begin{bmatrix}6 & 8 & -1\\ -2 & 14 & 5\\ 13 & -9 & 3\end{bmatrix}$$

MATRİS FORMU

5.40. (*a*) A, (*b*) C, (*c*) E ve (*d*) G matrislerinin boyutlarını belirtiniz.

5.41. Yukarıdaki matrislerde, aşağıdaki elemanları belirleyiniz: (*a*) a_{21} (*b*) b_{12} (*c*) c_{23} (*d*) d_{12} (*e*) e_{31} (*f*) f_{12} (*g*) g_{13} (*h*) g_{32} (*i*) h_{23} (*j*) h_{31}

5.42. (*a*) B', (*b*) D', (*c*) F' ve (*d*) H' matrislerin devriklerini bulunuz.

5.43. (*a*) B', (*b*) D', (*c*) F' ve (*d*) H' matrislerin devriklerinin boyutlarını bulunuz.

MATRİSLERDE TOPLAMA VE ÇIKARMA

5.44. (*a*) $A+B$ (*b*) $C+D$ (*c*) $E+F$ (*d*) $G+H$ toplamlarını bulunuz.

5.45. (*a*) $A-B$ (*b*) $C-D$ (*c*) $E-F$ (*d*) $G-H$ farklarını bulunuz.

MATRİSLERDE ÇARPMA

5.46. (*a*) AB, (*b*) CE, (*c*) FD, (*d*) GH, (*e*) EA, (*f*) GF, (*g*) CH ve (*h*) BD çarpımlarını bulunuz.

GAUSS ELEMİNASYON YÖNTEMİ

5.47. Aşağıdaki doğrusal denklem sistemlerinin çözümünde Gauss eleminasyon yöntemini kullanınız.

(*a*) $4x+7y=131$
$8x-3y=41$

(*b*) $6x+5y=51$
$-x+8y=124$

(*c*) $11x-4y=256$
$3x+6y=6$

(*d*) $-13x+9y=15$
$7x-2y=-28$

5.48. Aşağıdaki denklemleri Gauss eleminasyon yöntemini kullanarak çözünüz.

(*a*) $3x_1+6x_2-5x_3=-5$
$4x_1-7x_2+2x_3=-6$
$-x_1+8x_2+9x_3=93$

(*b*) $5x_1+8x_2+2x_3=26$
$7x_2-4x_3=6$
$-x_1+9x_3=89$

(*c*) $12x_2+9x_3=84$
$-5x_1+6x_2-2x_3=-122$
$8x_1-3x_3=48$

(*d*) $11x_1-8x_2-6x_3=133$
$4x_1+7x_3=-41$
$2x_1+5x_2-3x_3=71$

Ek Problemlerin Cevapları

5.40. (*a*) $A=2\times 2$ (*b*) $C=2\times 3$ (*c*) $E=3\times 2$ (*d*) $G=3\times 3$

5.41. (*a*) $a_{21} = 3$ (*b*) $b_{12} = 6$ (*c*) $c_{23} = -5$ (*d*) $d_{12} = 15$ (*e*) $e_{31} = 4$
(*f*) $f_{12} = -9$ (*g*) $g_{13} = -15$ (*h*) $g_{32} = -6$ (*i*) $h_{23} = 5$ (*j*) $h_{31} = 13$

5.42. (*a*) $B' = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ (*b*) $D' = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 15 & -8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

(*c*) $F' = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \\ -9 & -2 & 16 \end{bmatrix}$ (*d*) $H' = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 13 \\ 8 & 14 & -9 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

5.43. (*a*) $B' = 2 \times 2$ (*b*) $D' = 3 \times 2$ (*c*) $F' = 2 \times 3$ (*d*) $H' = 3 \times 3$

5.44. (*a*) $A + B = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (*b*) $C + D = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 17 \\ 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(*c*) $E + F = \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ 17 & 20 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$ (*d*) $G + H = \begin{bmatrix} 2 & 17 & 14 \\ 3 & 26 & -4 \\ 31 & -15 & 23 \end{bmatrix}$

5.45. (*a*) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & -11 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ (*b*) $C - D = \begin{bmatrix} -6 & -23 & 9 \\ 4 & 19 & -12 \end{bmatrix}$

(*c*) $E - F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 24 \\ 1 & -21 \end{bmatrix}$ (*d*) $G - H = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 16 \\ 7 & -2 & -14 \\ 5 & 3 & 17 \end{bmatrix}$

5.46. (*a*) $AB = \begin{bmatrix} 66 & 43 \\ 13 & 22 \end{bmatrix}$ (*b*) $CE = \begin{bmatrix} -5 & -262 \\ 109 & 225 \end{bmatrix}$

(*c*) $FD = \begin{bmatrix} 18 & 132 & -47 \\ 68 & 136 & 18 \\ 59 & -83 & 124 \end{bmatrix}$ (*d*) $GH = \begin{bmatrix} 153 & -41 & 94 \\ -111 & 289 & 28 \\ 380 & -120 & 12 \end{bmatrix}$

(*e*) $EA = \begin{bmatrix} 19 & -53 \\ 138 & 43 \\ 17 & -40 \end{bmatrix}$ (*f*) $GF = \begin{bmatrix} 101 & 258 \\ 89 & -213 \\ 84 & 170 \end{bmatrix}$

(*g*) $CH = \begin{bmatrix} 203 & -205 & -4 \\ -51 & 247 & 34 \end{bmatrix}$ (*h*) $BD = \begin{bmatrix} 75 & 57 & 70 \\ -16 & -38 & -1 \end{bmatrix}$

5.47. (*a*) $x = 10, y = 13$ (*b*) $x = -4, y = 15$
(*c*) $x = 200, y = -9$ (*d*) $x = -6, y = -7$

5.48. (*a*) $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 7$ (*b*) $x_1 = -8, x_2 = 6, x_3 = 9$
(*c*) $x_1 = 12, x_2 = -5, x_3 = 16$ (*d*) $x_1 = 9, x_2 = 4, x_3 = -11$

Bölüm 6

DOĞRUSAL DENKLEMLERİN MATRİSLER İLE ÇÖZÜLMESİ

6.1 DETERMİNANTLAR VE DOĞRUSAL BAĞIMSIZLIK

Tek bir çözümün bulunması için, Bölüm 4'te açıklandığı gibi denklem sisteminin bağımsız değişken sayısınca bağımsız ve tutarlı denkleme sahip olması gerekmektedir. Bir doğrusal denklem sisteminin doğrusal bağımlılığını ya da bağımsızlığını test etmek için A katsayılar matrisinin determinantı kullanılır. 2×2 bir matrisin determinantı $|A|$ *ikinci dereceden determinant* olarak adlandırılır, köşegen üzerindeki iki elemanın çarpımından köşegen dışında kalan iki elemanın çarpımı çıkarılarak bulunur. Aşağıda genel bir 2×2 matris verilmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Determinantı,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (+) \end{matrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Yalnızca kare matrisler için bulunabilen determinant $|A|$ tek bir sayı veya skalerdir. Eğer $|A| = 0$ ise, determinant sıfıra eşittir ve matris *tekil* olarak adlandırılır. Bir *tekil matris* en az iki satırında ya da sütununda doğrusal bağımlılık bulunan matristir. Eğer $|A| \neq 0$ ise, matris tekil değildir, ki bu tüm satırlarının ve sütunlarının doğrusal olarak bağımsız oldukları anlamına gelmektedir. Bir matrisin *rankı* ρ matristeki doğrusal olarak bağımsız olan satırların ya da sütunların maksimum sayısıyla belirlenir. Örnek 1 ve Problem 6.1'e bakınız.

ÖRNEK 1. Determinantlar aşağıda verilen şekilde hesaplanır,

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Köşegen üzerindeki elemanlar soldan sağa doğru çarpılır $(7 \cdot 5)$, daha sonra köşegen dışındaki elemanların çarpımı $(4 \cdot 6)$ bulunan değerden çıkarılır.

$$|A| = 7(5) - 4(6) = 11$$

$|A| \neq 0$ olduğu için matris tekil değildir, ki bu matrisin satırları ya da sütunları arasında doğrusal bağımlılık bulunmadığı anlamına gelmektedir. Hem satırlar hem de sütunlar doğrusal olarak bağımsız oldukları için, A matrisinin rankı 2'dir, $\rho(A) = 2$ şeklinde gösterilir. Diğer yandan,

$$|B| = 8(3) - 12(2) = 0$$

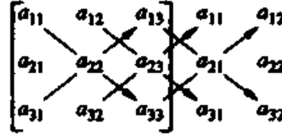
$|B| = 0$ olduğu için B tekil matristir ve satırları ve sütunları arasında doğrusal bağımlılık bulunmaktadır. Dikkatli incelendiğinde birinci satırın ikinci satırın 4 katına eşit olduğu ve ikinci sütunun birinci sütunun 1.5 katına eşit olduğu görülmektedir. Yalnızca bir satır ve sütun bağımsız olduğu için $\rho(B) = 1$'dir.

6.2 ÜÇÜNCÜ DERECEDEN DETERMİNANTLAR

3×3 bir matrisin determinantı, üçüncü dereceden determinant olarak adlandırılır, pek çok farklı yolla bulunabilir. En kolay yol, aşağıda listelenerek geliştirilmiş yöntem yardımıyla gösterilmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1. Matris verildiği şekilde yazılır ve sağ tarafına Şekil 6-1'de olduğu gibi ilk iki sütun tekrar yazılır.
2. İlk satırdaki her üç eleman alt çaprazlarındaki iki elemanla çarpılır ve çarpımlar toplanır.
3. Son satırdaki her üç eleman üst çaprazlarındaki iki elemanla çarpılır ve çarpımlar toplanır. Daha sonra bu toplam bir önceki toplamdan çıkarılır. Böylece Şekil 6-1 yardımıyla,



Şekil 6-1

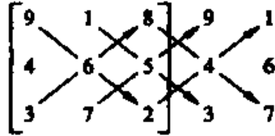
$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - [a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}]$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

ÖRNEK 2. Aşağıda verilen matrisin determinantını bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Şekil 6-2 kullanılır,



Şekil 6-2

$$|A| = 9 \cdot 6 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 \cdot 7 - [3 \cdot 6 \cdot 8 + 7 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 4 \cdot 1]$$

$$|A| = 108 + 15 + 224 - [144 + 315 + 8] = 347 - 467 = -120$$

$|A| \neq 0$ olduğu için A tekil olmayan bir matristir ve $\rho(A) = 3$'tür. Ayrıca Problem 6.2'ye bakınız.

6.3 DOĞRUSAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE CRAMER KURALI

Doğrusal bağımlılığın test edilmesinin dışında, determinantlar doğrusal denklem sistemlerinin çözümünde de faydalıdır. Bu alandaki bir diğer yöntem Cramer kuralıdır.. *Cramer kuralı* şunu vurgulamaktadır;

$$\bar{x}_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Burada x_i denklem sistemindeki i. dereceden bilinmeyen değişkeni, $|A|$ katsayılar matrisinin determinantını ve $|A_i|$ ise katsayılar matrisinde x_i değişkenine ait katsayılar sütun vektörünün yerine sabit terimler sütun vektörünün yazılmasıyla oluşturulan matrisin determinantıdır. Örnek 3 ve 4'e, Problem 6.3 ve 6.4'e bakınız.

ÖRNEK 3. Aşağıdaki 2 × 2 doğrusal denklem sisteminin çözümünde Cramer Kuralı kullanılmıştır.

$$3x_1 + 7x_2 = 41$$
$$8x_1 + 9x_2 = 61$$

1. Denklemler matris formunda yazılır,

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ 61 \end{bmatrix}$$

2. A matrisinin determinantı bulunur.

$$|A| = 3(9) - 7(8) = -29$$

$|A| \neq 0$ olduğu için A matrisi tekil değildir ve iki denklem doğrusal olarak bağımsızdır. Bu nedenle tek bir özel çözüm olma olasılığı bulunmaktadır.

3. x_1 için çözmek için x_1 değişkeninin katsayılarından oluşan A matrisinin birinci sütununun yerine sabit terimler sütun vektörü B yazılır, yeni bir A_1 matrisi oluşturulur.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 41 & 7 \\ 61 & 9 \end{bmatrix}$$

A_1 matrisinin determinantı bulunur,

$$|A_1| = 41(9) - 7(61) = -58$$

Daha sonra Cramer kuralı formülü uygulanır.

$$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2$$

4. x_2 için çözmek için x_2 değişkeninin katsayılarından oluşan A matrisinin ikinci sütununun yerine sabit terimler sütun vektörü B yazılır, yeni bir A_2 matrisi oluşturulur.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 41 \\ 8 & 61 \end{bmatrix}$$

Determinant alınır,

$$|A_2| = 3(61) - 41(8) = -145$$

Cramer kuralı formülü uygulanır.

$$\bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-145}{-29} = 5$$

ÖRNEK 4. Aşağıdaki 3 × 3 doğrusal denklem sisteminin çözümünde Cramer Kuralı kullanılmıştır.

$$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 35$$
$$3x_1 + x_2 + 8x_3 = 25$$
$$5x_1 + 3x_2 + x_3 = 40$$

1. Denklemler matris formunda yazılır,

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 25 \\ 40 \end{bmatrix}$$

2. Örnek 2'deki yöntem kullanılarak A matrisinin determinantı alınır.

$$|A| = 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 8 \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 3 - [5 \cdot 1 \cdot 7 + 3 \cdot 8 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 2]$$

$$= 4 + 80 + 63 - [35 + 96 + 6] = 147 - 137 = 10 \neq 0$$

3. x_1 için çözmek için x_1 değişkeninin katsayılarından oluşan A matrisinin birinci sütununun yerine sabit terimler sütun vektörü B yazılır, yeni bir A_1 matrisi oluşturulur.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 35 & 2 & 7 \\ 25 & 1 & 8 \\ 40 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

A_1 matrisinin determinantı bulunur,

$$|A_1| = 35 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 8 \cdot 40 + 7 \cdot 25 \cdot 3 - [40 \cdot 1 \cdot 7 + 3 \cdot 8 \cdot 35 + 1 \cdot 25 \cdot 2]$$
$$= 35 + 640 + 525 - [280 + 840 + 50] = 1200 - 1170 = 30$$

Daha sonra Cramer Kuralı formülü uygulanır.

$$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{30}{10} = 3$$

4. x_2 için çözmek için x_2 değişkeninin katsayılarından oluşan A matrisinin ikinci sütununun yerine sabit terimler sütun vektörü B yazılır, yeni bir A_2 matrisi oluşturulur.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 35 & 7 \\ 3 & 25 & 8 \\ 5 & 40 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = 4 \cdot 25 \cdot 1 + 35 \cdot 8 \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 40 - [5 \cdot 25 \cdot 7 + 40 \cdot 8 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 35]$$

$$= 100 + 1400 + 840 - [875 + 1280 + 105] = 2340 - 2260 = 80$$

ve

$$\bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{80}{10} = 8$$

5. x_3 için çözmek için $x_3 x_2$ değişkeninin katsayılarından oluşan A matrisinin üçüncü sütununun yerine sabit terimler sütun vektörü B yazılır, yeni bir A_3 matrisi oluşturulur.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 35 \\ 3 & 1 & 25 \\ 5 & 3 & 40 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = 4 \cdot 1 \cdot 40 + 2 \cdot 25 \cdot 5 + 35 \cdot 3 \cdot 3 - [5 \cdot 1 \cdot 35 + 3 \cdot 25 \cdot 4 + 40 \cdot 3 \cdot 2]$$

$$= 160 + 250 + 315 - [175 + 300 + 240] = 725 - 715 = 10$$

ve

$$\bar{x}_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{10}{10} = 1$$

Cramer kuralının faydası, tüm sistemi çözmeye gerek kalmaksızın tek bir değişken için çözüm imkanı tanımasıdır. Problem 6.8'den 6.14'e kadar bakınız.

6.4 TERS MATRİSLER

Bir ters matris A^{-1}, yalnızca bir kare ve tekil olmayan A matrisi için aşağıdaki ilişkiyi sağlayan özel bir matristir.

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

Bir matrisin tersi ile çarpımı birim matrisi verir. Böylece lineer cebirdeki ters matris, cebirdeki bir sayının çarpmaya göre tersi ile aynı işlevi görür. Bir matrisi Gauss yöntemine göre tersine çevirmek Kısım 6.5'te anlatılmıştır.

6.5 TERS MATRİSİN BULUNMASINDA GAUSS YÖNTEMİ

Gauss yöntemi bir matrisin tersinin bulunmasında etkili bir yöntemdir. Sağ tarafı birim matris ile genişletilmiş bir matris oluşturulur. Daha sonra soldaki katsayılar matrisi birim matrise dönüşüne kadar satır işlemleri uygulanır. Bu noktada sağdaki matris ters matris olacaktır.

Bu yöntemin mantıksal temeli birkaç adımda görülebilir. $A|I$ genişletilmiş matris başlanır ve her iki taraf ters matris A^{-1} ile çarpılır.

$$(A^{-1})A|I(A^{-1})$$

Kısım 6.4 ve Problem 5.31'den bu denklem şu hali alır,

$$I|A^{-1}$$

Birim matris şimdi solda ve ters matris sağdadır. Örnek 5 ve Problem 6.5'ten 6.7'ye kadar bakınız.

ÖRNEK 5. Aşağıda verilen matrisin ters matrisini bulmak için Gauss eleme yöntemini kullanınız.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Sağ tarafta birim matris olacak şekilde genişletilmiş matris oluşturulur:

$$A|I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Daha sonra Kısım 5.9 ve 5.10'da gösterildiği şekilde satır işlemleri uygulanarak genişletilmiş matrisin sol tarafında birim matris elde edilmeye çalışılır.

1*a*. a_{11} elemanının yerinde 1 elde etmek için birinci satır $\frac{1}{4}$ ile çarpılır.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1*b*. İkinci satırdan 3 çarpı birinci satır ve üçüncü satırdan çarpı birinci satır çıkarılarak birinci sütun temizlenir.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{4} & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{31}{4} & -\frac{5}{4} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2*a*. a_{22} elemanının yerinde 1 elde etmek için ikinci satır –2 ile çarpılır.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{31}{4} & -\frac{5}{4} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2*b*. Birinci satırdan ve üçüncü satırdan $\frac{1}{2}$ çarpı ikinci satır çıkarılarak ikinci sütun temizlenir.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

3*a*. a_{33} elemanının yerinde 1 elde etmek için üçüncü satır $-\frac{1}{5}$ ile çarpılır.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

3*b*. Birinci satırdan $\frac{9}{2}$ çarpı üçüncü satır çıkarılarak ve ikinci satırdan $\frac{11}{2}$ çarpı üçüncü satır çıkarılarak üçüncü sütun temizlenir.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{23}{10} & \frac{19}{10} & \frac{9}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{37}{10} & -\frac{31}{10} & -\frac{11}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

İşlemlerin sonunda birim matris solda kalır ve sağ tarafta ters matris elde edilir.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2.3 & 1.9 & 0.9 \\ 3.7 & -3.1 & -1.1 \\ 0.4 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK 6. $AA^{-1} = I$ olduğu için bir ters matrisin doğruluğu her zaman asıl matrisle çarpılarak sonucun birim matris olup olmadığı kontrol edilerek test edilebilir. Örnek 5'teki A ve A^{-1} kullanılarak,

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.3 & 1.9 & 0.9 \\ 3.7 & -3.1 & -1.1 \\ 0.4 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4(-2.3)+2(3.7)+7(0.4) & 4(1.9)+2(-3.1)+7(-0.2) & 4(0.9)+2(-1.1)+7(-0.2) \\ 3(-2.3)+1(3.7)+8(0.4) & 3(1.9)+1(-3.1)+8(-0.2) & 3(0.9)+1(-1.1)+8(-0.2) \\ 5(-2.3)+3(3.7)+1(0.4) & 5(1.9)+3(-3.1)+1(-0.2) & 5(0.9)+3(-1.1)+1(-0.2) \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^{-1}A$ çarpımı yoluyla bir ters matris test edilirken, çarpım matrisinin köşegenindeki tüm elemanların 1 ve geri kalan tüm elemanların 0 olması gerektiğine dikkat ediniz. Çünkü eğer bir hata yapıldıysa, 0'a ya da 1'e eşit olmayan elemanlara karşılık gelen elemanların olduğu yerler kontrol edilmelidir.

6.6 TERS MATRİS İLE DOĞRUSAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜLMESİ

Bir ters matris, matris denklemlerinin çözülmesinde kullanılabilir. Eğer,

$$A_{n\times n}X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$$

ise ve A^{-1} ters matrisi varsa, eşitliğin her iki tarafı da A^{-1} ile çarpılarak aşağıdaki kuralların uygulanması denklemin çözümünü sağlayacaktır.

$$A^{-1}_{n\times n}A_{n\times n}X_{n\times 1} = A^{-1}_{n\times n}B_{n\times 1}$$

A^{-1} ters matris çarpımının hem $A_{n\times n}X_{n\times 1}$ için ve hem de $B_{n\times 1}$ için sol taraftan uygulanabileceğine dikkat ediniz. Daha sonra Kısım 6.4'teki $A^{-1}A = I$ kuralı uygulanır.

$$I_{n\times n}X_{n\times 1} = A^{-1}_{n\times n}B_{n\times 1}$$

Daha sonra Problem 5.31'de olduğu şekilde $IX = X$,böylece,

$$X_{n\times 1} = (A^{-1}B)_{n\times 1}$$

Denklem sisteminin çözümü katsayılar matrsinin tersi A^{-1} ile sabit terimler sütun vektörü B'nin çarpımıyla elde edilen sütun vektörüdür. Örnek 7'ye ve Problem 6.5'ten 6.7'ye kadar ve Problem 6.15'e bakınız.

ÖRNEK 7. x_1, x_2 ve x_3 için Örnek 4'te verilen denklem sisteminin matris formundaki aşağıdaki çözümünde matrislerin tersinin alınması kullanılmıştır.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 35 \\ 25 \\ 40 \end{bmatrix}}$$

Kısım 6.6'dan,

$$X = A^{-1}B$$

Bölüm 5'te bulunan ters matris A^{-1} yerine yazılır ve çarpılır,

$$X = \begin{bmatrix} -2.3 & 1.9 & 0.9 \\ 3.7 & -3.1 & -1.1 \\ 0.4 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 25 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -2.3(35) + 1.9(25) + 0.9(40) \\ 3.7(35) - 3.1(25) - 1.1(40) \\ 0.4(35) - 0.2(25) - 0.2(40) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Böylece,

$$X = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu işlemleri ve sonuçları, aynı problemin Cramer Kuralı ile çözüldüğü Örnek 4'tekilerle karşılaştırınız

6.7 İŞLETMECİLER VE İKTİSATÇILAR İÇİN UYGULAMALAR

Cramer Kuralı ve matrisin tersinin alınması işletme ve iktisatta, IS-LM analizi gibi ve arz-talep analizi gibi eş anlı denklem sistemleri içeren problem çözümünde sıklıkla kullanılmaktadır. Matrisin tersinin alınmasını ve arz-talep analizlerini sonraki problemlere bırakarak, IS-LM analizine Cramer Kuralının uygulanmasından başlanacaktır. Aşağıda verilen IS ve LM denklemleri için,

$$0.3Y + 100i = 252$$

$$0.25Y - 200i = 176$$

Denklemler matris formunda yazılır.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 0.3 & 100 \\ 0.25 & -200 \end{bmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{bmatrix} Y \\ i \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 252 \\ 176 \end{bmatrix}}$$

Burada,

$$|A| = 0.3(-200) - 100(0.25) = -60 - 25 = -85$$

A matrisindeki sütun 1'de yer alan Y'nin katsayılarının yerine sabit terimler sütun vektörü B yazılır ve Y için çözülür,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 252 & 100 \\ 176 & -200 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = 252(-200) - 100(176) = -50{,}400 - 17{,}600 = -68{,}000$$

Böylece,
$$Y_e = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-68,000}{-85} = 800$$

Daha sonra A matrisindeki sütun 2'de yer alan i'nin katsayılarının yerine sabit terimler sütun vektörü B yazılır ve i için çözülür,

$$|A_2| = \begin{bmatrix} 0.3 & 252 \\ 0.25 & 176 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = 0.3(176) - 252(0.25) = 52.8 - 63 = -10.2$$

ve
$$i_e = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-10.2}{-85} = 0.12$$

Aynı problemin eleme yöntemiyle çözüldüğü Problem 4.21'e bakınız. Ayrıca Problem 6.8'den 6.15'e kadar bakınız.

6.8 ÖZEL DETERMİNANTLAR

İktisat, işletme ve genel matematikte önemli kullanım alanları olan Jacobian, sınırlı Hessian ve diskriminant gibi özel determinantlar için Dowling, Matematiksel İktisada Giriş, Bölüm 12'ye bakınız.

Çözümlü Problemler

DETERMİNANTLAR

6.1. Aşağıdaki 2 × 2 matrislerin her biri için, matrislerin tekil olup olmadıklarını belirlemek için determinantlarını bulunuz ve matrislerin rankını belirtiniz.

(*a*)
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 5(4) - 2(9) = 2$$

$|A| \neq 0$ olduğu için, A matrisi tekil değildir. Bu nedenle hem satırlar hem de sütunlar doğrusal olarak bağımsızdır. İki satır ve sütun doğrusal olarak bağımsız olduğu için A matrisinin rankı 2'dir: $\rho(A) = 2$.

(*b*)
$$B = \begin{bmatrix} 12 & 20 \\ 15 & 11 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 12(11) - 20(15) = -168$$

B tekil değildir; $\rho(B) = 2$

(*c*)
$$C = \begin{bmatrix} 24 & 30 \\ 16 & 20 \end{bmatrix}$$

$$|C| = 24(20) - 30(16) = 0$$

$|C| = 0$ olduğu için C matrisi tekildir. Satırları ve sütunları arasında doğrusal bağımlılık vardır. Yalnızca bir bağımsız satırı ve bir bağımsız sütunu bulunduğu için $\rho(C) = 1$'dir. Daha ayrıntılı inceleme ile birinci satırın ikinci satırın 1.5 katı olduğu ve ikinci sütunun birinci sütunun 1.25 katı olduğu görülmektedir.

(*d*)
$$D = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrisin determinantı bulunmamaktadır çünkü yalnızca kare matrislerin determinantı alınabilmektedir. Yalnızca iki satırı olması nedeniyle mümkün olan en yüksek rankı 2'dir: $\rho(D) = 2$.

6.2. Aşağıdaki 3 × 3 matrislerin her birinin determinantlarını alınız ve matrislerin rankını belirtiniz.

(*a*)

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 9 \\ 8 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Orijinal matris aşağıya yazılır ve sağ tarafına ilk iki sütun tekrar yazılır.

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 9 \\ 8 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{matrix}$$

Örnek 2'de Şekil 6-3'te gösterildiği şekilde işlem sürdürülür,

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 9 \\ 8 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{matrix}$$

Şekil 6-3

$$|A| = 7 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 9 \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot 6 - [8 \cdot 2 \cdot 4 + 6 \cdot 9 \cdot 7 + 3 \cdot 5 \cdot 1]$$

$$|A| = 42 + 72 + 120 - [64 + 378 + 15] = 234 - 457 = -223$$

$|A| \neq 0$ olduğu için A matrisi tekil değildir. Her üç satır ve sütun doğrusal olarak bağımsızdır ve $\rho(A) = 3$.

(*b*)

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Şekil 6-4'teki şekilde matris genişletilir ve hesaplanır,

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \\ 5 & 8 \end{matrix}$$

Şekil 6-4

$$|B| = 4 \cdot 7 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 9 \cdot 2 \cdot 8 - [5 \cdot 7 \cdot 9 + 8 \cdot 3 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \cdot 1]$$

$$|B| = 168 + 15 + 144 - [315 + 96 + 12] = 327 - 423 = -96$$

B matrisi tekil değildir ve $\rho(B) = 3$.

(*c*)
$$C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 16 & 4 & 20 \\ 28 & 7 & 35 \end{bmatrix}$$

Şekil 6-5'teki şekilde matris genişletilir ve hesaplanır,

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 16 & 4 & 20 \\ 28 & 7 & 35 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 5 \\ 16 & 4 \\ 28 & 7 \end{matrix}$$

Şekil 6-5

$$|C| = 2 \cdot 4 \cdot 35 + 5 \cdot 20 \cdot 28 + 9 \cdot 16 \cdot 7 - [28 \cdot 4 \cdot 9 + 7 \cdot 20 \cdot 2 + 35 \cdot 16 \cdot 5]$$

$$|C| = 280 + 2800 + 1008 - [1008 + 280 + 2800] = 4088 - 4088 = 0$$

$|C| = 0$ olduğu için C matrisi tekildir ve üç satırın ve sütunun tümü doğrusal olarak bağımsız değildir. Bu nedenle $\rho(C) \neq 3$. Determinant testi doğrusal bağımsızlığın varlığını belirttiği halde, bağımlılığın yapısını belirtmez. Burada üçüncü satır ikinci satırın 1.75 katıdır. C matrisindeki herhangi iki satırın ya da sütunun bağımsızlığını test etmek için, çeşitli alt matrislere determinant testi uygulanır. Sol üst köşedeki 2 × 2 alt matris ile başlanıldığında,

$$|C_1| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 16 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 5(16) = -72 \neq 0$$

$|C_1| \neq 0$ olduğu için C matrisinde doğrusal olarak bağımsız iki satır ve sütun bulunmaktadır ve $\rho(C) = 2$.

CRAMER KURALI

6.3. Aşağıdaki 2 × 2 eşanlı denklem sistemlerindeki bilinmeyen değişkenlerin çözümünde Cramer Kuralını kullanınız.

(*a*) $x_1 + 3x_2 = 14$
$9x_1 + 2x_2 = 24$

Denklemler matris formunda belirtilir,

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Burada $|A| = 8(2) - 3(9) = -11$

A matrisinde x_1 değişkeninin katsayılarını belirten birinci sütunun yerine B sabit sütunu yazılır,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 24 & 2 \end{bmatrix}$$

Ve determinant alınır.

$$|A_1| = 14(2) - 3(24) = 28 - 72 = -44$$

Sonrasında Cramer Kuralı uygulanır.

$$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-44}{-11} = 4$$

Daha sonra A matrisinde x_2 değişkeninin katsayılarını belirten ikinci sütunun yerine B sabitler sütunu yazılır,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 9 & 24 \end{bmatrix}$$

Determinant alınarak Cramer Kuralı uygulanır

$$|A_2| = 8(24) - 14(9) = 192 - 126 = 66$$

$$\bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{66}{-11} = -6$$

(*b*) $10x + 12y = -27$
$18x - 4y = -55$

$$A \cdot X = B$$

Burada
$$\begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 18 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -55 \end{bmatrix}$$

ve
$$|A| = 10(-4) - 12(18) = -256$$

(a) bölümünde olduğu gibi ilk değişken x için çözülür,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -27 & 12 \\ -55 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = -27(-4) - 12(-55) = 108 + 660 = 768$$

ve
$$\bar{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{768}{-256} = -3$$

Daha sonra (a) bölümünde olduğu gibi ikinci değişken y için çözülür,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 10 & -27 \\ 18 & -55 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = 10(-55) - (-27)(18) = -550 + 486 = -64$$

ve
$$\bar{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-64}{-256} = \frac{1}{4}$$

(*c*) $15p_1 - 4p_2 = 39$
$-7p_1 + 22p_2 = 163$

Burada
$$A = \begin{bmatrix} 15 & -4 \\ -7 & 22 \end{bmatrix}$$

ve
$$|A| = 15(22) - (-4)(-7) = 330 - 28 = 302$$

p_1 için çözülür,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 39 & -4 \\ 163 & 22 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = 39(22) - (-4)(163) = 858 + 652 = 1510$$

ve $$\bar{p}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1510}{302} = 5$$

p_2 için çözülür,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 15 & 39 \\ -7 & 163 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = 15(163) - 39(-7) = 2445 + 273 = 2718$$

ve $$\bar{p}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{2718}{302} = 9$$

(*d*) $20Q_1 + 45Q_2 = 950$
$36Q_1 + 50Q_2 = 1400$

Burada $$A = \begin{bmatrix} 20 & 45 \\ 36 & 50 \end{bmatrix}$$

ve $$|A| = 20(50) - 45(36) = 1000 - 1620 = -620$$

Q_1 için çözülür,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 950 & 45 \\ 1400 & 50 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = 950(50) - 45(1400) = 47{,}500 - 63{,}000 = -15{,}500$$

ve $$\bar{Q}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-15{,}500}{-620} = 25$$

Q_2 için çözülür,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 20 & 950 \\ 36 & 1400 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = 20(1400) - 950(36) = 28{,}000 - 34{,}200 = -6200$$

ve $$\bar{Q}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6200}{-620} = 10$$

6.4. Aşağıdaki 3 × 3 eş anlı denklem sistemlerindeki bilinmeyen değişkenlerin çözümünde Cramer Kuralını kullanınız.

(*a*) $3x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 67$
$4x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 36$
$7x_1 + x_2 + 5x_3 = 49$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 67 & 8 & 2 \\ 36 & 6 & 9 \\ 49 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Kısım 6.2'deki ve Problem 6.2'deki teknikler kullanılır,

$$|A| = 3 \cdot 6 \cdot 5 + 8 \cdot 9 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - [7 \cdot 6 \cdot 2 + 1 \cdot 9 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 8]$$

$$|A| = 90 + 504 + 8 - [84 + 27 + 160] = 602 - 271 = 331$$

x_1 için çözülür,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 67 & 8 & 2 \\ 36 & 6 & 9 \\ 49 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = 67\cdot6\cdot5 + 8\cdot9\cdot49 + 2\cdot36\cdot1 - [49\cdot6\cdot2 + 1\cdot9\cdot67 + 5\cdot36\cdot8]$$

$$|A_1| = 2010 + 3528 + 72 - [588 + 603 + 1440] = 5610 - 2631 = 2979$$

ve $$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{2979}{331} = 9$$

x_2 için çözülür,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 67 & 2 \\ 4 & 36 & 9 \\ 7 & 49 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = 3\cdot36\cdot5 + 67\cdot9\cdot7 + 2\cdot4\cdot49 - [7\cdot36\cdot2 + 49\cdot9\cdot3 + 5\cdot4\cdot67]$$

$$|A_2| = 540 + 4221 + 392 - [504 + 1323 + 1340] = 5153 - 3167 = 1986$$

ve $$\bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1986}{331} = 6$$

x_3 için çözülür,

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 67 \\ 4 & 6 & 36 \\ 7 & 1 & 49 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = 3\cdot6\cdot49 + 8\cdot36\cdot7 + 67\cdot4\cdot1 - [7\cdot6\cdot67 + 1\cdot36\cdot3 + 49\cdot4\cdot8]$$

$$|A_3| = 882 + 2016 + 268 - [2814 + 108 + 1568] = 3166 - 4490 = -1324$$

ve $$\bar{x}_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-1324}{331} = -4$$

(*b*) $-5p_1 + p_2 + 2p_3 = -6$
$2p_1 - 9p_2 + p_3 = -14$
$3p_1 + p_2 - 8p_3 = -58$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 2 & -9 & 1 \\ 3 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (-5)(-9)(-8) + (1)(1)(3) + (2)(2)(1)$$
$$- [(3)(-9)(2) + (1)(1)(-5) + (-8)(2)(1)]$$
$$|A| = -360 + 3 + 4 - [-54 - 5 - 16] = -353 + 75 = -278$$

p_1 için çözülür,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -14 & -9 & 1 \\ -58 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = (-6)(-9)(-8) + (1)(1)(-58) + (2)(-14)(1)$$
$$- [(-58)(-9)(2) + (1)(1)(-6) + (-8)(-14)(1)]$$
$$|A_1| = -432 - 58 - 28 - [1044 - 6 + 112] = -518 - 1150 = -1668$$

ve $$\bar{p}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-1668}{-278} = 6$$

p_2 için çözülür,

$$A_2 = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 2 \\ 2 & -14 & 1 \\ 3 & -58 & -8 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = (-5)(-14)(-8) + (-6)(1)(3) + (2)(2)(-58)$$
$$- [(3)(-14)(2) + (-58)(1)(-5) + (-8)(2)(-6)]$$
$$|A_2| = -560 - 18 - 232 - [-84 + 290 + 96] = -810 - 302 = -1112$$

ve $$\bar{p}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-1112}{-278} = 4$$

p_3 için çözülür,

$$A_3 = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -6 \\ 2 & -9 & -14 \\ 3 & 1 & -58 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = (-5)(-9)(-58) + (1)(-14)(3) + (-6)(2)(1)$$
$$- [(3)(-9)(-6) + (1)(-14)(-5) + (-58)(2)(1)]$$
$$|A_3| = -2610 - 42 - 12 - [162 + 70 - 116] = -2664 - 116 = -2780$$

ve $$\bar{p}_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-2780}{-278} = 10$$

(*c*) $16x - 3y + 10z = 8$
$-4x + 18y + 14z = 12$
$28x + 42y - 6z = 18$

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -3 & 10 \\ -4 & 18 & 14 \\ 28 & 42 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (16)(18)(-6) + (-3)(14)(28) + (10)(-4)(42)$$
$$- [(28)(18)(10) + (42)(14)(16) + (-6)(-4)(-3)]$$
$$|A| = -1728 - 1176 - 1680 - [5040 + 9408 - 72] = -18{,}960$$

x için çözülür,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 10 \\ 12 & 18 & 14 \\ 18 & 42 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = (8)(18)(-6) + (-3)(14)(18) + (10)(12)(42)$$
$$- [(18)(18)(10) + (42)(14)(8) + (-6)(12)(-3)]$$
$$|A_1| = -864 - 756 + 5040 - [3240 + 4704 + 216] = -4740$$

ve $$\bar{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-4740}{-18{,}960} = \frac{1}{4}$$

y için çözülür,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 10 \\ -4 & 12 & 14 \\ 28 & 18 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = (16)(12)(-6) + (8)(14)(28) + (10)(-4)(18)$$
$$- [(28)(12)(10) + (18)(14)(16) + (-6)(-4)(8)]$$
$$|A_2| = -1152 + 3136 - 720 - [3360 + 4032 + 192] = -6320$$

ve
$$\bar{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6320}{-18{,}960} = \frac{1}{3}$$

z için çözülür,

$$A_3 = \begin{bmatrix} 16 & -3 & 8 \\ -4 & 18 & 12 \\ 28 & 42 & 18 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = (16)(18)(18) + (-3)(12)(28) + (8)(-4)(42)$$
$$- [(28)(18)(8) + (42)(12)(16) + (18)(-4)(-3)]$$
$$|A_3| = 5184 - 1008 - 1344 - [4032 + 8064 + 216] = -9480$$

ve
$$\bar{z} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-9480}{-18{,}960} = \frac{1}{2}$$

TERS MATRİSLER

6.5. (*a*) A^{-1} ters matrisini bulunuz ve (*b*) ters matrisi kullanarak aşağıda verilen denklem sistemindeki bilinmeyen değişkenleri çözünüz.

$$3x_1 + 7x_2 = 41$$
$$8x_1 + 9x_2 = 63$$

(*a*) Kısım 6.5'teki ve Örnek 5'teki Gauss eliminasyon yöntemini kullanılır ve genişletilmiş matrisi oluşturulur,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1*a*. a_{11} elemanın yerinde 1 elde etmek için birinci satır $\frac{1}{3}$ ile çarpılır.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1*b*. Birinci sütunu temizlemek için ikinci satırdan birinci satır 8 ile çarpılıp çıkarılır.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{29}{3} & -\frac{8}{3} & 1 \end{array}\right]$$

2*a*. a_{22} elemanının yerinde 1 elde etmek için ikinci satır $-\frac{3}{29}$ ile çarpılır.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{29} & -\frac{3}{29} \end{array}\right]$$

2*b*. İkinici sütunu temizlemek için birinci satırdan ikinci satır $\frac{7}{3}$ ile çarpılıp çıkarılır.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{9}{29} & \frac{7}{29} \\ 0 & 1 & \frac{8}{29} & -\frac{3}{29} \end{array}\right]$$

Birim matris artık çizginin solunda kalmıştır,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{29} & \frac{7}{29} \\ \frac{8}{29} & -\frac{3}{29} \end{bmatrix}$$

(*b*) Kısım 6.6'daki ve Örnek 7'deki işlemler takip edilerek,

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{9}{29} & \frac{7}{29} \\ \frac{8}{29} & -\frac{3}{29} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 41 \\ 61 \end{bmatrix}$$

Daha sonra iki matris basit satır-sütun işlemleriyle çarpılır,

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{9}{29}(41) + \frac{7}{29}(61) \\ \frac{8}{29}(41) - \frac{3}{29}(61) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{58}{29} \\ \frac{145}{29} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Aynı problemin Cramer Kuralı ile çözüldüğü Örnek 3'ü de kapsayacak şekilde cevapları ve işlemleri karşılaştırınız.

6.6. Aşağıda verilen denklemler ile Problem 6.5'i tekrar çözünüz.

$$8x_1 + 3x_2 = 14$$
$$9x_1 + 2x_2 = 24$$

(*a*) Genişletilmiş matris oluşturulur,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 8 & 3 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1*a*. a_{11} elemanının yerinde 1 elde etmek için birinci satır $\frac{1}{8}$ ile çarpılır.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1*b*. Birinci sütunu temizlemek için ikinci satırdan birinci satır 9 ile çarpılıp çıkarılır.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{11}{8} & -\frac{9}{8} & 1 \end{array}\right]$$

2*a*. a_{22} elemanının yerinde 1 elde etmek için ikinci satır $-\frac{8}{11}$ ile çarpılır.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{8}{11} \end{array}\right]$$

2*b*. İkinici sütunu temizlemek için birinci satırdan ikinci satır $\frac{3}{8}$ ile çarpılıp çıkarılır.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{8}{11} \end{array}\right]$$

Birim matris artık çizginin solunda kalmıştır,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{9}{11} & -\frac{8}{11} \end{bmatrix}$$

(*b*)

$$X = \quad A^{-1} \quad B \,.$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{9}{11} & -\frac{8}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 24 \end{bmatrix}$$

İki matris basit satır-sütun işlemleriyle çarpılır,

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{11}(14) + \frac{3}{11}(24) \\ \frac{9}{11}(14) - \frac{8}{11}(24) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{44}{11} \\ -\frac{66}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Cevapları Problem 6.3(a)'dakilerle karşılaştırınız.

6.7. Aşağıda verilen denklemler ile Problem 6.5'i tekrar çözünüz.

$$3x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 67$$
$$4x_1 + 6x_2\ 9x_3 = 36$$
$$7x_1 + x_2\ 5x_3 = 49$$

(*a*)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1*a*. a_{11} elemanının yerinde 1 elde etmek için birinci satır $\frac{1}{3}$ ile çarpılır.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1*b*. Birinci sütunu temizlemek için ikinci satırdan birinci satır 4 ile çarpılıp çıkarılır ve üçüncü satırdan birinci satır 7 ile çarpılıp çıkarılır.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{19}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{53}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2*a*. a_{22} elemanının yerinde 1 elde etmek için ikinci satır $-\frac{3}{14}$ ile çarpılır.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{14} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2*b*. İkinici sütunu temizlemek için birinci satırdan ikinci satır $\frac{8}{3}$ ile çarpılıp çıkarılır ve üçüncü satır ile ikinci satır $\frac{53}{3}$ ile çarpılıp toplanır.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{30}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{14} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{331}{14} & \frac{19}{7} & -\frac{53}{14} & 1 \end{array}\right]$$

3*a*. a_{33} elemanının yerinde 1 elde etmek için üçüncü satır $-\frac{14}{331}$ ile çarpılır.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{30}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{38}{331} & \frac{53}{331} & -\frac{14}{331} \end{array}\right]$$

3*b*. Üçüncü sütunu temizlemek için birinci satırdan üçüncü satır $\frac{30}{7}$ ile çarpılıp çıkarılır ve ikinci satırdan üçüncü satır $\frac{19}{14}$ ile çarpılıp çıkarılır.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{21}{331} & -\frac{38}{331} & \frac{60}{331} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{43}{331} & \frac{1}{331} & -\frac{19}{331} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{38}{331} & \frac{53}{331} & -\frac{14}{331} \end{array}\right]$$

Birim matris artık çizginin solunda kalmıştır,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{21}{331} & -\frac{38}{331} & \frac{60}{331} \\ \frac{43}{331} & \frac{1}{331} & -\frac{19}{331} \\ -\frac{38}{331} & \frac{53}{331} & -\frac{14}{331} \end{bmatrix} = \frac{1}{331}\begin{bmatrix} 21 & -38 & 60 \\ 43 & 1 & -19 \\ -38 & 53 & -14 \end{bmatrix}$$

(*b*) $X = \quad A^{-1} \quad B$

$$X = \frac{1}{331}\begin{bmatrix} 21 & -38 & 60 \\ 43 & 1 & -19 \\ -38 & 53 & -14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 67 \\ 36 \\ 49 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{331}\begin{bmatrix} 21(67) - 38(36) + 60(49) \\ 43(67) + 1(36) - 19(49) \\ -38(67) + 53(36) - 14(49) \end{bmatrix} = \frac{1}{331}\begin{bmatrix} 2979 \\ 1986 \\ -1324 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Cevapları Problem 6.4(a)'dakilerle karşılaştırınız.

İKTİSATÇILAR VE İŞLETMECİLER İÇİN UYGULAMALAR

6.8. Aşağıda verilen arz ve talep denklemleri için denge fiyatını $\bar{P}$ ve denge miktarını $\bar{Q}$ bulmak için Cramer Kuralını kullanınız.

$$\text{Arz: } -7P + 14Q = -42$$

$$\text{Talep: } 3P + 12Q = 90$$

Matris formuna çevrilir,

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 14 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 \\ 90 \end{bmatrix}$$

burada $|A| = -1(12) + 14(3) = -126$

İlk değişken P için çözülür,

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -42 & 14 \\ 90 & 12 \end{vmatrix} = -42(12) - 14(90) = -1764$$

ve
$$\bar{P} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-1764}{-126} = 14$$

İkinci değişken Q için çözülür,

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -7 & -42 \\ 3 & 90 \end{vmatrix} = -7(90) - (-42)(3) = -504$$

ve
$$\bar{Q} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-504}{-126} = 4$$

Problem 4.25 ile karşılaştırınız.

6.9. Aşağıda verilen IS ve LM denklemleri için denge gelir seviyesini $\bar{Y}$ ve denge faiz oranını $\bar{i}$ belirlemek için Cramer Kuralını kullanınız.

$$\text{IS: } 0.3Y + 100i - 252 = 0$$

$$\text{LM: } 0.25Y - 200i - 193 = 0$$

$$\begin{matrix} A & \cdot & X & = & B \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 100 \\ 0.25 & -200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252 \\ 193 \end{bmatrix}$$

burada $|A| = 0.3(-200) - 100(0.25) = -85$

Y için çözülür,

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 252 & 100 \\ 193 & -200 \end{vmatrix} = 252(-200) - 100(193) = -69{,}700$$

ve $$\bar{Y} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-69{,}700}{-85} = 820$$

i için çözülür,

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0.3 & 252 \\ 0.25 & 193 \end{vmatrix} = 0.3(193) - 252(0.25) = -5.1$$

ve $$\bar{i} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-5.1}{-85} = 0.06$$

Problem 4.22 ile karşılaştırınız.

6.10. Aşağıda verilen denklemler ile Problem 6.9'u tekrar yapınız.

$$\text{IS:} \quad 0.4Y + 150i - 209 = 0$$
$$\text{LM:} \quad 0.1Y - 250i - 35 = 0$$

$$\begin{matrix} A & \cdot & X & = & B \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 150 \\ 0.1 & -250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 209 \\ 35 \end{bmatrix}$$

burada $|A| = 0.4(-250) - 150(0.1) = -115$

Y için çözülür,

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 209 & 150 \\ 35 & -250 \end{vmatrix} = 209(-250) - 150(35) = -57{,}500$$

ve $$\bar{Y} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-57{,}500}{-115} = 500$$

i için çözülür,

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0.4 & 209 \\ 0.1 & 35 \end{vmatrix} = 0.4(35) - 209(0.1) = -6.9$$

ve $$\bar{i} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6.9}{-115} = 0.06$$

Problem 4.23 ile karşılaştırınız.

6.11. Problem 6.10'u otonom yatırımlarda bir düşüş için tekrar çözünüz.

$$\text{IS:} \quad 0.4Y + 150i - 186 = 0$$
$$\text{LM:} \quad 0.1Y - 250i - 35 = 0$$

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 150 \\ 0.1 & -250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 186 \\ 35 \end{bmatrix}$$

burada $|A| = 0.4(-250) - 150(0.1) = -115$

Y için çözülür,

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 186 & 150 \\ 35 & -250 \end{vmatrix} = 186(-250) - 150(35) = -51{,}750$$

ve

$$\bar{Y} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-51{,}750}{-115} = 450$$

i için çözülür,

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0.4 & 186 \\ 0.1 & 35 \end{vmatrix} = 0.4(35) - 186(0.1) = -4.6$$

ve

$$\bar{i} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-4.6}{-115} = 0.04$$

Otonom yatırımlarda bir düşüş, gelirde bir düşüşe ve faiz oranında bir azalışa neden olur. Problem 4.24'e bakınız.

6.12. Aşağıdaki üç birbirine bağlı pazardaki denge fiyatını $\bar{P}$ ve denge miktarını $\bar{Q}$ Cramer Kuralınu kullanarak bulunuz.

$$\begin{aligned} Q_{s1} &= 6P_1 - 8 & Q_{d1} &= -5P_1 + P_2 + P_3 + 23 \\ Q_{s2} &= 3P_2 - 11 & Q_{d2} &= P_1 - 3P_2 + 2P_3 + 15 \\ Q_{s3} &= 3P_3 - 5 & Q_{d2} &= P_1 + 2P_2 - 4P_3 + 19 \end{aligned}$$

Problem 4.14'ten, pazarlar aşağıdaki koşul altında eş anlı dengededir.

$$\begin{aligned} &11P_1 - P_2 - P_3 + 31 \\ &-P_1 + 6P_2 - 2P_3 + 26 \\ &-P_1 - 2P_2 + 7P_3 + 24 \end{aligned}$$

burada

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= (11)(6)(7) + (-1)(-2)(-1) + (-1)(-1)(-2) \\ &-[(-1)(6)(-1) + (-2)(-2)(11) + (7)(-1)(-1)] \\ |A| &= 462 - 2 - 2 - [6 + 44 + 7] = 458 - 57 = 401 \end{aligned}$$

P_{31} için çözülür,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 31 & -1 & -1 \\ 26 & 6 & -2 \\ 24 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A_1| &= (31)(6)(7) + (-1)(-2)(24) + (-1)(26)(-2) \\ &-[(24)(6)(-1) + (-2)(-2)(31) + (7)(26)(-1)] \\ |A_1| &= 1302 + 48 + 52 - [-144 + 124 - 182] = 1402 + 202 = 1604 \end{aligned}$$

ve
$$\bar{P}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1604}{401} = 4$$

P_2 için çözülür,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 11 & 31 & -1 \\ -1 & 26 & -2 \\ -1 & 24 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = (11)(26)(7) + (31)(-2)(-1) + (-1)(-1)(24)$$
$$-[(-1)(26)(-1) + (24)(-2)(11) + (7)(-1)(31)]$$
$$|A_2| = 2002 + 62 + 24 - [26 - 528 - 217] = 2088 + 719 = 2807$$

ve
$$\bar{P}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{2807}{401} = 7$$

P_3 için çözülür,

$$A_3 = \begin{bmatrix} 11 & -1 & 31 \\ -1 & 6 & 26 \\ -1 & -2 & 24 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = (11)(6)(24) + (-1)(26)(-1) + (31)(-1)(-2)$$
$$-[(-1)(6)(31) + (-2)(26)(11) + (24)(-1)(-1)]$$
$$|A_3| = 1584 + 26 + 62 - [-186 - 572 + 24] = 1672 + 734 = 2406$$

ve
$$\bar{P}_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{2406}{401} = 6$$

Problem 4.14 ile karşılaştırınız.

6.13. Aşağıda verilenleri Problem 13.21'deki kısıtlı optimizasyon için birinci dereceden koşullara göre denge x, y ve λ değerlerini Cramer Kuralını kullanarak bulunuz.

$$10x - 2y - \lambda = 0$$
$$-2x + 16y - \lambda = 0$$
$$60 - x - y = 0$$

Yeniden sıralayarak matris formunda düzenlenir,

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 16 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -60 \end{bmatrix}$$

burada

$$|A| = (10)(16)(0) + (-2)(-1)(-1) + (-1)(-2)(-1)$$
$$-[(-1)(16)(-1) + (-1)(-1)(10) + (0)(-2)(-2)]$$
$$|A| = 0 + (-2) + (-2) - [16 + 10 + 0] = -4 - 26 = -30$$

İlk değişken x için çözülür,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 16 & -1 \\ -60 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = (0)(16)(0) + (-2)(-1)(-60) + (-1)(0)(-1)$$
$$-[(-60)(16)(-1) + (-1)(-1)(0) + (0)(0)(-2)]$$
$$|A_1| = 0 - 120 + 0 - [960 + 0 - 0] = -120 - 960 = -1080$$

Böylece
$$\bar{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-1080}{-30} = 36$$

Daha sonra ikinci değişken y için çözülür,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -60 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = (10)(0)(0) + (0)(-1)(-1) + (-1)(-2)(-60)$$
$$-[(-1)(0)(-1) + (-60)(-1)(10) + (0)(-2)(0)]$$
$$|A_2| = 0 + 0 - 120 - [+ 0\ 600 - 0] = -120 - 600 = -720$$

Böylece
$$\bar{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-720}{-30} = 24$$

Son olarak üçüncü değişken λ için çözülür,

$$A_3 = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 \\ -2 & 16 & 0 \\ -1 & -1 & -60 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = (10)(16)(-60) + (-2)(0)(-1) + (0)(-2)(-1)$$
$$-[(-1)(16)(0) + (-1)(0)(10) + (-60)(-2)(-2)]$$
$$|A_3| = -9600 + 0 + 0 - [0 - 0 - 240] = -9600 + 240 = --9360$$

ve
$$\bar{\lambda} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-9360}{-30} = 312$$

6.14. Aşağıda verilenleri Problem 13.33'teki kısıtlı optimizasyon için birinci derece koşullara göre denge x, y ve λ değerlerini Cramer Kuralını kullanarak bulunuz.

$$14x - y - \lambda = 0$$
$$-2x + 10y - \lambda = 0$$
$$77 - x - y = 0$$

Matris formunda,

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -77 \end{bmatrix}$$

Burada

$$|A_1| = (14)(10)(0) + (-2)(-1)(-1) + (-1)(-2)(-1)$$
$$-[(-1)(10)(-1) + (-1)(-1)(14) + (0)(-2)(-2)]$$
$$|A_1| = 0 + (-2) + (-2) - [10 + 14 + 0] = -4 - 24 = -28$$

x için çözülür,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & -1 \\ -77 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = (0)(10)(0) + (-2)(-1)(-77) + (-1)(0)(-1)$$
$$-[(-77)(10)(-1) + (-1)(-1)(0) + (-0)(0)(-2)]$$
$$|A_1| = 0 - 154 + 0 - [770 + 0 - 0] = -154 - 770 = -924$$

ve $$\bar{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-924}{-28} = 33$$

y için çözülür,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 14 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -77 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = (14)(0)(0) + (0)(-1)(-1) + (-1)(-2)(-77)$$
$$-[(-1)(0)(-1) + (-77)(-1)(14) + (0)(-2)(0)]$$
$$|A_2| = 0 + 0 - 154 - [0 + 1078 - 0] = -154 - 1078 = -1232$$

ve $$\bar{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-1232}{-28} = 44$$

λ için çözülür,

$$A_3 = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 0 \\ -2 & 10 & 0 \\ -1 & -1 & -77 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = (14)(10)(-77) + (-2)(0)(-1) + (0)(-2)(-1)$$
$$-[(-1)(10)(0) + (-1)(0)(14) + (-77)(-2)(-2)]$$
$$|A_3| = -10{,}780 + 0 + 0 -[0 - 0 - 308] = -10{,}780 + 308 = -10{,}472$$

ve $$\bar{\lambda} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-10{,}472}{-28} = 374$$

6.15. Verilen denklem sistemlerinde matrisin tersini alarak $\bar{Y}$ ve $\bar{i}$ için çözünüz.

$$\text{IS:} \quad 0.4Y + 150i = 209$$
$$\text{LM:} \quad 0.1Y - 250i = 35$$

Genişletilmiş matris oluşturulur,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0.4 & 150 & 1 & 0 \\ 0.1 & -250 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1*a*. a_{11} elemanının yerinde 1 elde etmek için birinci satır 2.5 ile çarpılır.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 375 & 2.5 & 0 \\ 0.1 & -250 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1*b*. Birinci sütunu temizlemek için ikinci satırdan birinci satır 0.1 ile çarpılıp çıkarılır.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 375 & 2.5 & 0 \\ 0 & -287.5 & -0.25 & 1 \end{array}\right]$$

2*a*. a_{22} elemanını yerinde 1 elde etmek için ikinci satır –0.00348 ile çarpılır ve küçük yuvarlama hataları yok sayılır.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 375 & 2.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.00087 & -0.00348 \end{array}\right]$$

2*b*. İkinci sütunu temizlemek için birinci satırdan ikinci satır 375 ile çarpılıp çıkarılır.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2.17375 & 1.30500 \\ 0 & 1 & 0.00087 & -0.00348 \end{array}\right]$$

Birim matris sol tarafta elde edildiğinde,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2.17375 & 1.30500 \\ 0.00087 & -0.00348 \end{bmatrix}$$

ve

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{bmatrix} 2.17375 & 1.30500 \\ 0.00087 & -0.00348 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 209 \\ 35 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2.17375(209) + 1.30500(35) \\ 0.00087(209) - 0.00348(35) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 0.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{i} \end{bmatrix}$$

Problem 4.23 ve 6.10 ile karşılaştırınız. Her ne kadar matrislerin tersinin ekonomik teoride önemli kullanım alanları olsa ve Gauss eliminasyon yöntemi doğrusal programlamada tek yönlü algoritma yöntemi için çok kritik önemde olsa da pratikte problemler Cramer Kuralı ile daha kolay çözülmektedir. Eğer matrislerin tersi ile ilgili daha çok pratik yapmak isterseniz Problem 6.8'den 6.11'e kadar olan sorulara bu yöntemi kendiniz uygulayınız.

Ek Problemler

DETERMİNANTLAR

6.16. Aşağıdaki 2 × 2 matrislerin her birinin determinantlarını alınız.

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 6 & 13 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ (*b*) $B = \begin{bmatrix} -9 & 16 \\ 11 & -2 \end{bmatrix}$

(*c*) $C = \begin{bmatrix} 15 & 22 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$ (*d*) $D = \begin{bmatrix} 18 & 8 \\ -9 & -4 \end{bmatrix}$

6.17. Aşağıdaki 3 × 3 matrislerin her birinin determinantlarını alınız.

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ (*b*) $B = \begin{bmatrix} -4 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

(*c*) $C = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 8 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ (*d*) $D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 6 & -4 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$

CRAMER KURALI

6.18. Aşağıdaki denklemlerin her birinin çözümünde Cramer Kuralını kullanınız.

(*a*) $4x + 5y = 92$
$7x + 6y = 128$

(*b*) $13x - 4y = 29$
$-8x + 9y = 41$

(*c*) $2x - 7y = -26$
$3x + 5y = -8$

(*d*) $-6x + 7y = -244$
$15x + 8y = 202$

6.19. Aşağıdaki denklemlerin her birinin çözümünde Cramer Kuralını kullanınız.

(*a*) $3x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 11$
$2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 18$
$9x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 53$

(*b*) $5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -59$
$6x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 53$
$-x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 90$

(*c*) $4x_1 - 9x_2 - 2x_3 = 28$
$2x_1 \quad -7x_3 = 53$
$5x_2 - 8x_3 = 50$

(*d*) $-4x_2 + 3x_3 = -57$
$8x_1 \quad -5x_3 = 7$
$6x_1 + 7x_2 \quad = 78$

TERS MATRİSLER

6.20. Aşağıdaki 2 × 2 matrislerin her birinin tersini bulunuz.

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

(*b*) $B = \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}$

(*c*) $C = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(*d*) $D = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 15 & 8 \end{bmatrix}$

6.21. Aşağıdaki 3 × 3 matrislerin her birinin tersini bulunuz.

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & -8 & 5 \\ 9 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

(*b*) $B = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ -1 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

(*c*) $C = \begin{bmatrix} 4 & -9 & -2 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

(*d*) $D = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 8 & 0 & -5 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

İŞLETME VE İKTİSATTA UYGULAMALAR

6.22. Aşağıdaki piyasaların her biri için denge fiyatını P_e ve denge miktarını Q_e bulmak için Cramer Kuralını ya da matrisin tersini alma yöntemini kullanınız.

(*a*) Arz: $-8P + 16Q = 400$
Talep: $5P + 20Q = 710$

(*b*) Arz: $-7P + 21Q = 546$
Talep: $22P + 11Q = 440$

(*c*) Arz: $-30P + 6Q = -492$
Talep: $16P + 2Q = 304$

(*d*) Arz: $-6P + 24Q = 2130$
Talep: $15P + 5Q = 525$

6.23. Aşağıda verilen IS-LM denklemlerinin her biri için denge gelir seviyesini Y_e ve denge faiz oranını i_e bulmak için Cramer Kuralını ya da matrisin tersini alma yöntemini kullanınız.

(*a*) IS: $0.35Y + 150i - 1409 = 0$
LM: $0.2Y - 100i - 794 = 0$

(*b*) IS: $0.25Y + 175i - 1757 = 0$
LM: $0.12Y - 75i - 837 = 0$

(*c*) IS: $0.12Y + 120i - 789 = 0$
LM: $0.08Y - 80i - 514 = 0$

(*d*) IS: $0.18Y + 125i - 955 = 0$
LM: $0.14Y - 50i - 731 = 0$

Ek Problemlerin Cevapları

6.16. (*a*) $|A| = -82$ (*b*) $|B| = -158$ (*c*) $|C| = 221$ (*d*) $|D| = 0$

6.17. (*a*) $|A| = -161$ (*b*) $|B| = -534$ (*c*) $|C| = -576$ (*d*) $|D| = -502$

6.18. (*a*) $x = 8, y = 12$ (*b*) $x = 5, y = 9$ (*c*) $x = -6, y = 2$
(*d*) $x = 22, y = -16$

6.19. (*a*) $x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = 8$
(*b*) $x_1 = -3, x_2 = 7, x_3 = 6$
(*c*) $x_1 = 9, x_2 = 2, x_3 = -5$
(*d*) $x_1 = -1, x_2 = 12, x_3 = -3$

6.20. (*a*) $A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$
(*b*) $B^{-1} = \frac{1}{83}\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$
(*c*) $C^{-1} = \frac{1}{31}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
(*d*) $D^{-1} = -\frac{1}{153}\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -15 & -6 \end{bmatrix}$

6.21. (*a*) $A^{-1} = -\frac{1}{33}\begin{bmatrix} -14 & -10 & 3 \\ 49 & 30 & -23 \\ 84 & 45 & -38 \end{bmatrix}$
(*b*) $B^{-1} = \frac{1}{129}\begin{bmatrix} -47 & 50 & -64 \\ -31 & 22 & -23 \\ 58 & -37 & 68 \end{bmatrix}$
(*c*) $C^{-1} = -\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 35 & -82 & 63 \\ 16 & -32 & 24 \\ 10 & -20 & 18 \end{bmatrix}$
(*d*) $D^{-1} = \frac{1}{288}\begin{bmatrix} 35 & 21 & 20 \\ -30 & -18 & 24 \\ 56 & -24 & 32 \end{bmatrix}$

6.22. (*a*) $P_e = 14, Q_e = 32$
(*b*) $P_e = 6, Q_e = 28$
(*c*) $P_e = 18, Q_e = 8$
(*d*) $P_e = 5, Q_e = 90$

6.23. (*a*) $Y_e = 400, i_e = 0.06$
(*b*) $Y_e = 7000, i_e = 0.04$
(*c*) $Y_e = 6500, i_e = 0.075$
(*d*) $Y_e = 5250, i_e = 0.08$

Bölüm 7

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA: GRAFİK KULLANIMI

7.1 GRAFİKLERİN KULLANIMI

Doğrusal programlama rakip ürün ve faaliyetler arasında kıt kaynakların optimal şekilde dağıtımını amaçlar. Doğrusal programlama birkaç kısıta bağlı olarak bir kâr veya maliyet fonksiyonunu optimize etmek için sıkça gereklidir. Bu yüzden de işletme ve iktisatta tek başına faydalıdır. Eğer kısıtlar iki değişken ile sınırlıysa, en kolay çözüm grafik kullanımı yoluyla gerçekleştirilir. Maksimizasyon ve minimizasyon için grafik yaklaşımı sırasıyla Kısım 7.2 ve 7.4'te gösterilmiştir.

7.2 GRAFİK KULLANIMI İLE MAKSİMİZASYON

Aşağıdaki dört basit adımda maksimizasyon için grafik yaklaşımı özetlenmiştir. Konuyu açıklamayı kolaylaştırmak için anlatım somut bir örnek üzerine oturtulmuştur. x_1 uyku tulumu ve x_2 çadır üreten bir firma olduğunu varsayalım. Her bir uyku tulumunu A kesmek için 2 saat, B dikmek için 5 saat ve C su yalıtımı için 1 saat gerekmektedir. Her bir çadırı kesmek için 1 saat, dikmek için 5 saat ve su yalıtımı için 3 saat gerekmektedir. Şirket mevcut kaynaklarla, kesim için en fazla 14 saate, dikim için 40 saate ve su yalıtımı için bir günde 18 saate sahiptir. Kâr marjı her bir uyku tulumu için 50 TL ve her bir çadır için 30 TL'dir. Bu bilgi ile kârı maksimize etmek için kaynakların optimal dağıtımını aşağıdaki yolla buluruz:

1. Veriler denklem ve eşitsizlik olarak ifade edilir. *Amaç fonksiyonu* olarak isimlendirilen fonksiyonu optimize etmek için,

$$\pi = 50x_1 + 30x_2 \tag{7.1}$$

Kısıtlara bağlı olarak

Kısıt A: $2x_1 + x_2 \leq 14$

Kısıt B: $5x_1 + 5x_2 \leq 40$

Kısıt C: $x_1 + 3x_2 \leq 18$

Negatif olmayan (0 veya 0'dan büyük) kısıtlar: $x_1, x_2 \geq 0$

haline gelir. Burada ki x_1 ve x_2 değişkenleri ***karar değişkenleri*** olarak isimlendirilir. İlk üç kısıt girdinin mevcudiyeti ve teknolojinin durumuna bağlı olarak belirlenen ***teknik kısıtlardır***. Dördüncü kısıt çözümün negatif (dolayısıyla kabul edilemez) değerler almasını engellemek için her problemde faydalanılan *negatif olmayan kısıttır.*

2. Eşitsizlik kısıtları denklem olarak yazılır. x_1'e göre x_2 için her biri çözümlenir ve çizilir. Böylece,

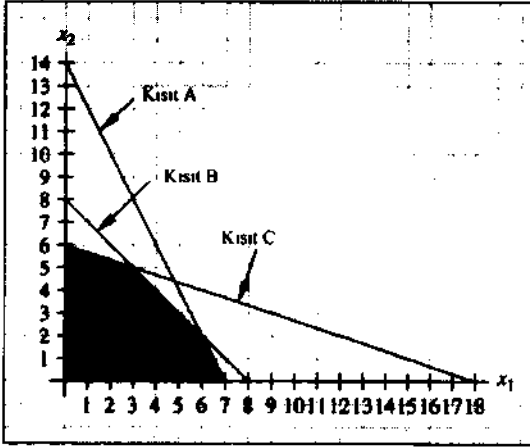
A'dan, $x_2 = 14 - 2x_1$

B'den, $x_2 = 8 - x_1$

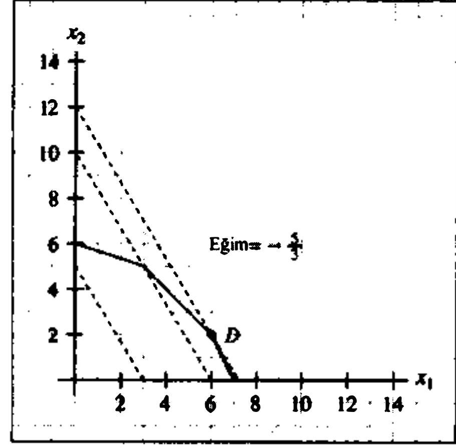
C'den, $x_2 = 6 - 1/3x_1$

Orijinal "küçük veya eşit" eşitsizliğinin grafiği *çizgi üzerindeki ve solundaki* tüm noktaları içerecektir. Şekil 7-1(a)'ya bakınız. $x_1, x_2 \geq 0$ negatif olmayan kısıtları sırasıyla dikey ve yatay eksenler tarafından temsil edilir. Taralı alan *olurlu alan* olarak isimlendirilir. Bu alan, üç kısıt artı negatif olmayan kısıtları karşılayan tüm noktaları içerir.

3. Eğer varsa olurlu alan içinde en uygun çözümü bulmak için, amaç fonksiyonu eş kâr doğrularının bir serisi gibi çizilir. (*7.1*)'den,



(a)



(b)

Şekil 7-1

$$x_2 = -\frac{5}{3}x_1 + \frac{\pi}{30}$$

Eş kâr doğrusunun eğimi $-\frac{5}{3}$'tür. Şekil 7-1(*b*)'de daha büyük ve daha büyük kârları hesaba katarak (kesikli) doğrular serisi çizildiğinde, eş kâr doğrusunu temsil eden en büyük olası kârın olurlu bölgeye D noktasında $x_1 = 6$ ve $x_2 = 2$ iken teğet olduğunu görürüz.

4. Olası maksimum kârı bulabilmek için (*7.1*)'de $x_1 = 6$ ve $x_2 = 2$ optimum değerleri yerine yazılır.

$$\pi = 50(6) + 30(2) = 360$$

Ayrıca Problem 7.1'den 7.5'e kadar ve 7.9'dan 7.13'e kadar bakınız.

7.3 EKSTREMUM NOKTA TEOREMİ

Şekil 7-1(*b*)'de, kâr *ektremum nokta* olarak isimlendirilen iki kısıtın kesişiminde maksimumdadır. *Ekstrem nokta teoremi,* amaç fonksiyonunun optimal olurlu bir değeri varsa, bu değerin daima sınırın ekstrem değerleri (veya köşe değerlerinden) biri olarak bulunacağını belirtir. Şekil 7-1(*a*)'da (0, 14), (0, 8), (0, 6), (7, 0), (8, 0), (18, 0), (3, 5), (6, 2), (4.8, 4.4) ve sonuncusu negatif olmayan kısıtların kesişimi (0, 0) olmak üzere 10 tane ekstrem değer buluruz. Bu 10 ekstrem değer *temel çözümdür*, aynı zamanda kısıtlardan hiç birini ihlal etmeyen 5 tanesi temel *olurlu* çözümdür. Bunlar (0, 6), (3, 5), (6, 2), (7, 0) ve (0, 0)'dır. Genellikle temel olurlu çözümlerden yalnızca birinin optimal olduğu ispatlanacaktır. Örneğin, (3, 5) için yukarıda bulunan $\pi = 360$'dan daha küçük olarak $\pi = 50(3) + 30(5) = 300$'dür.

7.4 GRAFİK KULLANIMI İLE MİNİMİZASYON

Minimizasyon için grafik yaklaşımı, Kısım 7.2'de maksimizasyon için sunulan 4 adım için birkaç basit uyarlama ile aşağıda gösterilmiştir. Yöntemi anlatmak için açıklama bir kez daha somut bir örnek yardımıyla yapılır. En az *A* fosfattan 45 birim, *B* potasyumdan 48 birim ve *C* nitrattan 84 birim sağlayacak şekilde gübre karışımı hazırlamak isteyen bir botanikçi varsayalım. y_1 gübre markası 3 birim fosfat, 4 birim potasyum ve 14 birim nitrat sağlıyor. İkinci gübre markası y_2 9 birim fosfat, 6 birim potasyum ve 7 birim nitrat sağlıyor. y_1'in fiyatı 12 TL; y_2'nin fiyatı 20 TL'dir. y_1 ve y_2'nin tüm minimum gereklilikleri sağlayan en düşük maliyetli kombinasyonu aşağıdaki gibi bulunur.

1. Amaç fonksiyonu minimize edilir.

$$c = 12y_1 + 20y_2 \qquad (7.2)$$

Kısıtlara bağlı olarak

Kısıt A: $\quad 3y_1 + 9y_2 \geq 45$

Kısıt B: $\quad 4y_1 + 6y_2 \geq 48$

Kısıt C: $\quad 14y_1 + 7y_2 \geq 84$

Negatif olmayan kısıt : $\quad y_1, y_2 \geq 0$

minimum gereklilikler yerine getirilmeli ancak aşılabildiğinden teknik kısıtlar ≥ şeklinde okunur.

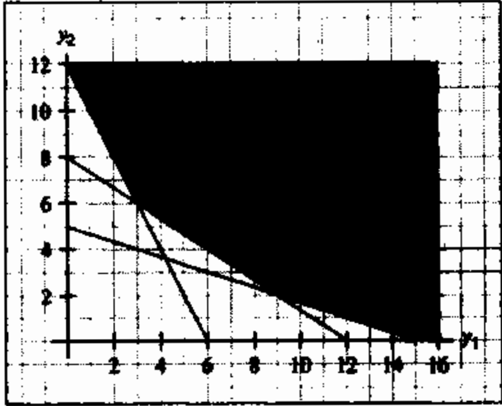
2. Eşitsizlik kısıtları eşitlik gibi yazılır. y_1'e göre y_2 çözülür ve grafiği çizilir. Böylece,

A'dan, $\quad y_2 = 5 - \frac{1}{3}y_1$

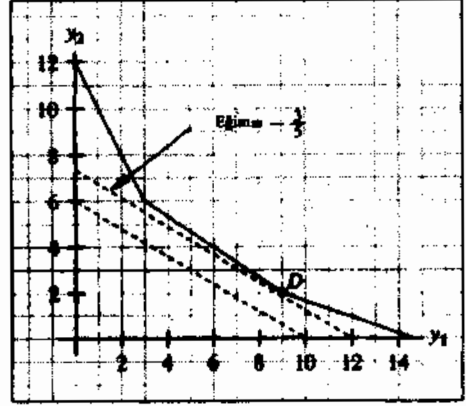
B'den, $\quad y_2 = 5 - \frac{1}{3}y_1$

C'den, $\quad y_2 = 12 - 2y_1$

Orijinal "büyük veya eşit" eşitsizliğinin grafiği *çizgi üstündeki ve onun sağındaki* tüm noktaları içerecektir. Şekil 7-2(a)'ya bakınız. Üç kısıt ve negatif olmayan kısıta karşılık gelen tüm noktaları içeren taralı alan olurlu bölgedir.



(a)



(b)

Şekil 7-2

3. Olurlu alandaki optimal çözümü bulmak için eş maliyet (kesikli) doğrularının bir serisi gibi amaç fonksiyonunun grafiği çizilir. (7.2)'den,

$$y_2 = -\frac{3}{5}y_1 + \frac{c}{20}$$

Şekil 7-2(b)'de, en düşük eş maliyet doğrusunun olurlu alanda $y_1 = 9$ ve $y_2 = 2$ olduğu D noktasında teğet olduğunu görürüz.

4. En düşük maliyeti bulmak için (*7.2*)'de $y_1 = 9$ ve $y_2 = 2$ optimal değerleri yerine yazılır,

$$c = 12(9) + 20(2) = 148$$

Minimizasyon problemleri için (0, 0)'ın olurlu bölgede olmadığına ve olurlu bölgede ki diğer kombinasyonların daha düşük maliyet önermediğine dikkat ediniz. Örneğin, (3, 6)'da $c = 12(3) + 20(6) = 156$'dır. Ayrıca Problem 7.6'dan 7.8'e kadar ve 7.14'ten 7.19'a kadar bakınız.

7.5 YAPAY VE ARTIK DEĞİŞKENLER

İkiden fazla değişken içeren problemler, önceki kısımlarda sunulan iki boyutlu grafiksel yaklaşımın kapsamının dışındadır. Denklemlere ihtiyaç olduğundan, lineer eşitsizlik sistemleri lineer denklem sistemine çevrilmek zorundadır. Bu, sistemdeki eşitsizliklerin her birine ayrı bir yapay veya artık değişken eklenmesiyle yapılır.

$9x_1 + 2x_2 \leq 86$ gibi "küçük veya eşit" eşitsizliği $s \geq 0$ olmak üzere bir *yapay değişken eklenerek* $9x_1 + 2x_2 + s = 86$ gibi bir denkleme dönüştürülebilir. Eğer $9x_1 + 2x_2 = 86$ ise yapay değişken $s = 0$'dır. Eğer $9x_1 + 2x_2 < 86$ ise, s 86 ile $9x_1 + 2x_2$ arasında pozitif bir değere eşittir.

$3y_1 + 8y_2 \geq 55$ gibi "büyük veya eşit" eşitsizliği $s \geq 0$ olmak üzere *artık bir değişken çıkararak* $3y_1 + 8y_2 - s = 55$ gibi bir eşitliğe dönüştürülebilir. Eğer $3y_1 + 8y_2 = 55$ ise artık değişken $s = 0$'dır. Eğer $3y_1 + 8y_2 > 55$ ise, s 55 ile $3y_1 + 8y_2$ arasında pozitif bir değere eşittir.

ÖRNEK 1. Kısım 7.2'de ki tüm teknik kısıtlar "küçük veya eşit" eşitsizlikleri içerdiğinden kısıtların her birine aşağıdaki gibi ayrı ayrı bir yapay değişken eklenir:

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 14 \qquad 5x_1 + 5x_2 + s_2 = 40 \qquad x_1 + 3x_2 + s_3 = 18$$

Matris formunda ifade edilir,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 40 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Kısım 7.4'te aksine tüm kısıtlar "büyük veya eşittir" şeklindedir. Dolayısıyla eşitsizlik kısıtlarının her birinden ayrı ayrı artık değişkenler çıkarılır.

$$3y_1 + 9y_2 - s_1 = 45 \qquad 4y_1 + 6y_2 - s_2 = 48 \qquad 14y_1 + 7y_2 - s_3 = 84$$

Matris formda,

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ 14 & 7 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 48 \\ 84 \end{bmatrix}$$

7.6 TEMEL TEOREM

Kısım 4.1'de açıklandığı üzere, $v > n$ olmak üzere n tane tutarlı denklem sistemi ve v tane değişken verildiğinde çözümlerin sayısı sonsuz olacaktır. Fakat yine de ekstrem noktaların sayısı sınırlıdır. *Temel teorem* bize $v > n$ olmak üzere, n tane tutarlı denklem sistemi ve v tane değişken için en az $v - n$ değişkenin sıfıra eşit olduğu ekstrem noktada bir çözümün olduğunu söyler. Böylece $v - n$ değişken sıfıra eşitlenerek ve

kalan n değişken için n denklem çözülerek bir ekstrem noktası veya temel çözüm bulunabilir. Temel çözümün N sayısı formül ile verilir.

$$N = \frac{v!}{n!(v-n)!}$$

Buradaki $v!$ *v faktöriyel* olarak okunur ve Örnek 3'te açıklanmaktadır.

ÖRNEK 2. Örnek 1'de üç denklemin her iki setinde de eşitliğin solundaki beş değişken olan (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) ve (y_1, y_2, s_1, s_2, s_3) için eşitsizlikler denklem olarak yazılır. Temel bir çözüm bulmak için sıfıra eşitlenmesi gereken değişkenlerin sayısını belirlemekte kullanılan yöntem ise aşağıda gösterilmiştir.

Her bir denklem setinde üç denklem ve beş değişken olduğundan ve temel teorem temel çözüm için $v-n$ değişkenin sıfıra eşit olması gerektiğini söylediğinden, ekstrem noktaya veya temel bir çözüme sahip olması amacıyla denklem sistemlerinin her birinde 5 – 3 veya 2 değişken sıfıra eşit olmalıdır. Başlangıç temel çözümü daima direkt olarak orijinal matristen okunabilir. Örneğin, Örnek 1'de birinci denklem setinde $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ alınıp çarpılarak, başlangıç temel çözümünü bulabiliriz: $s_1 = 14$, $s_2 = 40$ ve $s_3 = 18$. Benzer şekilde ikinci denklem setinde $y_1 = 0$ ve $y_2 = 0$ alınıp çarpılarak, başlangıç temel çözümünü bulabiliriz: $s_1 = -45$, $s_2 = -48$ ve $s_3 = -84$. Yine de minimizasyon problemlerinde başlangıç temel çözümünün negatif olmayan kısıt sağlanmadığında olurlu olmadığına dikkat ediniz.

ÖRNEK 3. Var olan N tane temel çözümün toplam sayısını belirlemek için gerekli hesaplamalar aşağıda gösterilmiştir.

Temel çözümün sayısı için $v!/[n!(v-n!)!]$ kullanılır ve Örnek 1'de her iki denklem setindeki $v = 5$ ve $n = 3$ olarak verilen parametreler yerine yazılır,

$$N = \frac{5!}{3!(2)!}$$

Burada $5! = 5(4)(3)(2)(1)$'dir. Böylece,

$$N = \frac{5(4)(3)(2)(1)}{3(2)(1)(2)(1)} = 10 \qquad \text{temel çözüm}$$

Bu, Şekil 7-1(a)'da ekstrem noktaların basitçe sayılması ile Kısım 7.3'te elde edilen sonuçları doğrular. Kısım 7.4'te ki parametrelerin sayıları da aynı olduğundan, bu problemde Şekil 7-2(a)'da tanımlanan kontrol edebileceğimiz 10 tane ekstrem nokta olması gerektiğini biliyoruz: (0, 12), (0, 8), (0, 5), (6, 0), (12, 0), (15, 0), (3, 6), (9, 2), (4.2, 3.6) ve (0, 0). (0, 0) olurlu alanda olmadığından, yalnızca olurlu dört çözüm olduğuna dikkat ediniz: (0, 12), (3, 6), (9, 2) ve (15, 0).

Çözümlü Sorular

İKTİSADİ PROBLEMLERİN MATEMATİKSEL YORUMU

7.1. Bir imalatçı x_1 ve x_2 olmak üzere iki ürün üretiyor. İlk ürünün yapımı için 5 saat, montajı için 3 saat ve paketleme için 4 saat gerekiyor. İkinci ürünün yapımı için 2 saat, montajı için 12 saat ve paketleme için 8 saat gerekiyor. İmalathane yapım için 40 saat, montaj için 60 saat ve paketleme için 48 saat kullanılabilir. Kâr marjı x_1 için 7 TL ve x_2 için 21 TL'dir. Kârı maksimize edecek çıktı bileşimini belirlemek için gerekli olan verileri denklem ve eşitsizlik olarak yazınız.

max $\quad \pi = 7x_1 + 21x_2$

öyle ki $\quad 5x_1 + 2x_2 \le 40$ (yapım kısıtı)

$3x_1 + 12x_2 \le 60$ (montaj kısıtı)

$4x_1 + 8x_2 \le 48$ (paketleme kısıtı)

$x_1, x_2 \ge 0$

Grafiksel çözüm için Problem 7.9'a bakınız.

7.2. Bir alüminyum üreticisi x_1 ve x_2 olmak üzere iki tür alüminyum üretiyor. 1. tip alüminyumu eritmek için 6 saat, yuvarlamak için 3 saat ve kesim için 1 saat gerekiyor. 2. Tip alüminyumu eritmek için 2 saat, yuvarlamak için 5 saat ve kesim için 4 saat gerekiyor. İmalathane alüminyumu eritmek için 36 saat, yuvarlamak için 30 saat ve kesim için 20 saate sahiptir. Kâr marjı x_1 için 10 TL ve x_2 için 8 TL'dir. Kâr maksimizasyonunu sağlayacak çıktı bileşimini bulmak için uygun verileri denklem ve eşitsizlik olarak yazınız.

max $\pi = 10x_1 + 8x_2$

öyle ki $6x_1 + 2x_2 \leq 36$ (eritme kısıtı)

$3x_1 + 5x_2 \leq 30$ (yuvarlama kısıtı)

$x_1 + 4x_2 \leq 20$ (kesim kısıtı)

$x_1, x_2 \geq 0$

Grafiksel çözüm için Problem 7.10'a bakınız.

7.3. Bir taklit mücevher üreticisi x_1 kolye ve x_2 bileklik yapmaktadır. Kolyeler 32 TL kâr marjına, bileklikler 24 TL kâr marjına sahiptir. Kolyeler için 2 saat taş kesimi, 7 saat yapım ve 3 saat cilalama sürmektedir. Bileklikler için 5 saat taş kesimi, 7 saat yapım ve 3 saat cilalama sürmektedir. Mücevher üreticisi taş kesimi için 40 saat, yapım için 70 saat ve cilalama için 48 saate sahiptir. Kâr maksimizasyonunu sağlayacak çıktı bileşimini bulmak için gerekli verileri denklem ve eşitsizliklere dönüştürünüz.

max $\pi = 32x_1 + 24x_2$

öyle ki $2x_1 + 5x_2 \leq 40$ (taş kesimi kısıtı)

$7x_1 + 7x_2 \leq 70$ (yapım kısıtı)

$6x_1 + 3x_2 \leq 48$ (cilalama kısıtı)

$x_1, x_2 \geq 0$

7.4. Bir çömlekçi sırasıyla 18 TL, 10 TL ve 12 TL kâr marjı ile x_1 sürahi, x_2 kase ve x_3 servis tabağı yapıyor. Sürahilere şekil vermesi 5 saat ve sırlaması 3 saat; kaselere şekil vermesi 2 saat ve sırlaması 1 saat; servis tabaklarına şekil vermesi 3 saat ve sırlaması 2 saat gerektiriyor. Çömlekçi şekil verme için 55 saat ve sırlama için 36 saate sahiptir. Optimum çıktı bileşimini bulmak için bilgileri gerekli denklem ve eşitsizlikler olarak yazınız.

max $\pi = 18x_1 + 10x_2 + 12x_3$

öyle ki $5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 55$ (şekil verme kısıtı)

$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 36$ (sırlama kısıtı)

$x_1, x_2 \geq 0$

7.5. Bir marangoz üç çeşit dolap yapıyor: yerel x_1, kolonyal x_2 ve modern x_3. Yerel modelin imal edilmesi için 8 saat, zımparalanması için 5 saat ve boyama için 6 saat gerekmektedir. Kolonyal modelin imal edilmesi için 6 saat, zımparalanması için 4 saat ve boyama için 2 saat gerekmektedir. Modern modelin imal edilmesi için 5 saat, zımparalanması için 2 saat ve boyama için 4 saat gerekmektedir. Marangoz imalat için 96, zımparalama için 44 ve boyama için 58 saate sahiptir. Kâr marjları x_1, x_2 ve x_3 için sırasıyla 38 TL, 26 TL ve 22 TL'dir. Optimal çıktı bileşimini bulmak için verileri uygun matematiksel formda ifade ediniz.

max $\pi = 38x_1 + 26x_2 + 22x_3$

öyle ki $8x_1 + 6x_2 + 52x_3 \leq 96$ (imal etme kısıtı)

$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 44$ (zımparalama kısıtı)

$6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 58$ (boyama kısıtı)

$x_1, x_2 \geq 0$

7.6. Bir hayvan bakıcısı hayvanlarına her gün minimum 36 miligram (mg) iyot, 84 mg demir ve 16 mg çinko vermek istiyor. Birinci y_1 yemi 3 mg iyot, 6 mg demir ve 1 mg çinko; ikinci y_2 yemi 2 mg iyot, 6 mg demir ve 4 mg çinko sağlıyor. Yemlerden ilk tipin maliyeti 20 TL; ikincisinin 15 TL'dir. Grafikler ve denklemler açısından, en az maliyetle günlük ihtiyacı sağlayan yem bileşimi nedir?

min $c = 20y_1 + 15y_2$

öyle ki $3y_1 + 2y_2 \geq 36$ (iyot ihtiyacı)

$6y_1 + 6y_2 \geq 84$ (demir ihtiyacı)

$y_1 + 4y_2 \geq 16$ (çinko ihtiyacı)

$y_1, y_2 \geq 0$

Grafik kullanımı ile çözümü için Problem 7.14'e bakınız.

7.7. Bir beslenme uzmanı her müşterisinden günlük minimum 30 birim A vitamini, 20 birim D vitamini ve 24 birim E vitamini almasını istiyor. Birinci diyet takviyesi y_1'in kilogramı 80 TL (80 TL/kg)'dır ve 2 birim A vitamini, 5 birim D vitamini ve 2 birim E vitamini sağlıyor. İkinci diyet takviyesi olan y_2'nin fiyatı 160 TL/kg'dır ve 6 birim A vitamini, 1 birim D vitamini ve 3 birim E vitamini sağlıyor. Günlük ihtiyacı karşılayan en düşük maliyetli takviye bileşenini denklem ve eşitsizlikler açısından tanımlayınız.

min $c = 80y_1 + 160y_2$

öyle ki $2y_1 + 6y_2 \geq 30$ (A vitamini ihtiyacı)

$5y_1 + y_2 \geq 20$ (D vitamini ihtiyacı)

$2y_1 + 3y_2 \geq 24$ (E vitamini ihtiyacı)

$y_1, y_2 \geq 0$

Grafik kullanımı ile çözümü için Problem 7.15'e bakınız.

7.8. Bir mutfak robotu ile y_1, y_2 ve y_3 olmak üzere üç içerikten oluşan en düşük maliyetli paket karışımı yapılmak isteniyor. Birincisi 4 birim karbonhidrat ve 3 birim protein bulunduruyor ve bir paket 25 kuruşa mal oluyor. İkincisi 6 birim karbonhidrat ve 2 birim protein bulunduruyor ve bir paket 32 kuruşa mal oluyor. Üçüncüsü 9 birim karbonhidrat ve 5 birim protein sağlıyor ve bir paket 55 kuruşa mal oluyor. Paket karışımı en az 60 birim karbonhidrat ve 45 birim proteinden oluşmak zorundadır. Bilgileri matematiksel olarak ifade ediniz.

min $c = 0.25y_1 + 0.32y_2 + 0.55y_3$

öyle ki $4y_1 + 6y_2 + 9y_3 \geq 60$ (karbonhidrat ihtiyacı)

$3y_1 + 2y_2 + 9y_3 \geq 45$ (protein ihtiyacı)

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

MAKSİMİZASYON PROBLEMLERİNDE GRAFİK ÇİZİMİ

7.9. Problem 7.1'den elde edilen aşağıdaki verileri kullanarak,

(1) Öncelikle x_1 cinsinden x_2 ler çözülerek kısıtların grafiklerini çiziniz.

(2) Tekrar grafiği çiziniz ve olurlu bölgeyi koyulaştırınız.

(3) Amaç fonksiyonunun eğimini hesaplayınız. Bir cetvel ile bu eğimi oluşturunuz, olurlu bölgeye teğet olan noktaya getiriniz ve kesikli doğrular çiziniz.

(4) Teğet noktalarında x_1 ve x_2 için kritik değerleri okuyunuz ve bu değerler için amaç fonksiyonunu hesaplayınız.

max $\pi = 7x_1 + 21x_2$

öyle ki $5x_1 + 2x_2 \leq 40$ (A kısıtı)

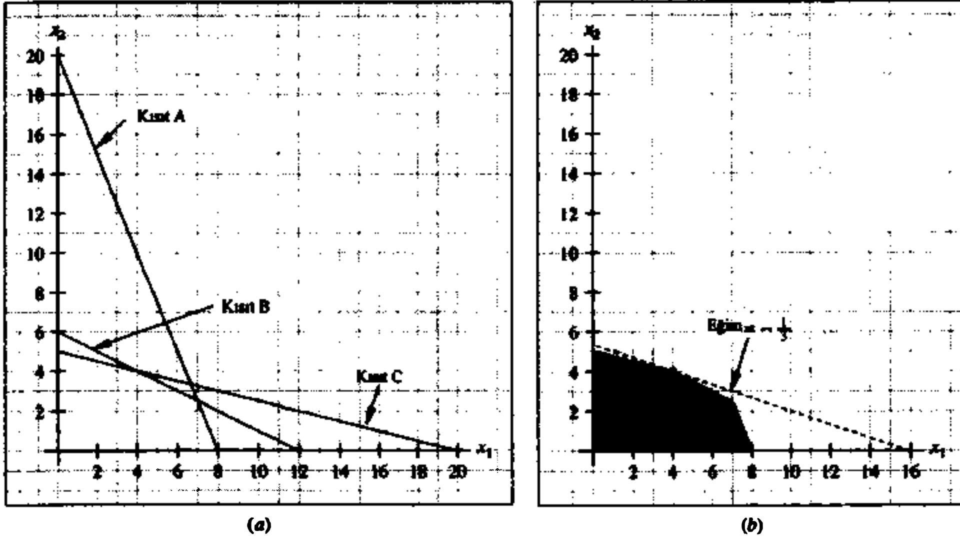
$3x_1 + 12x_2 \leq 60$ (B kısıtı)

$4x_1 + 8x_2 \leq 48$ (C kısıtı)

$x_1, x_2 \geq 0$

Eşitsizlik kısıtları Şekil 7-3(a)'da gösterildiği gibi çizilmelidir. A kısıtından, $x_2 = -25x_1 + 20$; B'den, $x_2 - \frac{1}{4}x_1 + 5$; C'den, $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 6$ elde edilir. Negatif olmayan kısıtlar, analizi yalnızca birinci bölgeyle sınırlar.

Olurlu bölge Şekil 7-3(b)'de gösterildiği gibi çizilir. Amaç fonksiyonundan, $x_1 = -\frac{1}{3}x_1 + \pi / 21$ ve eğim $-\frac{1}{3}$'dir. Olurlu bölge ile teğet noktasında, $x_1 = 4$ ve $x_2 = 4$'tir. Böylece, $\pi = 7\ (4) + 21(4) = 112$'dir.



Şekil 7-3

7.10. Problem 7.2'den elde edilen aşağıdaki verileri kullanarak Problem 7.9'u tekrar çözünüz:

max $\pi = 10x_1 + 8x_2$

öyle ki $6x_1 + 2x_2 \leq 36$ (A kısıtı)

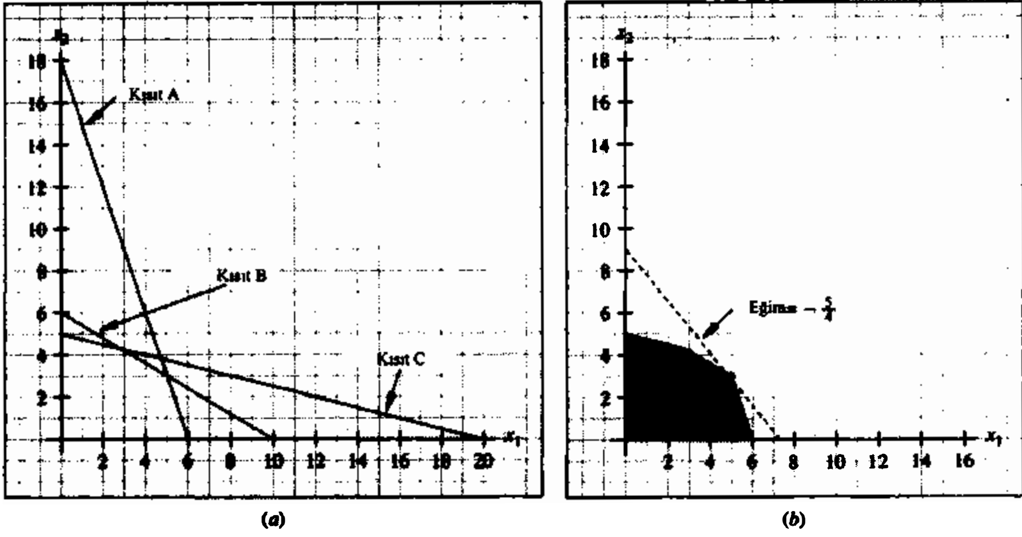
$3x_1 + 5x_2 \leq 30$ (B kısıtı)

$x_1 + 4x_2 \leq 20$ (C kısıtı)

$x_1, x_2 \geq 0$

Kısıtların çizimi için Şekil 7-4(a)'ya ve olurlu bölge için Şekil 7-4(b)'ye bakınız.

Amaç fonksiyonundan, $x_2 = -\frac{5}{4}x_1 + \pi / 8$ ve eğim $-\frac{5}{4}$'dir. Şekil 7-4(b)'de teğet noktası (5, 3)'te oluşmaktadır. Dolayısıyla, $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ ve $\pi = 10\ (5) + 8(3) = 74$'tir.



Şekil 7-4

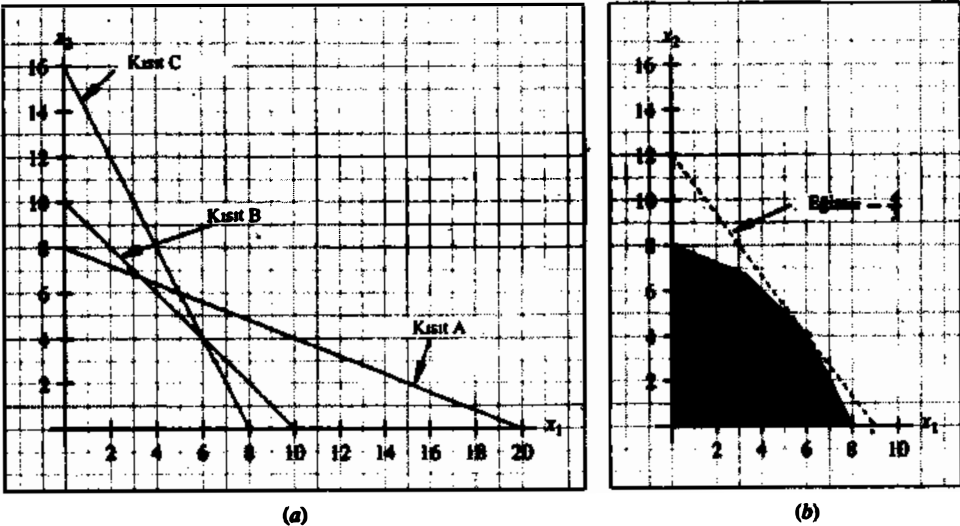
7.11. Aşağıdaki veriler için Problem 7.9'u tekrar çözünüz:

max $\pi = 8x_1 + 6x_2$

öyle ki
$2x_1 + 5x_2 \leq 40$ (A kısıtı)
$3x_1 + 3x_2 \leq 30$ (B kısıtı)
$8x_1 + 4x_2 \leq 64$ (C kısıtı)
$x_1, x_2 \geq 0$

Eşitsizlikler Şekil 7-5(a)'da ve olurlu bölge Şekil 7-5(b)'de çizilmiştir.

Amaç fonksiyonundan, $x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \pi/6$; eğim $-\frac{4}{3}$'dir. Şekil 7-5(b)'de, teğet noktası $x_1 = 6$ ve $x_2 = 4$'te oluşmaktadır. Böylece $\pi = 8\,(6) + 6(4) = 72$'dir.



Şekil 7-5

7.12. Aşağıdaki veriler için Problem 7.9'u tekrar çözünüz:

max $\pi = 15x_1 + 20x_2$

öyle ki $4x_1 + 10x_2 \leq 60$ (A kısıtı)

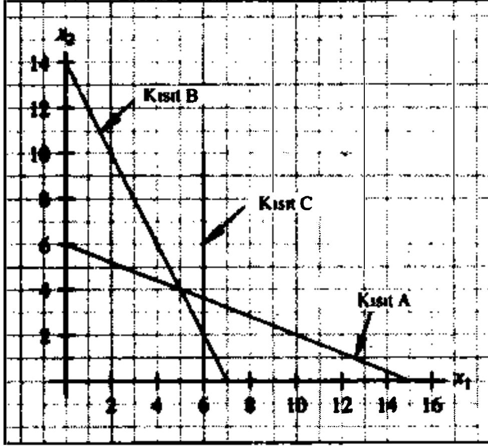
$6x_1 + 2x_2 \leq 42$ (B kısıtı)

$x_1 \leq 0$ (C kısıtı)

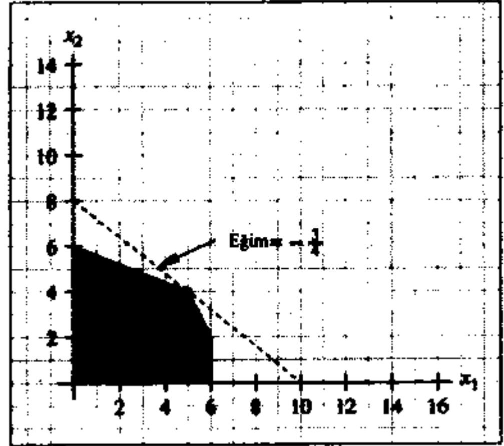
$x_1, x_2 \geq 0$

Kısıtların çizimi Şekil 7-6(a)'ya ve olurlu bölge Şekil 7-6(b)'ye bakınız.

Şekil 7-5(b)'de teğet noktası $x_1 = 5$ ve $x_2 = 4$'te oluşmaktadır. $\pi = 15\,(5) + 20\,(4) = 155$.



(a)



(b)

Şekil 7-6

7.13. Aşağıdaki veriler için Problem 7.9'u tekrar çözünüz:

max $\pi = 25x_1 + 50x_2$

öyle ki $9x_1 + 12x_2 \leq 144$ (A kısıtı)

$10x_1 + 6x_2 \leq 120$ (B kısıtı)

$x_2 \leq 9$ (C kısıtı)

$x_1, x_2 \geq 0$

Şekil 7-7'ye bakınız. Kritik değerlerden $x_1 = 4$ ve $x_2 = 9$'dir; $\pi = 25\,(4) + 50(9) = 550$'dir.

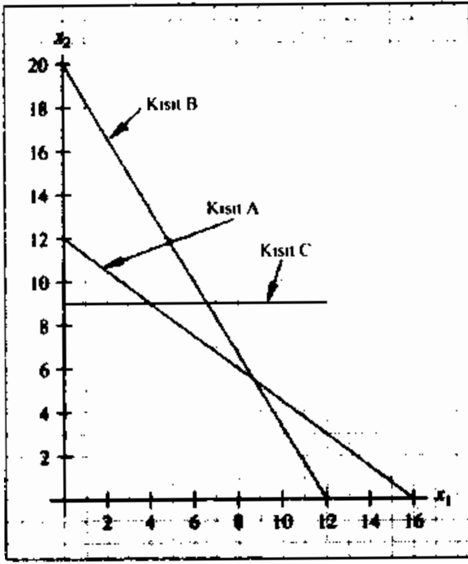
MİNİMİZASYON PROBLEMLERİNİN GRAFİK ÇİZİMİ

7.14. Problem 7.6'dan aşağıdaki verileri kullanarak, öncelikle y_1 cinsinden y_2 ler çözülerek kısıtların grafiklerini çiziniz. Tekrar grafiği çizip olurlu bölgeyi koyulaştırınız. Amaç fonksiyonunun eğimini hesaplayınız ve Problem 7.9'da ki gibi kesikli doğrular oluşturunuz. Teğet noktalarında y_1 ve y_2 için kritik değerleri okuyunuz ve bu değerlerde amaç fonksiyonunu hesaplayınız.

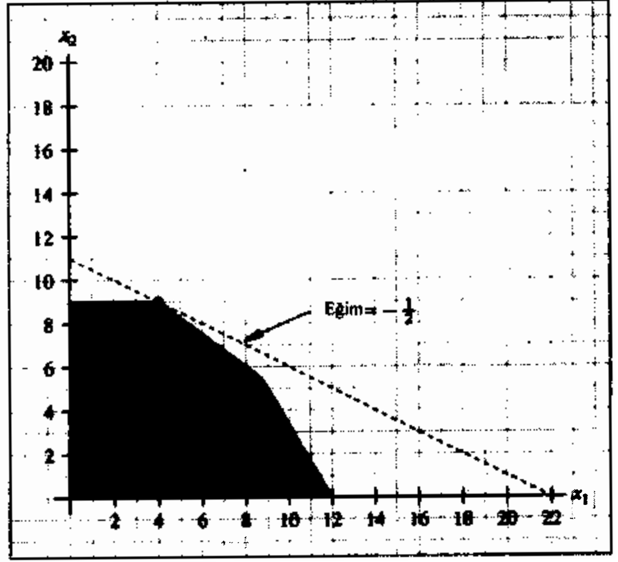
min $c = 20y_1 + 15y_2$

öyle ki $3y_1 + 2y_2 \geq 36$ (A kısıtı)

$6y_1 + 6y_2 \geq 84$ (B kısıtı)



(a)



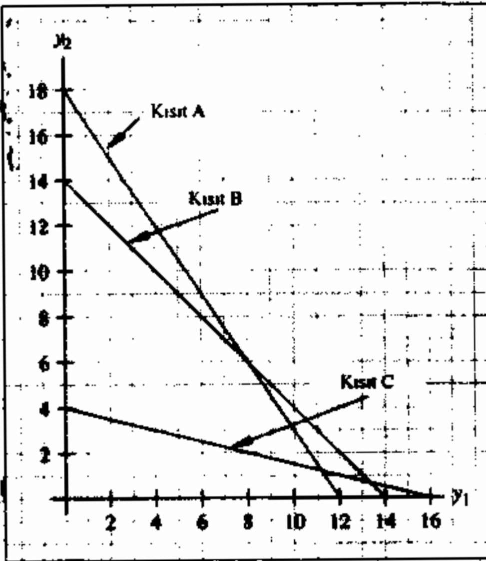
(b)

Şekil 7-7

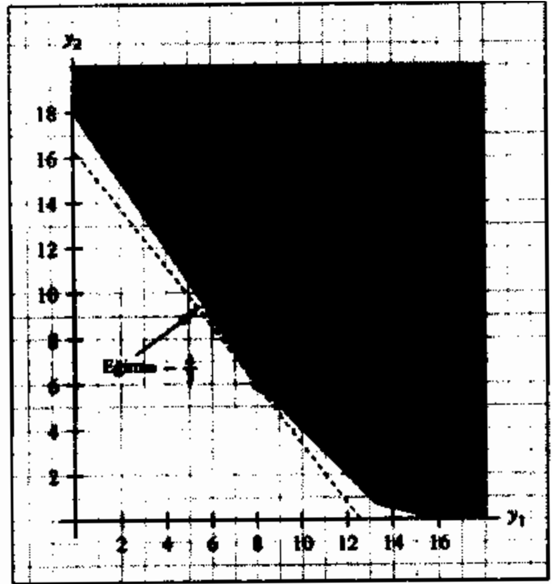
$y_1 + 4y_2 \geq 16$ (C kısıtı)

$y_1, y_2 \geq 0$

Şekil 7-8'e bakınız. Amaç fonksiyonundan $y_2 = -\frac{4}{3}y_1 + c/15$'dir. Eğim $-\frac{4}{3}$'dir. Şekil 7-8(*b*)'den, $y_1 = 8$ ve $y_2 = 6$'dir. Böylelikle $c = 20(8) + 15(6) = 250$'dir.



(a)



(b)

Şekil 7-8

7.15. Problem 7.7'den elde edilen verileri kullanarak Problem 7.14'ü tekrar çözünüz.

min $c = 80y_1 + 160y_2$

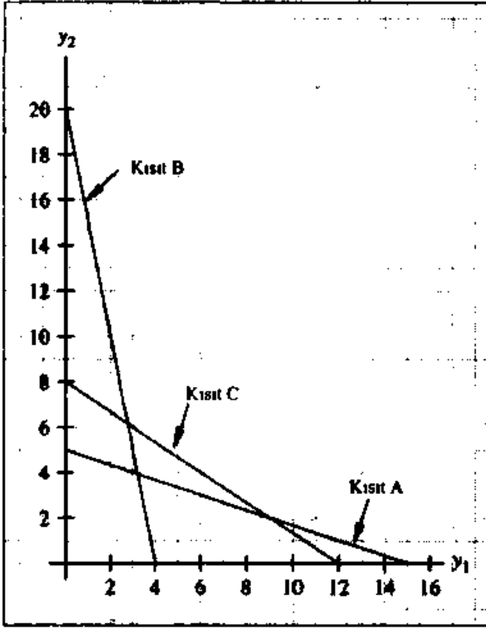
öyle ki $2y_1 + 6y_2 \geq 30$ (*A* kısıtı)

$5y_1 + y_2 \geq 20$ (*B* kısıtı)

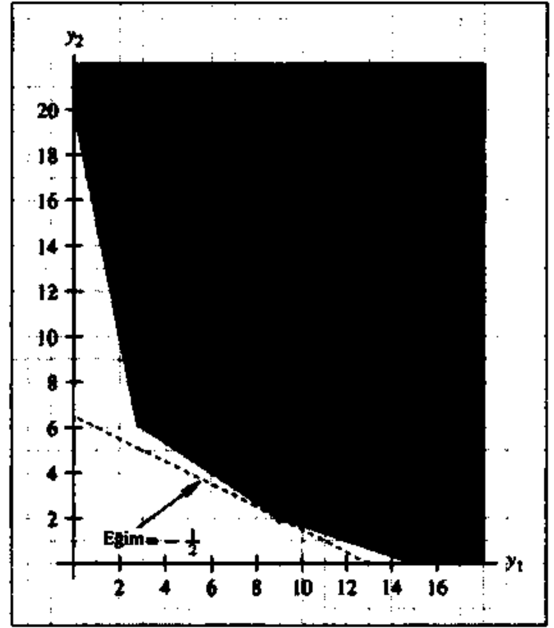
$2y_1 + 3y_2 \geq 24$ (*C* kısıtı)

$y_1, y_2 \geq 0$

Kısıtlar Şekil 7-9(*a*)'da ve olurlu bölge Şekil 7-9(*b*)'de çizilmiştir. Eş maliyet doğrusunun eğimi Şekil 7-9(*b*)'de $-\frac{1}{2}$'dir. Böylece, $y_1 = 9$, $y_2 = 2$ ve $c = 80\ (9) + 160(2) = 1040$'dir.



(*a*)



(*b*)

Şekil 7-9

7.16. Aşağıdaki verileri kullanarak Problem 7.14'ü tekrar çözünüz:

min $c = 6y_1 + 3y_2$

öyle ki $y_1 + 2y_2 \geq 14$ (*A* kısıtı)

$y_1 + y_2 \geq 12$ (*B* kısıtı)

$3y_1 + y_2 \geq 18$ (*C* kısıtı)

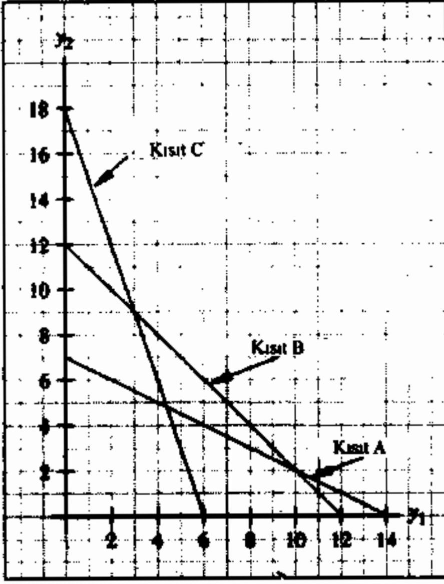
$y_1, y_2 \geq 0$

Şekil 7-10'a bakınız. Şekil 7-10(*b*)'den $y_1 = 3$ ve $y_2 = 9$'dir. Böylece $c = 6(3) + 3(9) = 45$'tir.

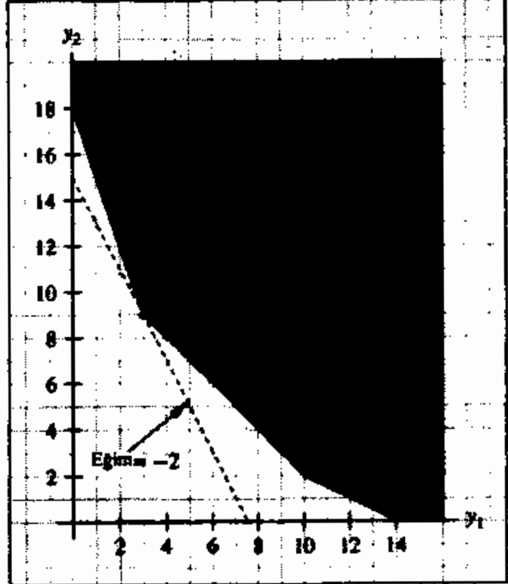
7.17. Aşağıdaki verileri kullanarak Problem 7.14'ü tekrar çözünüz:

min $c = 15y_1 + 12y_2$

öyle ki $4y_1 + 8y_2 \geq 56$ (*A* kısıtı)



(a)



(b)

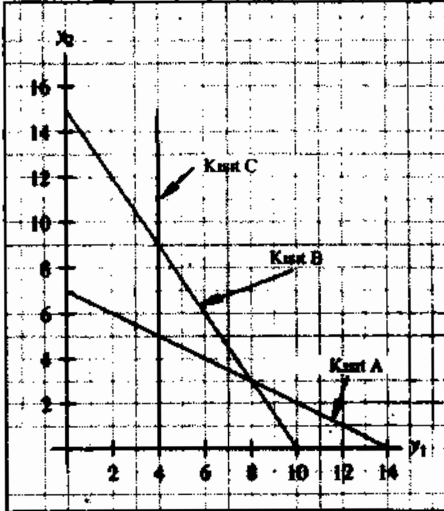
Şekil 7-10

$3y_1 + 2y_2 \geq 30$ (B kısıtı)

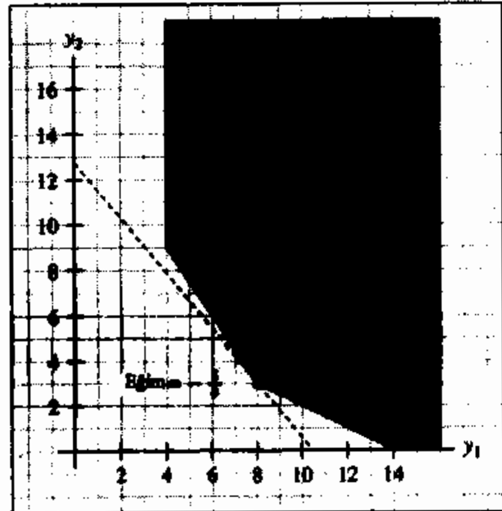
$y_1 \geq 4$ (C kısıtı)

$y_1, y_2 \geq 0$

Şekil 7-11'e bakınız. Şekil 7-11(b)'den $y_1 = 8$ ve $y_2 = 3$'tir. Böylece $c = 15(8) + 12(3) = 156$'dir.



(a)



(b)

Şekil 7-11

7.18. Aşağıdaki verileri kullanarak Problem 7.14'ü tekrar çözünüz:

min $\quad c = 7y_1 + 28y_2$

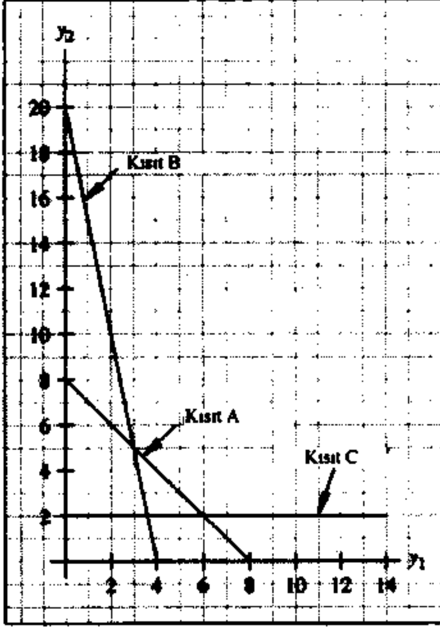
öyle ki $\quad 3y_1 + 3y_2 \geq 24 \quad$ (*A* kısıtı)

$5y_1 + y_2 \geq 20 \quad$ (*B* kısıtı)

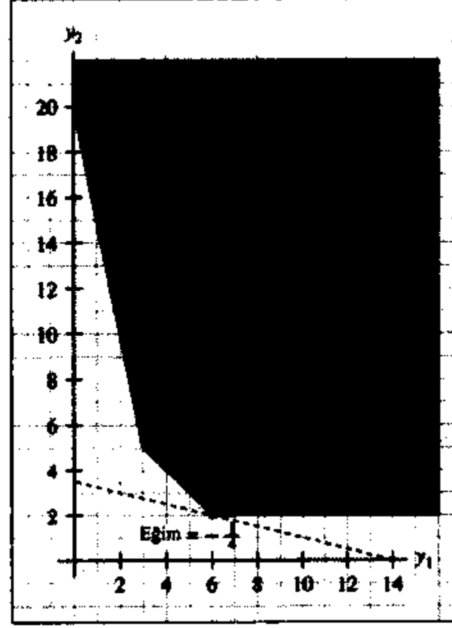
$y_2 \geq 2 \quad$ (*C* kısıtı)

$y_1, y_2 \geq 0$

Şekil 7-12'ye bakınız. Şekil 7-12(*b*)'den $y_1 = 6$ ve $y_2 = 2$'dir. Böylece $c = 7(6) + 28(2) = 98$'dir.



(*a*)



(*b*)

Şekil 7-12

ÇOKLU ÇÖZÜMLER

7.19. Aşağıdaki verileri kullanarak Problem 7.14'ü tekrar çözünüz:

min $\quad c = 16y_1 + 20y_2$

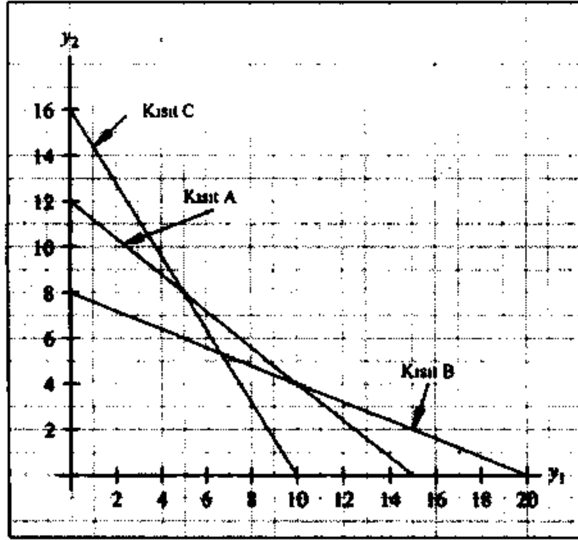
öyle ki $\quad 2y_1 + 2.5y_2 \geq 30 \quad$ (*A* kısıtı)

$3y_1 + 7.5y_2 \geq 60 \quad$ (*B* kısıtı)

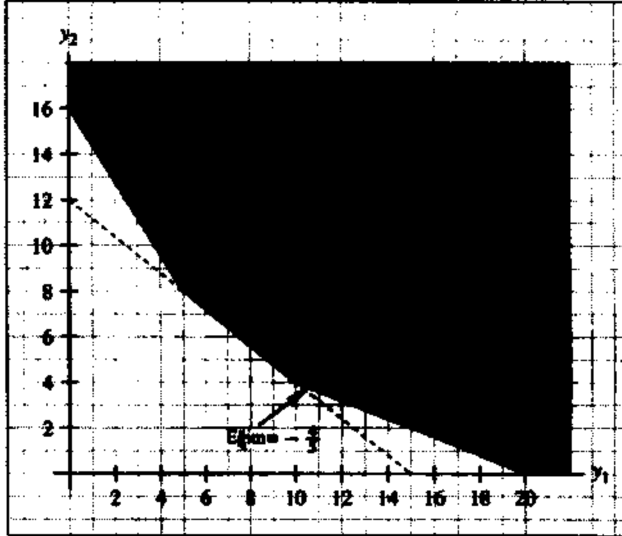
$8y_1 + 5y_2 \geq 80 \quad$ (*C* kısıtı)

$y_1, y_2 \geq 0$

Şekil 7-13'te *A* kısıtına teğet eş maliyet doğrusu ile optimal olurlu *tek* çözüm yoktur. (5, 8) ile (10, 4) arasında doğru üzerindeki herhangi bir nokta kısıtlara bağlı olarak amaç fonksiyonunu minimize edecektir. Çoklu optimal çözümler amaç fonksiyonu ile kısıtlardan biri arasında lineer bağımlılık olduğunda oluşur. Bu durumda amaç fonksiyonu ve *A* kısıtının her ikisinin de eğimi $-\frac{1}{2}$'dir ve lineer bağımlıdır. Yine de, (5, 8) ve (10, 4) ekstrem noktaları optimal çözümleri de kapsadığından çoklu optimal çözümler hiçbir şekilde ekstrem nokta teoremi ile çelişmez: $c = 16(5) + 20(8) = 240$ ve $c = 16(10) + 20(4) = 240$.


y_2
Kısıt C
Kısıt A
Kısıt B
16
14
12
10
8
6
4
2
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
y_1

(*a*)


y_2
16
14
12
10
8
6
4
2
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
y_1

(*b*)

Şekil 7-13

YAPAY ve ARTIK DEĞİŞKENLER

7.20. (*a*) Aşağıdaki verilerde kısıtlara yapay değişken ekleyerek veya artık değişkenleri çıkararak denklemlere dönüştürünüz ve denklemleri matris formunda ifade ediniz. (*b*) Temel çözümü bulmak için sıfıra eşitlenmesi gereken değişken sayısını belirleyiniz ve matristen ilk temel çözümü okuyunuz.

max $\quad \pi = 7x_1 + 21x_2$

öyle ki $\quad 5x_1 + 2x_2 \leq 40$

$3x_1 + 12x_2 \leq 60$

$4x_1 + 8x_2 \leq 48$

$x_1, x_2 \geq 0$

(*a*) "Küçük veya eşit" eşitsizliği için yapay değişkenler eklenir.

$$5x_1 + 2x_2 + s_1 = 40 \qquad 3x_1 + 12x_2 + s_2 = 60 \qquad 4x_1 + 8x_2 + s_3 = 48$$

Matris formunda ifade edilir,

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 48 \end{bmatrix}$$

(*b*) Beş değişken ve üç denklem olduğundan, temel çözüm için sıfıra eşitlememiz gereken $v - n = 5 - 3 = 2$ değişkendir. $x_1 = x_2 = 0$ oluşturulur ve çarpılır, başlangıç temel çözümü $s_1 = 40$, $s_2 = 60$ ve $s_3 = 48$'dir.

7.21. min $\quad c = 20y_1 + 15y_2$

öyle ki $\quad 3y_1 + 2y_2 \geq 36$

$6y_1 + 6y_2 \geq 84$

$y_1 + 4y_2 \geq 16$

$y_1, y_2 \geq 0$

olmak üzere, Problem 7.20'yi tekrar çözünüz.

(*a*) "Büyük veya eşit" eşitsizliği için, artık değişkenler çıkarılır.

$$3y_1 + 2y_2 - s_1 = 36 \qquad 6y_1 + 6y_2 - s_2 = 36 \qquad y_1 + 4y_2 - s_3 = 16$$

Matris formunda ifade edilir,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 84 \\ 16 \end{bmatrix}$$

(*b*) $v = 5$ ve $n = 3$ nedeniyle, $5 - 3 = 2$ değişken sıfıra eşitlenmelidir. $y_1 = y_2 = 0$ oluşturulur ve çarpılır, başlangıç temel çözümü $s_1 = -36$, $s_2 = -84$ ve $s_3 = -16$'dir. Bu başlangıç temel çözümü negatif değerler içerdiğinden, olurlu değildir.

7.22. max $\quad \pi = 14x_1 + 12x_2 + 18x_3$

öyle ki $\quad 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

olmak üzere, Problem 7.20'yi tekrar çözünüz.

(*a*) $2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \qquad x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 = 4$

Matris formunda ifade edilir,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(*b*) $v = 5$ ve $n = 2$ olması nedeniyle, temel çözüm için $5 - 2 = 3$ değişken sıfıra eşitlenmelidir. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ oluşturulur, başlangıç temel çözümü $s_1 = 2$ ve $s_2 = 4$'tir.

7.23. Problem 7.22'de var olan temel çözümün toplam sayısını bulunuz.

$v = 5$ ve $n = 2$ formülde yerine yazılır,

$$N = \frac{v!}{n!(v-n)!} = \frac{5!}{2!(3)!} = \frac{5(4)(3)(2)(1)}{2(1)(3)(2)(1)} = 10$$

Ek Problemler

İŞLETME ve İKTİSADİ PROBLEMLERİN MATEMATİKSEL İFADESİ

7.24. Bir pastane yaptığı x_1 düğün pastalarından 4 TL ve x_2 doğum günü pastalarından 3 TL kâr elde ediyor. Düğün pastaları karıştırma için 4 dakika, pişirme için 90 dakika ve süsleme için 8 dakika alıyor. Doğum günü pastaları karıştırma için 6 dakika, pişirme için 15 dakika ve süsleme için 4 dakika alıyor. Pastane karıştırma için 120 dakika, pişirme için 900 dakika ve süsleme için 96 dakikaya sahiptir. Kısıtlara bağlı olarak kârı maksimize edecek düğün pastası ve doğum günü pastası bileşimini belirlemek için gerekli verileri denklem ve eşitsizlikler olarak ifade ediniz.

7.25. Bir konserve üreticisi birinci sınıf markası x_1'den 15 TL ve standart markası x_2'den 6 TL kâr elde ediyor. Birinci sınıf konserveler soyum için 7.5 dakika, pişirme için 20 dakika ve konserveleme için 8 dakika alıyor. Standart konserveler soyum için 5 dakika, pişirme için 30 dakika ve konserveleme için 2 dakika alıyor. Üretici soyum için 150 dakika, pişirme için 540 dakika ve konserveleme için 120 dakikaya sahiptir. Kârı maksimize edecek markaların bileşimini bulmak için uygun verileri denklem ve eşitsizlik olarak yazınız.

7.26. Bir tahıl üreticisi x_1 ve x_2 iki doğal tohumu birleştirerek yeni bir tahıl markası yapmak istiyor. Yeni tahıl minimum 128 birim karbonhidrat, 168 birim protein ve 120 birim fruktoz içermelidir. Birinci tohum 24 birim karbonhidrat, 14 birim protein ve 8 birim fruktoz içermektedir. İkinci tohum 4 birim karbonhidrat, 7 birim protein ve 32 birim fruktoz içermektedir. Birinci tohumun bir kilosu 7 TL, ikinci tohumun ise 2 TL'dir. Beslenme ihtiyaçlarının hepsini karşılayacak en az maliyetli tohum bileşimini bulmak için uygun verileri denklem ve eşitsizlikler olarak ifade ediniz.

7.27. Bir bahçıvan minimum 50 birim fosfat, 240 birim nitrat ve 210 birim kalsiyum içeren gübre karışımı yapmak istiyor. Marka 1, 1 birim fosfat, 6 birim nitrat ve 15 birim kalsiyum içeriyor. Marka 2, 5 birim fosfat, 8 birim nitrat ve 6 birim kalsiyum içeriyor. Marka 1'in 500 gramı 2.50 TL, Marka 2'nin 5 TL'dir. Bahçıvanın ihtiyacını karşılayacak en düşük maliyetli gübre karışımını belirlemek için uygun verileri denklem ve eşitsizlik olarak ifade ediniz.

GRAFİK KULLANIMIYLA MAKSİMİZASYON

Aşağıdaki doğrusal programlama problemlerini çözmek için grafik yöntemini kullanınız.

7.28. max $\pi = 2x_1 + 3x_2$

öyle ki $2x_1 + 2x_2 \leq 32$

$3x_1 + 9x_2 \leq 108$

$6x_1 + 4x_2 \leq 84$

$x_1, x_2 \geq 0$

7.29. Problem 7.28'de ki kısıtlara bağlı olarak $\pi = 5x_1 + 4x_2$ denklemini maksimize ediniz.

7.30. max $\pi = 4x_1 + 3x_2$

öyle ki $8x_1 + 4x_2 \leq 96$

$4x_1 + 6x_2 \leq 120$

$18x_1 + 3x_2 \leq 180$

$x_1, x_2 \geq 0$

7.31. Problem 7.30'da ki kısıtlara bağlı olarak $\pi = 4x_1 + x_2$ denklemini maksimize ediniz.

7.32. max $\pi = 5x_1 + 10x_2$

öyle ki $2x_1 + 3x_2 \leq 48$

$4x_1 + 12x_2 \leq 168$

$8x_1 + 6x_2 \leq 144$

$x_1, x_2 \geq 0$

7.33. Problem 7.32'de ki kısıtlara bağlı olarak $\pi = 11x_1 + 10x_2$ denklemini maksimize ediniz.

7.34. max $\pi = 5x_1 + 4x_2$

öyle ki $7.5x_1 + 5x_2 \leq 150$

$3x_1 + 4x_2 \leq 108$

$8x_1 + 2x_2 \leq 120$

$x_1, x_2 \geq 0$

7.35. Problem 7.34'te ki kısıtlara bağlı olarak $\pi = 15x_1 + 6x_2$ denklemini maksimize ediniz.

GRAFİK KULLANIMIYLA MİNİMİZASYON

Aşağıdaki doğrusal programlama problemlerini çözmek için grafik yöntemini kullanınız.

7.36. min $c = 7y_1 + 4y_2$

öyle ki $3y_1 + 2y_2 \geq 48$

$9y_1 + 4y_2 \geq 108$

$2y_1 + 5y_2 \geq 65$

$y_1, y_2 \geq 0$

7.37. Problem 7.36'da ki kısıtlara bağlı olarak $c = 8y_1 + 10y_2$ denklemini minimize ediniz.

7.38. min $c = 12y_1 + 20y_2$

öyle ki $4y_1 + 5y_2 \geq 100$

$24y_1 + 15y_2 \geq 360$

$2y_1 + 10y_2 \geq 80$

$y_1, y_2 \geq 0$

7.39. Problem 7.38'da ki kısıtlara bağlı olarak $c = 30y_1 + 25y_2$ denklemini minimize ediniz.

7.40. min $c = 10y_1 + 5y_2$

öyle ki $4y_1 + 3y_2 \geq 84$

$16y_1 + 6y_2 \geq 192$

$6y_1 + 9y_2 \geq 180$

$y_1, y_2 \geq 0$

7.41. Problem 7.40'da ki kısıtlara bağlı olarak $c = 3y_1 + 2{,}5y_2$ denklemini minimize ediniz.

7.42. min $c = 5y_1 + 4y_2$

öyle ki $7y_1 + 8y_2 \geq 168$

$14y_1 + 8y_2 \geq 224$

$2y_1 + 4y_2 \geq 60$

$y_1, y_2 \geq 0$

7.43. Problem 7.42'de ki kısıtlara bağlı olarak $c = 15y_1 + 20y_2$ denklemini minimize ediniz.

Ek Problemlerin Cevapları

7.24. max $\pi = 4x_1 + 3x_2$

öyle ki $4x_1 + 6x_2 \leq 120$

$90x_1 + 15x_2 \leq 900$

$8x_1 + 4x_2 \leq 96$

$x_1, x_2 \geq 0$

7.25. max $\pi = 15x_1 + 6x_2$

öyle ki $7.5x_1 + 5x_2 \leq 150$

$20x_1 + 30x_2 \leq 540$

$8x_1 + 2x_2 \leq 120$

$x_1, x_2 \geq 0$

7.26. min $c = 7y_1 + 2y_2$

öyle ki $24y_1 + 4y_2 \geq 128$

$14y_1 + 7y_2 \geq 168$

$8y_1 + 32y_2 \geq 120$

$y_1, y_2 \geq 0$

7.27. min $c = 2.5y_1 + 5y_2$

öyle ki $y_1 + 5y_2 \geq 50$

$6y_1 + 8y_2 \geq 240$

$15y_1 + 6y_2 \geq 210$

$y_1, y_2 \geq 0$

7.28. $x_1 = 6, x_2 = 10, \pi = 42$

7.29. $x_1 = 10, x_2 = 6, \pi = 74$

7.30. $x_1 = 3, x_2 = 18, \pi = 66$

7.31. $x_1 = 9, x_2 = 6, \pi = 42$

7.32. $x_1 = 6, x_2 = 12, \pi = 150$

7.33. $x_1 = 12, x_2 = 8, \pi = 212$

7.34. $x_1 = 4, x_2 = 24, \pi = 116$

7.35. $x_1 = 12, x_2 = 12, \pi = 252$

7.36. $y_1 = 4, y_2 = 18, c = 100$

7.37. $y_1 = 10, y_2 = 9, c = 170$

7.38. $y_1 = 20, y_2 = 4, c = 320$

7.39. $y_1 = 5, y_2 = 16, c = 550$

7.40. $y_1 = 3, y_2 = 24, c = 150$

7.41. $y_1 = 12, y_2 = 12, c = 66$

7.42. $y_1 = 8, y_2 = 14, c = 96$

7.43. $y_1 = 16, y_2 = 7, c = 380$

Bölüm 8

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA: SİMPLEKS ALGORİTMA VE DUAL

8.1 SİMPLEKS ALGORİTMA

Algoritma, bir probleme çözüm bulmak için sistematik işlem veya kurallar dizisidir. *Simpleks algoritma*, (1) doğrusal denklem sistemleri için temel olurlu çözümler arayan ve (2) çözümün uygunluğunu test eden bir hesaplama yöntemidir. Temel bir çözüm için v-n tane değişkenin minimumunun sıfıra eşit olması gerektiğinden, v-n tane değişken işlemin her adımında sıfıra eşitlenir ve kalan n değişken için n tane denklemin çözülmesiyle temel çözüm bulunur. Algoritma, temel olurlu bir çözümden diğerine devam eder, daima en iyi çözümü bulana kadar bir önceki çözümü geliştirir. Belirli adımlarda sıfıra eşitlenen değişkenler *temel dışı değişken* veya *çözüm dışı değişken* olarak adlandırılır. Sıfıra eşit olmayanlar ise *temel değişken, çözüm değişken* veya daha basit şekilde *temel çözüm* olarak adlandırılır. Maksimizasyon için simpleks metodu Kısım 8.2.'de gösterilmiştir. Minimizasyon için ise Kısım 8.4.'de tartışılmaktadır.

8.2 MAKSİMİZASYON

Maksimizasyon için simpleks algoritma metodu, aşağıdaki somut örnek kullanılarak dört basit adımda açıklanır:

$$\max \quad \pi = 8x_1 + 6x_2$$

$$\text{Öyle ki,} \quad 2x_1 + 5x_2 \le 40 \qquad 8x_1 + 4x_2 \le 64$$
$$3x_1 + 3x_2 \le 30 \qquad x_1, x_2 \ge 0$$

I. *Başlangıç Simpleks Tablosu*

1. Gevşek değişkenler eklenerek eşitsizlikler denklemlere dönüştürülür.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + s_1 &\le 40 \\ 3x_1 + 3x_2 + s_2 &= 30 \\ 8x_1 + 4x_2 + s_3 &\le 64 \end{aligned} \tag{8.1}$$

2. Kısıt denklemleri matris formunda ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 64 \end{bmatrix}$$

3. Algoritma için bir çerçeve olacak olan bir başlangıç simpleks tablosu oluşturulur. Başlangıç tablosu x_1 ve x_2 sıfıra eşit olduğunda ilk temel olurlu çözümü temsil eder. Tablo, amaç fonksiyonundaki karar değişkenlerinin katsayılarının negatifi ve her bir gevşek değişken için sıfır katsayısından oluşan *gösterge* satırının üzerine kurulu sabitlerin sütun vektörü ve kısıtlar denkleminin katsayı matrisinden oluşur. x_1 ve x_2 sıfıra eşit iken amaç fonksiyonunun değerine karşılık gelen, sabit sütununda ki son satır da sıfır olarak yazılır.

Başlangıç simpleks tablosu aşağıdaki gibidir:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
2	5	1	0	0	40
3	3	0	1	0	30
⑧	4	0	0	1	64
−8	−6	0	0	0	0

↑ Göstergeler

4. $x_1 = x_2 = 0$ alındığında, ilk temel olurlu çözüm direkt başlangıç tablosundan okunabilir: $s_1 = 40$, $s_2 = 30$ ve $s_3 = 64$. Çünkü x_1 ve x_2 başlangıçta sıfıra eşit alındığından, amaç fonksiyonu sıfır değerine sahiptir.

II. *Pivot Eleman ve Taban Değişikliği*

Amaç fonksiyonunun değerini arttırmak için, yeni bir temel çözüm incelenir. Yeni temel olurlu bir çözüme geçmek için, yeni bir değişken taban olarak tanımlanmalı ve tabandaki eski değişkenlerden biri dışarıda tutulmalıdır. Dâhil edilecek ve dışarıda bırakılacak değişkeni seçme işlemi *taban değiştirme* olarak isimlendirilir.

1. Mutlak değeri en büyük olan negatif gösterge, taban olarak girilecek değişkendir. İlk sütundaki -8 (veya x_1) mutlak değeri en büyük negatif gösterge olduğu için x_1 taban haline getirilir. x_1 sütunu *pivot sütunu* olur ve okla gösterilir.
2. Yok edilecek değişkenler ise en küçük *yer değiştirme oranı* tarafından belirlenir. Yer değiştirme oranı, sabit sütundaki elemanların pivot sütunundaki elemanlara bölümüyle bulunur. Sıfıra eşit veya sıfırdan küçük oranlar dikkate alınmamak üzere, en küçük yer değiştirme oranı olarak bulunan satır pivot satırı olur ve taban için dışarıda bırakılacak değişkeni belirler. $\frac{64}{8}$ en küçük oran olduğu için $\left(\frac{64}{8} < \frac{30}{3} < \frac{40}{2}\right)$, 3. satır *pivot satırıdır.* 3. satırda 1'i bulunduran *birim sütun vektörü* s_3 sütunun altında yer aldığı için, s_3 tabandan ayrılır. *Pivot elemanı,* taban olarak girilen değişkenin sütunu ile tabandan ayrılan değişkenin olduğu satırın kesişimin de olan (örneğin, pivot satır ve pivot sütununun kesişimindeki eleman) ⑧'dir.

III. *Pivotlama*

Pivotlama tabandaki mevcut *n* değişken için *n* denklemin çözülmesi işlemidir. İşlemin her adımında tabana yalnızca yeni bir değişken girildiği ve önceki adım daima birim matrisi kapsadığı için (sütunlar genellikle normal sıranın dışında olmasına rağmen), pivotlama ters matris bulurken Gauss eleme metodundaki gibi (Kısım 6.5 bakınız) pivot sütunundaki pivot elemanının 1'e, diğer tüm elemanların sıfıra dönüştürülmesini kapsar. Aşağıda gösterilmiştir:

1. Pivot elemanının bölüme göre tersi ile pivot satırı çarpılır. Bu durumda başlangıç tablosunun 3. satırı $\frac{1}{8}$ ile çarpılır:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
2	5	1	0	0	40
3	3	0	1	0	30
1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{8}$	8
−8	−6	0	0	0	0

2. Pivot eleman 1'e eşitlendikten sonra pivot sütunu temizlenir. Burada 3. satır 2 ile çarpılıp 1. satırdan, 3. satır 3 ile çarpılıp 2. Satırdan çıkarılır ve 3. satır 8 ile çarpılıp 4. Satıra eklenir. Bu işlemlerin sonucu ikinci tabloda verilmiştir:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
0	4	1	0	$-\frac{1}{4}$	24
0	$\textcircled{\frac{3}{2}}$	0	1	$-\frac{3}{8}$	6
1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{8}$	8
0	-2 ↑	0	0	1	64

İkinci temel olurlu çözüm ikinci tablodan direkt okunabilir. Birim vektörlerden oluşmayan (burada x_2 ve s_3) sütunlarda ki değişkenlerin hepsi sıfıra eşitlenir ve birim sütun vektörleri birim matris formu için tekrar düzenlenir, burada $s_1 = 24$, $s_2 = 6$ ve $x_1 = 8$ olduğunu görürüz. Son satırın son elemanı tarafından gösterildiği gibi $x_1 = 8$ için $\pi = 64$ dır.

IV. *Optimizasyon*

Son satırda negatif gösterge olmadığı zaman amaç fonksiyonu maksimize edilir. Taban değiştirilir ve yukarıdaki kurallara göre bu sağlanana kadar pivotlama devam eder. İkinci sütundaki –2 tek negatif gösterge olduğu için, x_2 taban haline getirilir ve 2. sütun pivot sütunu olur. Sabit sütununun pivot sütununa bölünmesi ile en küçük oranın ikinci satırda olduğu görülür. Böylece, $\textcircled{\frac{3}{2}}$ yeni pivot elemanı olur. İkinci satırda 1'in bulunduğu birim sütun vektörü s_2'de olduğu için s_2 taban olarak ayrılacaktır. Pivotlama için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. 2. satır $\frac{2}{3}$ ile çarpılır.

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
0	4	1	0	$-\frac{1}{4}$	24
0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	4
1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{8}$	8
0	-2	0	0	1	64

2. Sonra 2. satır 4 ile çarpılıp 1. satırdan, 2. satır $\frac{1}{2}$ ile çarpılıp 3. satırdan çıkarılır, 2. satır 2 ile çarpılıp 4. satıra eklenir ve üçüncü tablo oluşturulur:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	1	$-\frac{8}{3}$	$\frac{3}{4}$	8
0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	4
1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	6
0	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}$	72

Birim olmayan sütun vektörlerinde ki tüm değişkenler sıfıra eşitlenir (örneğin, $s_2 = s_3 = 0$) ve birim sütun vektörleri birim matris formunda tekrar düzenlenir, burada $s_1 = 8$, $x_2 = 4$ ve $x_1 = 6$ olduğunu görürüz. Son satırın solunda negatif gösterge olmadığı için bu optimal çözümdür. Son satırın son elemanı $\overline{x}_1 = 6$, $\overline{x}_2 = 4$, $\overline{s}_1 = 8$, $\overline{s}_2 = 0$ ve $\overline{s}_3 = 0$ i gösterir, amaç fonksiyonu $\overline{\pi} = 72$'de maksimuma ulaşır. $\overline{s}_2 = 0$ ve $\overline{s}_3 = 0$ ile son iki kısıtta gevşek değişken olmadığını ve son iki girdinin tamamen kullanıldığını (*8.1*) den biliyoruz. Bununla birlikte $\overline{s}_1 = 8$ ile ilk girdinin sekiz birimi kullanılmadan kalır. Grafik ile anlatımı için Problem 7.11'e bakınız. Benzer problemler için ise Problem 8.1'den 8.3'e kadar bakınız.

8.3 MARJİNAL DEĞER VE GÖLGE FİYATLAMA

Son tabloda her gevşek değişkenin altındaki gösterge değeri, değişken ile ilgili girdinin marjinal değeri veya *gölge fiyatını* ifade eder, yani girdinin mevcudiyetindeki 1 birimlik değişme sonucu amaç fonksiyonu değerinin ne kadar değişebileceğidir. Böylece Kısım 8.2'de ki örnekte kârlar, kısıt 2'nin sabitindeki 1 birimlik artış için $\frac{4}{3}$ birim veya yaklaşık 1.33 TL; kısıt 3'ün sabitindeki 1 birimlik artış için $\frac{1}{2}$ birim veya 50 kuruş; kısıt 1'in sabitindeki 1 birimlik artış için 0 artacaktır. Kısıt 1, pozitif gevşek bir değişkene sahip olduğu için tam olarak optimal bir çözüm olarak değerlendirilemez ve bu yüzden marjinal değeri sıfırdır (örneğin, diğer birimin eklenmesi kâr fonksiyonuna hiç bir şey katmaz).

Dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta ise, amaç fonksiyonunun optimal değerinin daima her bir girdinin mevcut toplam miktarı çarpı her bir girdinin marjinal değerinin toplamına eşit olmasıdır.

ÖRNEK 1. Herhangi bir doğrusal programlamanın optimal çözümü (1) kısıt denklemleri ve amaç fonksiyonunda kritik değerler yerine yazılarak ve (2) tüm kaynakların marjinal değerlerinin toplamı çarpı sırasıyla mevcut değerleri şeklinde hesaplanarak kolayca kontrol edilir. Örnekleme için Kısım 8.2'de ki veri kullanıldığında ve birinci adımda $\bar{x}_1 = 6$, $\bar{x}_2 = 4$, $\bar{s}_1 = 8$, $\bar{s}_2 = 0$ ve $\bar{s}_3 = 0$ kritik değerlerini yerine yazdığımızda,

(1)
$$\pi = 8x_1 + 6x_2 \qquad 3x_1 + 3x_2 + s_2 = 30$$
$$\pi = 8(6) + 6(4) = 72 \qquad 3(6) + 3(4) + 0 = 30$$

$$2x_1 + 5x_2 + s_1 = 40 \qquad 8x_1 + 4x_2 + s_3 = 64$$
$$2(6) + 5(4) + 8 = 40 \qquad 8(6) + 4(4) + 0 = 64$$

1, 2, 3 kısıtlarının sabitleri sırasıyla *A, B, C* ile ifade edilip uygun veri 2. adımda yerine yazıldığında,

(2)
$$\pi = MV_A(A) + MV_B(B) + MV_C(C)$$
$$\pi = 0(4) + \tfrac{4}{3}(30) + \tfrac{1}{2}(64) = 72$$

8.4 MİNİMİZASYON

Minimizasyon problemi için simpleks algoritması kullanıldığında, artık değişkenlerin oluşturduğu negatif değerler özel bir sorunu beraberinde getirir. Birinci temel çözüm negatif sayıların toplamından oluşacaktır ve bu yüzden olurlu olmayacaktır. Sonuçta *yapay değişken* olarak isimlendirilen diğer değişkenler, başlangıç temel olurlu çözümünü oluşturmak için tanıtılmalıdır. Böylece sonraki kısımda açıklanacak olan dual kullanımı ile minimizasyon problemlerini çözmek bu yola göre genellikle daha kolay olacaktır. Minimizasyon için simpleks algoritma yaklaşımı uygulamalarına, Dowling, *Introduction to Mathematical Economics* kitabı Kısım 14.3 ve Problem 14.4'ten 14.7'ye kadar bakınız.

8.5 DUAL

Doğrusal programlamada her minimizasyon problemi kendisine karşılık gelen bir maksimizasyon problemine ve her maksimizasyon problemi kendisine karşılık gelen bir minimizasyon problemine sahiptir. Orijinal problem *primal* olarak, karşılık gelen problem *dual* olarak isimlendirilir. İkisi arasındaki ilişki, ortak değişkenleri paylaşmaları nedeniyle kolayca görülebilir. Orijinal primal problem aşağıda verilmek üzere,

min $\qquad c = g_1y_1 + g_2y_2 + g_3y_3$

öyle ki $\qquad a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \geq h_1$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \geq h_2$$
$$a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \geq h_3$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

İlgili dual problemi

min $\pi = h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3$

öyle ki

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \leq g_1$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \leq g_2$$
$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \leq g_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

8.6 DUAL ELDE ETMEK İÇİN DÖNÜŞÜM KURALLARI

Bir primal problemin duale dönüştürülmesi formül haline getirilirse,

1. Optimizasyonun yönü ters çevrilir. Minimizasyon, dualde maksimizasyon olur, tersi de geçerlidir.
2. Teknik kısıtların eşitsizlik işaretleri ters çevrilir, fakat karar değişkenlerinde negatif olmayan kısıtlamalar daima aynı etkide kalır.
3. Primalde kısıtların katsayı matrisinin satırları, dualde kısıtların katsayı matrisi için sütuna aktarılır.
4. Primalde amaç fonksiyonunda katsayıların satır vektörü, dualin kısıtları için sabitin sütun vektörü olarak aktarılır.
5. Primal kısıtlardan sabitin sütun vektörü, dualde amaç fonksiyonu için katsayıların satır vektörü olarak aktarılır.
6. Primal karar değişkenleri x_i veya y_i, dualde karar değişkenlerine karşılık gelen x_i veya y_i ile yer değiştirir.

Bu adımların uygulaması Örnek 2'de gösterilmiştir.

ÖRNEK 2. Doğrusal programlama probleminin duali

min $c = 24y_1 + 15y_2 + 32y_3$

öyle ki

$$4y_1 + y_2 + 8y_3 \geq 56$$
$$6y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 49$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

için

max $\pi = 56x_1 + 49x_2$

öyle ki

$$4x_1 + 6x_2 \leq 24$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 15$$
$$8x_1 + 2x_2 \leq 32$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

dır.

ÖRNEK 3. Doğrusal programlamanın probleminin duali

$$\max \quad \pi = 120x_1 + 360x_2$$

$$\text{öyle ki} \quad \begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 &\leq 28 \\ 3x_1 + 9x_2 &\leq 36 \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 48 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

için

$$\min \quad c = 28y_1 + 36y_2 + 48y_3$$

$$\text{öyle ki} \quad \begin{aligned} 7y_1 + 3y_2 + 6y_3 &\geq 120 \\ 2y_1 + 9y_2 + 4y_3 &\geq 360 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

dır.

Bu örnekte veya yukarıdaki örnekte olduğu gibi dualin duali alındığında, primalin elde edileceğine dikkat ediniz.

8.7 DUAL TEOREMLERİ

Aşağıdaki iki dual teoremi doğrusal programlamada çok önemlidir:

1. Primal amaç fonksiyonunun optimal değeri optimal olurlu çözümün olması koşuluyla, daima ilgili dual amaç fonksiyonunun optimal değerine eşittir.

2. Optimal olurlu çözümde (*a*) primalde ki bir karar değişkeni sıfıra eşit değilse, dualde karşılık gelen gevşek (veya artık) değişkenin optimal bir sıfır değerine sahip olması gerekir, veya (*b*) primalde ki gevşek (veya artık) değişken sıfıra eşit değilse, dualde karşılık gelen karar değişkeni optimal bir sıfır değerine sahip olmalıdır.

Bu teoremlerin uygulaması Örnek 4'te ve Problem 8.4'ten 8.7'ye ve 8.9'dan 8.11'e kadar gösterilmiştir.

ÖRNEK 4. Aşağıda verilen doğrusal programlama problemi,

$$\min \quad c = 14y_1 + 40y_2 + 18y_3$$

$$\text{öyle ki} \quad \begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 + y_3 &\geq 50 \\ y_1 + 5y_2 + 3y_3 &\geq 30 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dual ise,

$$\max \quad \pi = 50x_1 + 30x_2$$

$$\text{öyle ki} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 14 \\ 5x_1 + 5x_2 &\leq 40 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dualin optimal değerleri Kısım 7.2'de ki Şekil 7-1'de grafiksel olarak bulunan $\bar{x}_1 = 6$, $\bar{x}_2 = 2$ ve $\bar{\pi} = 360$'tır.

Dual teoremleri aşağıdaki gibi (1) primal amaç fonksiyonu ve (2) primal karar değişkenlerinin optimal değerini bulmak için kullanılır.

1. Dualdeki amaç fonksiyonunun optimal değeri $\bar{\pi} = 360$ için, primal amaç fonksiyonunun optimal değerinin $\bar{c} = 360$ olması gerektiği ilk dual teoreminden açıktır.
2. Primal karar değişkenlerinin optimal değerlerini bulmak için, primalden (I) s artık değişkenleri çıkarılarak ve (II) duale t gevşek değişkenler eklenerek eşitsizlik kısıtlamaları denklemlere dönüştürülür.

$$\begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 + y_3 - s_1 &= 50 \\ y_1 + 5y_2 + 3y_3 - s_2 &= 30 \end{aligned} \qquad (8.2)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + t_1 &= 14 \\ 5x_1 + 5x_2 + t_2 &= 40 \\ x_1 + 3x_2 + t_3 &= 18 \end{aligned} \qquad (8.3)$$

t_1, t_2 ve t_3'ü bulmak için (*8.3*)'te $\bar{x}_1 = 6$ ve $\bar{x}_2 = 2$ optimal değerleri yerine yazılır,

$$\begin{aligned} 2(6) + (2) + t_1 &= 14 \qquad (\bar{t}_1 = 0) \\ 5(6) + 5(2) + t_2 &= 40 \qquad (\bar{t}_2 = 0) \\ (6) + 3(2) + t_3 &= 18 \qquad (\bar{t}_3 = 6) \end{aligned}$$

İkinci dual teoreme göre $\bar{t}_1 = \bar{t}_2 = 0$ olduğu için karşılık gelen primal karar değişkenleri y_1 ve y_2 sıfırdan farklı değerler olmalıdır. $\bar{t}_3 \neq 0$ olduğu için ise, bu değere karşılık gelen y_3 karar değişkeni sıfıra eşit olmalıdır. Bu sebeple (*8.2*)'de $y_3 = 0$'dır.

Aynı zamanda ikinci dual teorem, burada $\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$ olmak üzere optimal dual karar değişkenleri dualde sıfıra eşit değilse, onlara karşılık gelen primal artık/gevşek değişkenlerin, burada $\bar{s}_1$ ve $\bar{s}_2$ olmak üzere sıfıra eşit olması gerektiğini ifade eder. (*8.2*)'de $\bar{s}_1 = 0$, $\bar{s}_2 = 0$ ve $\bar{y}_3 = 0$ ilgili değerleri yerine yazılır,

$$\begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 + 0 - 0 &= 50 \\ y_1 + 5y_2 + 0 - 0 &= 30 \end{aligned}$$

ve eş anlı çözülür,

$$\bar{y}_1 = 20, \bar{y}_2 = 2$$

Böylece, optimal karar değişkenleri $\bar{y}_1 = 20$, $\bar{y}_2 = 2$ ve $\bar{y}_3 = 0$, amaç fonksiyonunda $\bar{c} = 14(20) + 40(2) + 18(0) = 360$ yerine yazılarak kolayca kontrol edilebilir. Ayrıca Problem 8.4'ten 8.7'ye kadar bakınız.

8.8 DUALDE GÖLGE FİYATLAR

Primali çözmek için dual kullanıldığında, **primalin *i*. kaynağının marjinal değeri** veya **gölge fiyatı**, **dualin amaç fonksiyonunda ilgili karar değişkeninin optimal değerine eşittir**. Böylece, Örnek 4 açısından dual programın optimal değeri $\bar{x}_1 = 6$ ve $\bar{x}_2 = 2$ bulundu, primalin ilk kaynağının marjinal değeri 6 ve ikinci kaynağın marjinal değeri ise 2'dir. A ve B primaldeki kısıt denklemlerinin sabitini temsil etmek üzere, primal amaç fonksiyonunun optimal değerinin mevcut kaynakların toplamı çarpı marjinal değerlerine eşit olduğunu görürüz:

$$c = MV_A(A) + MV_B(B) = 6(50) + 2(30) = 360$$

Problem 8.8'e de bakınız.

8.9 TAM SAYILI PROGRAMLAMA

Doğrusal programlamanın şimdiye kadar yapılan tartışması, karar değişkenlerinin tam sayı veya tam sayı olmayan değerler alabileceği savına dayanmaktadır. Bununla birlikte çıktının farklı birimleri tahsis etmesi veya bireylerin farklı görevlere atanması gibi durumları içeren bazı doğrusal programlama prob-

lemlerinde, doğal olarak karar değişkenleri tam sayı değerleri ile kısıtlanmalıdır. *Tam sayılı programlama,* bazı veya tüm değişkenleri tam sayılarla kısıtlamış olan doğrusal programlanın bir alt koludur. *Tamamen tam sayılı programlama modelinde* bütün değişkenler tam sayı değerleri ile kısıtlanmıştır. *Karma tam sayılı programlama modelinde* ise yalnızca bazı değişkenler tam sayılarla kısıtlanmıştır.

Örnek 5'te gösterilen, iki tam sayılı programlama teorisi de aşağıdaki özelliklerle ilgilidir:

1. Bir tam sayılı programlama modelinde olurlu çözümün oluşturulması, ona karşılık gelen standart doğrusal programlama modelinde ki olurlu çözümün bir alt kümesini oluşturur. Bunun anlamı, tam sayılı programlama modelinde ki olurlu bölge, tam sayılı olmayan doğrusal programlama modeli ile kıyaslandığında ki olurlu bölgeden asla daha büyük olmayacaktır.

2. Bir tam sayılı programlama modelindeki amaç fonksiyonunun optimal değeri, paralel düzenli doğrusal programlama modelinin optimal değerinden daha iyi olamaz.

Bir tam sayılı modelinde amaç fonksiyonunun optimal değeri tam sayılı olmayan modelin optimal değerinden farklı ise, fark *bölünmezlik maliyeti* olarak ifade edilir.

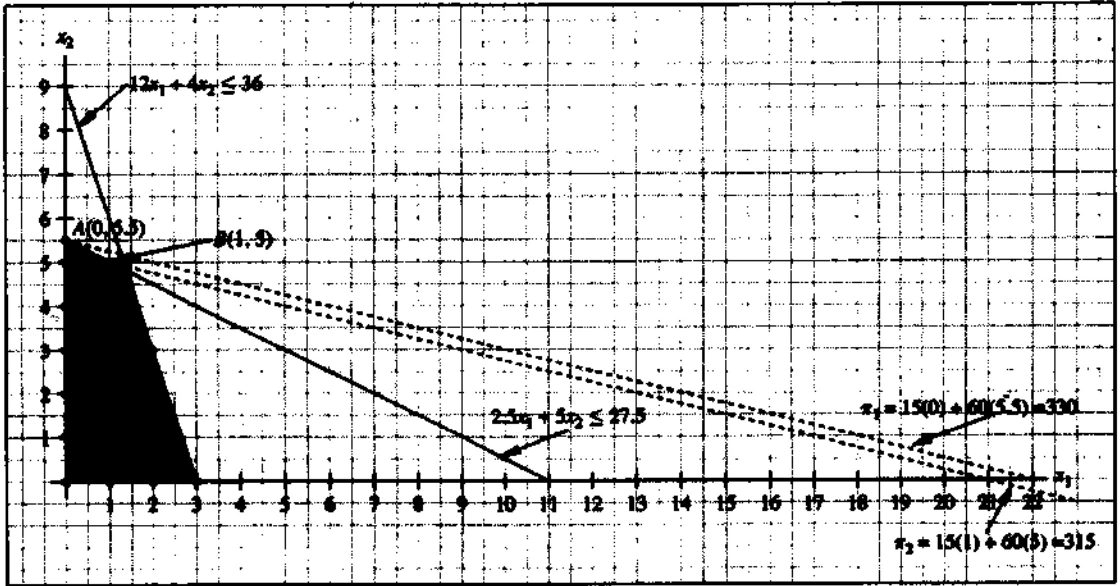
ÖRNEK 5. Aşağıdaki model tam sayılı programlamanın belirgin özelliklerinin bazılarını göstermek ve Kısım 8.9'da anlatılan iki teoremi örneklendirmek amacıyla Şekil 8-1'de grafiksel olarak çözülmüştür.

max $\pi = 15x_1 + 60x_2$

öyle ki $2.5x_1 + 5x_2 \leq 27.5$

$12x_1 + 4x_2 \leq 36$

x_1, x_2 = negatif olmayan tam sayılar



Şekil 8-1

Karar değişkenlerinin sürekli değerler olarak varsayıldığı tam sayılı olmayan programlama için Şekil 8-1'de taralı alanın tamamı olurlu bölgedir. Tam sayılı programlama için ise olurlu bölge, yalnızca taralı alan içerisinde büyük noktalarla gösterilen 17 noktadan oluşur. Bu tam sayı programlamada olurlu bölgenin sıradan doğrusal programlamayı aşamayacağını grafiksel olarak örneklendirir (teorem 1).

Kesikli eş kâr doğrusu π_1 ile A'da ki tam sayılı olmayan olurlu bölge arasındaki değme noktası, problemin düzenli doğrusal programlamada (0, 5.5) da maksimize edileceğini gösterir. Orijine doğru paralel eş kâr doğrusu değiştirilirse, yeni eş kâr doğrusu π_2 ile B'de oluşan tam sayılı olurlu bölgesinin arasındaki ilk değme noktası, tam sayılı programlama probleminin (1, 5) de maksimize edildiğini gösterir. $\pi_1 = 15(0) + 60(5.5) = 330$ ve $\pi_2 = 15(1) + 60(5) = 315$ olmak üzere, bu aslında kârın tam sayılı programlamada tam sayılı olmayan programlamadan daha yüksek olamayacağını gösterir (teorem 2). Bu örnekte bölünmezlik maliyeti, yani karar değişkenlerini bölümlere ayıramamasından kaynaklı kâr kaybı, $\pi_1 - \pi_2 = 330 - 315 = 15$ dir.

İkiden fazla kısıt içeren tam sayılı programlama yukarıdaki analizden çok daha karmaşıktır ve grafik ile çözmek için kolay değildir. Bilgisayar ile çözmek genellikle en iyisidir.[1]

8.10 SIFIR-BİR PROGRAMLAMA

Sıfır-bir programlama tam sayı değerleri 0 veya 1 ile kısıtlanan karar değişkenlerinden oluşan tam sayılı programlamanın bir alt koludur. Sıfır-bir programlama karşılıklı veya kısmen özel kısıtlamalar ve karşılıklı veya seri olarak bağımlı kısıtlamalar içeren problemlerde yararlıdır. Bunlardan en yaygın olarak kullanılanları Örnek 6'dan 9'a kadar gösterilmiştir.

ÖRNEK 6. *İki Seçim Arasında Karşılıklı İmtiyaz Tanıma.* Bir nakliye şirketinin özel bir sevkiyatta kullanmak üzere kamyonlarının iki modelinden hangisinin seçileceğini içeren bir kısıta bağlı olarak bir fonksiyonu optimize etmek istediğini varsayalım. Kamyon 1, 2000 metre küp (m^3) taşıma kapasitesine sahiptir; kamyon 2 ise 2500 m^3 taşıma kapasitesindedir. Sıradan doğrusal programlama kısıtları,

Eğer kamyon 1 kullanılırsa $\quad 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2000$

Eğer kamyon 2 kullanılırsa $\quad 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2500$'dir.

Yalnızca bir kamyon kullanabildiği için kısıtlar yeniden yazılırsa,

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2000 + My$$

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2500 + M(1 - y)$$

$$y = 0 \text{ veya } 1$$

M çok büyük bir pozitif sayı olmak zorundadır. Eğer $y = 1$ ise, ilk kısıtın sağ tarafı çok büyük olur, kısıtı gereksiz hale getirir ve ikinci kamyon seçimine yönlendirir. Eğer $y = 0$ ise, ikinci kısıt gereksiz hale gelir ve ilk kamyon seçilir.

ÖRNEK 7. *Birkaç Seçim Arasında Karşılıklı İmtiyaz Tanıma.* Örnek 6'da ki model sadece biri uygulanabilen birkaç seçenek içeren bir duruma uyacak şekilde kolayca ayarlanabilir. Örnek 6'da ki filoya sırasıyla 3000 ve 4000 m^3 kapasiteli iki kamyon modelinin daha eklendiğini varsayalım. Sonra kısıtlar aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2000 + My_1$$

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2500 + My_2$$

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 3000 + My_3$$

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 4000 + My_4$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 3$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 = 0 \text{ veya } 1$$

Eklenen son iki kısıt, dört 0/1 değişkenlerinden üçünün 1'e eşit olmasını garantiler. Böylece onlara karşılık gelen kısıtlar dışarıda tutulacaktır.

[1] Öğrenciler için bilgisayar sürümü makul fiyatlı mükemmel bir doğrusal programlama paketi Lindo/PC'dir. Ulaşım adresi, The Scientific Press, 661 Gateway Bulvarı, Daire 1100, Güney San Francisco, CA 9408-7014, telefon (415) 583-8840.

ÖRNEK 8. *Birkaç Seçim Arasında Kısmi İmtiyaz Tanıma.* Örnek 7'de ki model olası seçimlerin birkaçının seçileceği bir duruma uyacak şekilde de ayarlanabilir. 4500 m^3 kapasiteli beşinci bir kamyonun filoya eklendiğini ve şirketin verilen herhangi bir projede beş kamyondan üçünü kullanabileceğini varsayalım. Problem aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2000 + My_1$$

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2500 + My_2$$

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 3000 + My_3$$

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 4000 + My_4$$

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 4500 + My_5$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 2$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 = 0 \text{ veya } 1$$

Son iki kısıt ile 0/1 değişkenlerinin ikisinin 1'e eşit olacağını ve üçünün sıfıra eşit olacağını göreceğiz, böylece iki kısıt dışarda tutulur ve istenen üç tanesi dâhil edilir.

ÖRNEK 9. *Değişkenler Arasındaki Karşılıklı Bağımlılık.* Karar değişkenleri birbirine bağlı şekilde birlikte seçilen veya elenen modellerde de kolayca ayarlanabilir. Seçilen *i.* değişken için $x_i = 1$ ve reddedilen *i.* değişken için $x_i = 0$ olsun. Sonra x_1 ve x_2 birlikte kullanılmak ya da kullanılmamak üzere, kısıt basitçe yazılabilir,

$$x_1 = x_2$$
$$x_1, x_2 = 0 \text{ veya } 1$$

Kısıtlar değişkenlerin aynı anda 0 veya 1'e eşit olması için zorlar, yani birlikte seçilmeli veya birlikte reddedilmelidir.

Bir karar değişkeni diğerini engellerse birlikte seçilemeyecektir, kısıtlar

$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 = 0 \text{ veya } 1$$

halini alır.

Ve eğer x_2 seçilemezse x_1 de seçilemez, kısıt basitçe

$$x_1 \leq x_2$$
$$x_1, x_2 = 0 \text{ veya } 1$$

halini alır.

Çözümlü Sorular

SİMPLEKS ALGORİTMA KULLANARAK MAKSİMİZASYON

8.1. max $\pi = 50x_1 + 30x_2$

öyle ki $2x_1 + x_2 \leq 14$ $\quad x_1 + 3x_2 \leq 18$

$5x_1 + 5x_2 \leq 40$ $\quad x_1, x_2 \geq 0$

1. Başlangıç simpleks tablosu kurulur.

(*a*) Eşitsizlikleri eşitlik haline getirmek için gevşek değişkenler eklenir.

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 14 \qquad 5x_1 + 5x_2 + s_2 = 40 \qquad x_1 + 3x_2 + s_3 = 18$$

(*b*) Kısıt denklemleri matris formunda ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 40 \\ 18 \end{bmatrix}$$

(*c*) Sabitlerin sütun vektörü ve kısıt denklemlerinin katsayı matrisinden oluşan başlangıç simpleks tablosu, gevşek değişkenler için sıfır katsayısı ve amaç fonksiyonunun katsayılarının negatiflerinden oluşan göstergeler satırı üstüne kurulur. Başlangıç tablosu,

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
②	1	1	0	0	14
5	5	0	1	0	40
1	3	0	0	1	18
−50 ↑	−30	0	0	0	0

$x_1 = x_2 = 0$ için kurulduğunda, ilk temel olurlu çözüm $s_1 = 14$, $s_2 = 40$ ve $s_3 = 18$'dir. İlk temel olurlu çözümde, $\pi = 0$'dir.

2. Taban Değiştirme. Mutlak değeri en büyük olan negatif gösterge (okla gösterilen) pivot sütununu belirler. Sabit sütunundaki elemanların pivot sütunundaki elemanlara bölümüyle en küçük yer değiştirme oranı elde edilerek pivot satırı belirlenir. Böylece pivot satırı ve pivot sütunundaki kesişim elemanı olan ② pivot elemanı olur.

3. Pivot.

(*a*) Satır 1 $\frac{1}{2}$ ile çarpılarak pivot satırına dönüştürülür.

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	7
5	5	0	1	0	40
1	3	0	0	1	18
−50	−30	0	0	0	0

(*b*) Pivot sütununun 1. satırın 5 ile çarpıp 2. satırdan çıkarılması, 1. satırın 3. satırdan çıkarılması ve 1. satırı 50 ile çarpıp 4. satıra eklenmesi ile oluşturulacağı açıktır. İkinci tablo,

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	7
0	($\frac{5}{2}$)	$-\frac{5}{2}$	1	0	5
0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	11
0	−5 ↑	25	0	0	350

4. Tabanı ve pivotu tekrar değiştirmek. 2. sütun pivot sütunudur, 2. satır pivot satırıdır ve ($\frac{5}{2}$) pivot elemenıdır.

(*a*) 2. satır $\frac{2}{5}$ ile çarpılır,

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	7
0	1	−1	$\frac{2}{5}$	0	2
0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	11
0	−5	25	0	0	350

(*b*) Pivot sütununun 2. satırın $\frac{1}{2}$ ile çarpılıp 1. satırdan çıkarılması, 2. satırın $\frac{5}{2}$ ile çarpılıp 3. satırdan çıkarılması ve 2. satırın 5 ile çarpılıp 4. satıra eklenmesi ile oluşturulacağı açıktır. Üçüncü tablo,

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
1	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	6
0	1	−1	$\frac{2}{5}$	0	2
0	0	2	−1	1	6
0	0	20	2	0	360

Hiç negatif gösterge olmadığı için bu son tablodur. Yukarıdaki birim sütun vektörü olmayan değişkenler sıfıra eşitlenir ve birim matris formu için yeniden düzenlenir, $\bar{x}_1 = 6, \bar{x}_2 = 2, \bar{s}_1 = 0, \bar{s}_2 = 0$ ve $\bar{s}_3 = 6$ ve $\bar{\pi} = 360$ olduğunu görürüz. Girdilerin gölge fiyatları sırasıyla 20, 2 ve 0'dır. Grafik yorumu için Şekil 7-1'e bakınız.

8.2. Aşağıda verilen denklem ve eşitsizlikler için Problem 8.1.'i tekrar yapınız:

max $\quad \pi = 56x_1 + 24x_2 + 18x_3$

öyle ki $\quad 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 240 \qquad 8x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 120$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Gevşek değişkenler eklenir ve kısıt denklemleri matris formunda ifade edilir.

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_1 = 240 \qquad 8x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 120$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 \\ 120 \end{bmatrix}$$

Sonra başlangıç tablosu oluşturulur:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Sabit
4	2	3	1	0	240
(8)	2	1	0	1	120
−56 ↑	−24	−18	0	0	0

Sonra aşağıdaki gibi taban ve pivot değiştirilir. (1) 2. satır $\frac{1}{8}$ ile çarpılır,

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Sabit
4	2	3	1	0	240
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	15
−56	−24	−18	0	0	0

(2) Pivot sütununun 2. satırın 4 ile çarpılıp 1. satırdan çıkarılması ve 2. satırın 56 ile çarpılıp 3. satıra eklenmesi ile oluşturulacağı açıktır. Oluşturulan ikinci tablo:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Sabit
0	1	($\frac{5}{2}$)	1	$-\frac{1}{2}$	180
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	15
0	−10	−11 ↑	0	7	840

Taban ve pivot tekrar değiştirilir. (1) 1. satır $\frac{2}{5}$ ile çarpılır,

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Sabit
0	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	72
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	15
0	−10	−11	0	7	840

(2) Pivot sütununun 1. satırın $\frac{1}{8}$ ile çarpılıp 2. satırdan çıkarılması ve 1. satırın 11 ile çarpılıp 3. satıra eklenmesi ile oluşturulacağı açıktır. Oluşturulan üçüncü tablo:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Sabit
0	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	72
1	($\frac{1}{5}$)	0	$-\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	6
0	$-\frac{28}{5}$ ↑	0	$\frac{22}{5}$	$\frac{24}{5}$	1632

Burada hala bir negatif gösterge olduğu için pivot tekrar alınır. 2. satır 5 ile çarpılır,

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Sabit
0	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	72
5	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	30
0	$-\frac{28}{5}$	0	$\frac{22}{5}$	$\frac{24}{5}$	1632

2. satır $\frac{2}{5}$ ile çarpılıp 1. satırdan çıkarılır ve 2. satır $\frac{28}{5}$ ile çarpılıp 3. satıra eklenir. Son tablo oluşturulur:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Sabit
−2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	60
5	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	30
28	0	0	3	9	1800

Burada $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 30, \bar{x}_3 = 60, \bar{s}_1 = 0, \bar{s}_2 = 0$ ve $\bar{\pi} = 1800$'dür. İlk girdi için gölge fiyat 3; ikincisi için 9'dur. x_1'in ilk pivotta tabana getirildiğine ve üçüncü pivotta ayrıldığına dikkat ediniz. Bir algoritma amaç fonksiyonunun değerinde daha fazla düzelme aradığı için taban olarak girilen bir değişken taban olmaktan çıkarılabilir.

8.3. Aşağıda verilen verilerle Problem 8.1.'i tekrar yapınız:

max $\quad \pi = 250x_1 + 200x_2$

öyle ki $\quad 6x_1 + 2x_2 \le 36 \qquad x_1 + 4x_2 \le 20$

$\qquad 3x_1 + 5x_2 \le 30 \qquad x_1, x_2 \ge 0$

1. Başlangıç tablosu oluşturulur:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
(6)	2	1	0	0	36
3	5	0	1	0	30
1	4	0	0	1	20
−250 ↑	−200	0	0	0	0

2. Taban ve pivot değiştirilir.

(*a*) 1. satır $\frac{1}{6}$ ile çarpılır,

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	6
3	5	0	1	0	30
1	4	0	0	1	20
−250	−200	0	0	0	0

(*b*) 1. satır 3 ile çarpılıp 2. Satırdan çıkarılır, 1. satır 3. satırdan çıkarılır ve 1. satır 250 ile çarpılıp 4. satıra eklenir. Oluşturulan ikinci tablo:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	6
0	(4)	$-\frac{1}{2}$	1	0	12
0	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	1	14
0	$-\frac{350}{3}$ ↑	$\frac{125}{3}$	0	0	1500

3. Taban ve pivot tekrar değiştirilir.

(*a*) 2. satır $\frac{1}{4}$ ile çarpılır,

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	6
0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	3
0	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	1	14
0	$-\frac{350}{3}$	$\frac{125}{3}$	0	0	1500

(*b*) 2. satır $\frac{1}{3}$ ile çarpılıp 1. satırdan, 2. satır $\frac{11}{3}$ ile çarpılıp 3. satırdan çıkarılır ve 2. satır $\frac{350}{3}$ ile çarpılıp 4. satıra eklenir. Oluşturulan son tablo:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
1	0	$\frac{5}{24}$	$-\frac{1}{12}$	0	5
0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	3
0	0	$\frac{7}{24}$	$-\frac{11}{12}$	1	3
0	0	$\frac{325}{12}$	$\frac{175}{6}$	0	1850

Böylece $\overline{x}_1 = 5$, $\overline{x}_2 = 3$, $\overline{s}_1 = 0$, $\overline{s}_2 = 0$ ve $\overline{s}_3 = 3$ ve $\overline{\pi} = 1850$'dir. Girdilerin gölge fiyatları sırasıyla $\frac{325}{12} \approx 27.08$ ve $\frac{175}{6} \approx 29.17$ 'dir.

DUAL ARACILIĞIYLA PRİMAL ÇÖZÜM

8.4. Aşağıdaki primal problemler için, (*a*) duali formüle ediniz, (*b*) duali grafiksel olarak çözünüz. Sonra (*c*) primal amaç fonksiyonu ve (*d*) primal karar değişkenlerinin optimal değerlerini bulmak için dual çözümü kullanınız.

min $c = 36y_1 + 30y_2 + 20y_3$

öyle ki $6y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10$
$2y_1 + 5y_2 + 4y_3 \geq 8$
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

(*a*) Dual

max $\pi = 10x_1 + 8x_2$

öyle ki $6x_1 + 2x_2 \leq 36$
$3x_1 + 5x_2 \leq 30$
$x_1 + 4x_2 \leq 20$
$x_1, x_2 \geq 0$

(*b*) Dual $\bar{x}_1 = 5$, $\bar{x}_2 = 3$ ve $\bar{\pi} = 74$ için Problem 7.10.'da primal gibi grafiksel olarak çözüldü.

(*c*) $\bar{\pi} = 74$ için $\bar{c} = 74$'tür.

(*d*) x_1 ve x_2 dual karar değişkenlerinden y_1, y_2, y_3 primal karar değişkenlerini bulmak için ilk olarak primal (I) ve dual (II) eşitsizlikler denkleme dönüştürülür.

I. $6y_1 + 3y_2 + y_3 - s_1 = 10$
$2y_1 + 5y_2 + 4y_3 - s_2 = 8$

II. $6x_1 + 2x_2 + t_1 = 36$
$3x_1 + 5x_2 + t_2 = 30$
$x_1 + 4x_2 + t_3 = 20$

Sonra t_1, t_2, t_3 gevşek değişkenlerini bulmak için $\bar{x}_1 = 5$, $\bar{x}_2 = 3$ dual kısıt denklemlerinde yerine yazılır.

$$6(5) + 2(3) + t_1 = 36 \qquad (\bar{t}_1 = 0)$$
$$3(5) + 5(3) + t_2 = 30 \qquad (\bar{t}_2 = 0)$$
$$(5) + 4(3) + t_3 = 20 \qquad (\bar{t}_3 = 3)$$

$\bar{t}_3 \neq 0$ iken $\bar{y}_3$'e karşılık gelen karar değişkeni sıfıra eşit olmalıdır. $\bar{t}_1 = \bar{t}_2 = 0$ iken $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \neq 0$'dır.

Dual karar değişkenleri olan $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ nin optimal değerleri sıfıra eşit olmayacağı için karşılık gelen primal artık değişkenler $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ sıfıra eşit olmak zorundadır. $\bar{y}_3 = \bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$ bilgilerini primal kısıt denklemlerine yazarsak,

$$6y_1 + 3y_2 + (0) - (0) = 10$$
$$2y_1 + 5y_2 + 4(0) - (0) = 8$$

Eş anlı çözüldüğünde $\bar{y}_1 = \dfrac{13}{2} \approx 1.08$ ve $\bar{y}_2 = \dfrac{7}{6} \approx 1.17$'dir. Böylece primal karar değişkenleri yaklaşık olarak $\bar{y}_1 = 1.08$, $\bar{y}_2 = 1.17$ ve $\bar{y}_3 = 0$'dır.

8.5. Aşağıdaki primal problem için Problem 8.4'ü tekrar çözünüz:

min $c = 40y_1 + 60y_2 + 48y_3$

öyle ki $5y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 7$ $\quad 2y_1 + 12y_2 + 8y_3 \geq 21$
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

(*a*) Dual

max $\pi = 7x_1 + 21x_2$

öyle ki $5x_1 + 2x_2 \leq 40$ $\quad 4x_1 + 8x_2 \leq 48$
$3x_1 + 12x_2 \leq 60$ $\quad x_1, x_2 \geq 0$

(*b*) Dual $\overline{x}_1 = 4, \overline{x}_2 = 4$ ve $\overline{\pi} = 112$ için Problem 7.9.'da bir primal gibi grafiksel olarak çözüldü.

(*c*) $\overline{\pi} = 112$ için $\overline{c} = 112$'dür.

(*d*) I $5y_1 + 3y_2 + 4y_3 - s_1 = 7$
$2y_1 + 12y_2 + 8y_3 - s_2 = 21$

II. $5x_1 + 2x_2 + t_1 = 40$
$3x_1 + 12x_2 + t_2 = 60$
$4x_1 + 8x_2 + t_3 = 48$

$\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = 4$ II'de yerine yazılır,

$$5(4) + 2(4) + t_1 = 40 \quad (\overline{t}_1 = 12)$$
$$3(4) + 12(4) + t_2 = 60 \quad (\overline{t}_2 = 0)$$
$$4(4) + 8(4) + t_3 = 48 \quad (\overline{t}_3 = 0)$$

$\overline{t}_1 \neq 0$ iken $\overline{y}_1 = 0$'dır. $\overline{t}_2 = \overline{t}_3 = 0$ iken $\overline{y}_2, \overline{y}_3 \neq 0$'dır. $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \neq 0$ iken $\overline{s}_1 = \overline{s}_1 = 0$'dır. I'de bilgiler yerine yazılır,

$$5(0) + 3y_2 + 4y_3 - (0) = 7$$
$$2(0) + 12y_2 + 8y_3 - (0) = 21$$

Eş anlı çözüldüğünde $\overline{y}_2 = \frac{7}{6} \approx 1.167$ ve $\overline{y}_3 = \frac{7}{8} \approx 0.875$'tir. Böylece primal karar değişkenleri $\overline{y}_1 = 0, \overline{y}_2 = 1.167$ ve $\overline{y}_3 = 0.875$'tir.

8.6. Aşağıdaki primal problem için Problem 8.4.'ü tekrar çözünüz:

max $\quad \pi = 30x_1 + 20x_2 + 24x_3$

öyle ki $\quad 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 80 \qquad 6x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 160$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

için

(*a*) Dual

min $\quad c = 80y_1 + 160y_2$

öyle ki $\quad 2y_1 + 6y_2 \geq 30 \qquad 2y_1 + 3y_2 \geq 24$
$5y_1 + y_2 \geq 20 \qquad y_1, y_2 \geq 0$

(*b*) Dual $\overline{y}_1 = 9, \overline{y}_2 = 2$ ve $\overline{c} = 1040$ için Problem 7.15'te primal gibi grafiksel olarak çözüldü.

(*c*) $\overline{c} = 1040$ için $\overline{\pi} = 1040$'dır.

(*d*) I $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + s_1 = 80$
$6x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 = 160$

II. $2y_1 + 6y_2 - t_1 = 30$
$5y_1 + y_2 - t_2 = 20$
$2y_1 + 3y_2 - t_3 = 24$

$\overline{y}_1 = 9, \overline{y}_2 = 2$ II'de yerine yazılır,

$$2(9) + 6(2) - t_1 = 30 \quad (\overline{t}_1 = 0)$$
$$5(9) + (2) - t_2 = 20 \quad (\overline{t}_1 = 27)$$
$$2(9) + 3(2) - t_3 = 24 \quad (\overline{t}_3 = 0)$$

$\overline{t}_1 = \overline{t}_3 = 0$ iken $\overline{x}_1, \overline{x}_3 \neq 0$ dır. $\overline{t}_2 \neq 0$ için $\overline{x}_2 = 0$'dır. $\overline{y}_1, \overline{y}_2 \neq 0$ iken $\overline{s}_1 = \overline{s}_2 = 0$'dır. I'de bilgiler yerine yazılır,

$$2x_1 + 5(0) + 2x_3 + (0) = 80$$
$$6x_1 + (0) + 3x_3 + (0) = 160$$

Eş anlı çözüldüğünde $\overline{x}_1 = \frac{40}{3} \approx 13.33$ ve $\overline{x}_3 = \frac{80}{3} \approx 26.67$'dir. Böylece $\overline{x}_1 = 13.33, \overline{x}_2 = 0$ ve $\overline{x}_3 = 26.67$'dir.

8.7. Aşağıdaki primal problem için Problem 8.4.'ü tekrar çözünüz:

max $\pi = 36x_1 + 84x_2 + 16x_3$

öyle ki $3x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 20 \qquad 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 15$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(*a*) Dual

min $c = 20y_1 + 150y_2$

öyle ki $3y_1 + 2y_2 \geq 36 \qquad y_1 + 4y_2 \geq 16$

$6y_1 + 6y_2 \geq 84 \qquad y_1, y_2 \geq 0$

(*b*) Dual $\bar{y}_1 = 8, \bar{y}_2 = 6$ ve $\bar{c} = 250$ için Problem 7.14'te primal gibi grafiksel olarak çözüldü.

(*c*) $\bar{c} = 250$ için $\bar{\pi} = 250$'dir.

(*d*) I $\quad 3x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 20$

$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + s_2 = 15$

II. $\quad 3y_1 + 2y_2 - t_1 = 36$

$6y_1 + 6y_2 - t_2 = 84$

$y_1 + 4y_2 - t_3 = 16$

$\bar{y}_1 = 8, \bar{y}_2 = 6$ II'de yerine yazılır,

$$3(8) + 2(6) - t_1 = 36 \qquad (\bar{t}_1 = 0)$$
$$6(8) + 6(6) - t_2 = 84 \qquad (\bar{t}_1 = 0)$$
$$(8) + 4(6) - t_3 = 16 \qquad (\bar{t}_3 = 16)$$

$\bar{t}_1 = \bar{t}_2 = 0$ iken $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \neq 0$ dır. $\bar{t}_3 \neq 0$ için $\bar{x}_3 = 0$'dır. $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \neq 0$ iken $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$'dır. I'de bilgiler yerine yazılır,

$$3x_1 + 6x_2 + (0) + (0) = 20$$
$$2x_1 + 6x_2 + 4(0) + (0) = 15$$

Eş anlı çözüldüğünde $\bar{x}_1 = 5$ ve $\bar{x}_2 = \frac{5}{6}$'dır. Böylece $\bar{x}_1 = 5, \bar{x}_2 = \frac{5}{6}$ ve $\bar{x}_3 = 0$'dır.

8.8. (*a*) Problem 8.4.'den 8.7.'ye kadar primal kısıtlardaki kaynakların marjinal değeri (MVs) veya gölge fiyatlarını belirlemek için dualleri kullanınız. (*b*) Kısıtlardaki kaynaklar için *A* ve *B* yi kullanarak mevcut kaynakların toplamı çarpı kendi marjinal değerlerinin primal amaç fonksiyonunun optimal değerine eşit olduğunu gösteriniz.

Problem 8.4'ten,

(*a*) $MV_A = \bar{x}_1 = 5$ ve $MV_B = \bar{x}_2 = 3$

(*b*) $\bar{c} = MV_A(A) + MV_B(B) = 5(10) + 3(8) = 74$

Problem 8.5'ten,

(*a*) $MV_A = \bar{x}_1 = 4$ ve $MV_B = \bar{x}_2 = 4$

(*b*) $\bar{c} = MV_A(A) + MV_B(B) = 4(7) + 4(21) = 112$

Problem 8.6'den,

(*a*) $MV_A = \bar{y}_1 = 9$ ve $MV_B = \bar{y}_2 = 2$

(*b*) $\bar{\pi} = MV_A(A) + MV_B(B) = 9(80) + 2(160) = 1040$

Problem 8.7'den,

(*a*) $MV_A = \bar{y}_1 = 8$ ve $MV_B = \bar{y}_2 = 6$

(*b*) $\bar{\pi} = MV_A(A) + MV_B(B) = 8(20) + 6(15) = 250$

SİMPLEKS ALGORİTMA VE DUAL

8.9. Aşağıdaki problem için (*a*) duali yazınız. (*b*) Simpleks algoritma kullanarak duali çözünüz. (*c*) Primal amaç fonksiyonu ve karar değişkenlerinin optimal değerini belirlemek için son dual tablosunu kullanınız.

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & c = 14y_1 + 40y_2 + 18y_3 \\ \text{öyle ki} \quad & 2y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 50 \\ & y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq 30 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(*a*)
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \pi = 50x_1 + 30x_2 \\ \text{öyle ki} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ & 5x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(*b*) Dual Problem 8.1'deki primal gibi çözüldüğünde son tablo,

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
1	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	6
0	1	−1	$\frac{2}{5}$	0	2
0	0	2	−1	1	6
0	0	20	2	0	360

(*c*) Primal karar değişkenleri, yukarıdaki kutudan kolayca tanımlanan duale karşılık gelen kaynakların marjinal değeri veya gölge fiyatı tarafından oluşturulmuştur. Böylece,, $\bar{y}_1 = 20$, $\bar{y}_2 = 2$, $\bar{y}_3 = 0$ ve $\bar{c} = 14(20) + 40(2) + 18(0) = 360$'dır.

8.10. Aşağıdaki doğrusal programlama problemi için Problem 8.9'u tekrar çözünüz:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & c = 240y_1 + 120y_2 \\ \text{öyle ki} \quad & 4y_1 + 8y_2 \geq 56 \\ & 2y_1 + 2y_2 \geq 24 \\ & 3y_1 + y_2 \geq 18 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(*a*)
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \pi = 56x_1 + 24x_2 + 18x_3 \\ \text{öyle ki} \quad & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 240 \\ & 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 120 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(*b*) Dual Problem 8.2'deki primal gibi çözülür. Son tablo,

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Sabit
−2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	60
5	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	30
28	0	0	3	9	1800

(*c*) Böylece, $\overline{y_1} = 3, \overline{y_2} = 9$ ve $\bar{c} = 240(3) + 120(9) = 1800$.

8.11. Verilenler için Problem 8.9'u tekrar çözünüz:

min $\quad c = 36y_1 + 30y_2 + 20y_3$

öyle ki

$$6y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 250$$
$$2y_1 + 5y_2 + 4y_3 \geq 200$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

(*a*) max $\quad \pi = 250x_1 + 200x_2$

öyle ki

$$6x_1 + 2x_2 \leq 36$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 30$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(*b*) Dual Problem 8.3'teki primal gibi çözülür. Son tablo,

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Sabit
1	0	$\frac{5}{24}$	$-\frac{1}{12}$	0	5
0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	3
0	0	$\frac{7}{24}$	$-\frac{11}{12}$	1	3
0	0	$\frac{325}{12}$	$\frac{175}{6}$	0	1850

(*c*) Böylece, $\overline{y_1} = \frac{325}{12} \approx 27.08$, $\overline{y_2} = \frac{175}{6} \approx 29.17$, $\overline{y_3} = 0$ ve $\bar{c} = 36(\frac{325}{12}) + 30(\frac{175}{6}) = 1850$.

Ek Problemler

SİMPLEKS ALGORİTMA İLE MAKSİMİZASYON

Aşağıdaki doğrusal programlama problemlerinin her birini çözmek için simpleks algoritma kullanınız.

8.12. max $\quad \pi = 20x_1 + 8x_2$

öyle ki

$$4x_1 + 5x_2 \leq 200$$
$$6x_1 + 3x_2 \leq 180$$
$$8x_1 + 2x_2 \leq 160$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

8.13. max $\pi = 4x_1 + 3x_2$

öyle ki $3x_1 + 9x_2 \leq 207$

$6x_1 + 4x_2 \leq 120$

$15x_1 + 5x_2 \leq 225$

$x_1, x_2 \geq 0$

8.14. max $\pi = 8x_1 + 2x_2$

öyle ki $5x_1 + 4x_2 \leq 216$

$6x_1 + 3x_2 \leq 180$

$12x_1 + 2x_2 \leq 312$

$x_1, x_2 \geq 0$

8.15. max $\pi = 9x_1 + 5x_2$

öyle ki $2x_1 + 4x_2 \leq 280$

$6x_1 + 5x_2 \leq 450$

$15x_1 + 6x_2 \leq 720$

$x_1, x_2 \geq 0$

8.16. max $\pi = 39x_1 + 70x_2 + 16x_3$

öyle ki $x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 180$

$5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 300$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

8.17. max $\pi = 168x_1 + 222x_2 + 60x_3$

öyle ki $7x_1 + 14x_2 + 2x_3 \leq 90$

$8x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 120$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

DUAL

8.18. Problem 8.12'nin dualini bulunuz.

8.19. Problem 8.16'nın dualini bulunuz.

DUAL İLE MİNİMİZASYON

Aşağıdaki problemlerin her birini önce dualini bulup sonra simpleks algoritma kullanarak çözünüz.

8.20. min $c = 225y_1 + 180y_2$

öyle ki $8y_1 + y_2 \geq 32$

$7y_1 + 4y_2 \geq 112$

$y_1 + 6y_2 \geq 54$

$y_1, y_2 \geq 0$

8.21. min $c = 540y_1 + 900y_2$

öyle ki $3y_1 + 15y_2 \geq 195$

$4y_1 + 5y_2 \geq 140$

$10y_1 + 2y_2 \geq 80$

$y_1, y_2 \geq 0$

8.22. min $c = 24y_1 + 61y_2 + 60y_3$

öyle ki $2y_1 + 2y_2 + 6y_3 \geq 60$

$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 15$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

8.23. min $c = 48y_1 + 148y_2 + 145y_3$

öyle ki $2y_1 + 4y_2 + 8y_3 \geq 48$

$3y_1 + 12y_2 + 6y_3 \geq 96$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Ek Problemlerin Cevapları

8.12. $\bar{x}_1 = 12.5, \bar{x}_2 = 30, \bar{\pi} = 490$

8.13. $\bar{x}_1 = 6, \bar{x}_2 = 21, \bar{\pi} = 87$

8.14. $\bar{x}_1 = 24, \bar{x}_2 = 12, \bar{\pi} = 216$

8.15. $\bar{x}_1 = 25, \bar{x}_2 = 57.5, \bar{x}_3 = 0, \bar{\pi} = 512.5$

8.16. $\bar{x}_1 = 20, \bar{x}_2 = 80, \bar{x}_3 = 10, \bar{\pi} = 6380$

8.17. $\bar{x}_1 = 10, \bar{x}_2 = 0, \bar{\pi} = 2280$

8.18. min $c = 200y_1 + 180y_2 + 160y_3$

öyle ki $4y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 20$

$5y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 8$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

8.19. min $c = 180y_1 + 300y_2$

öyle ki $y_1 + 5y_2 \geq 39$

$2y_1 + 2.5y_2 \geq 70$

$5y_1 + y_2 \geq 16$

$y_1, y_2 \geq 0$

8.20. $\overline{y_1} = 12, \overline{y_2} = 7, \overline{c} = 3960$

8.21. $\overline{y_1} = 25, \overline{y_2} = 8, \overline{c} = 20{,}700$

8.22. $\overline{y_1} = 7.5, \overline{y_2} = 0, \overline{y_3} = 7.5, \overline{c} = 630$

8.23. $\overline{y_1} = 16, \overline{y_2} = 4, \overline{y_3} = 0, \overline{c} = 1440$

Bölüm 9

TÜREVSEL HESAP: TÜREV VE TÜREV ALMA KURALLARI

9.1 LİMİT

Eğer bir f fonksiyonu x'in bütün değerleri için x a'ya eşit değil fakat her iki taraftan yaklaşırken, $f(x)$ fonksiyonel değerleri bir ve yalnızca bir L sonlu reel sayısına yaklaşıyorsa, L, *x a'ya yaklaşırken $f(x)$'in limiti* olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi yazılır.

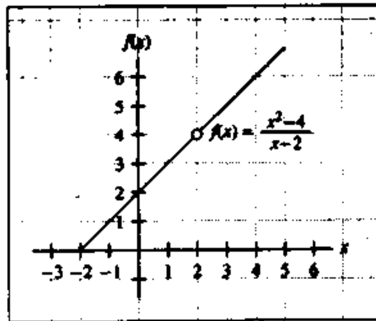
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ ve $\lim_{x \to a} g(x)$ 'in ikisinin de tanımlı olduğunu varsayarak aşağıda *limit kuralları* verilmiş, Örnek 2'de açıklanmış ve Problem 9.1 ve 9.5 arasında ise uygulama yapılmıştır.

1. $\lim_{x \to a} k = k$ ($k = a$ sabit)
2. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ ($n = a$ pozitif bir tam sayı)
3. $\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x)$ ($k = a$ sabit)
4. $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
6. $\lim_{x \to a}[f(x) \div g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \div \lim_{x \to a} g(x)$ $\quad [\lim_{x \to a} g(x) \neq 0]$
7. $\lim_{x \to a}[f(x)^n] = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$ $\quad (n > 0)$

ÖRNEK 1. (*a*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ $x \neq 0$ olmak üzere, eğer varsa $\lim_{x \to 2} f(x)$ 'i bulmak için bir tablo oluşturur ve Şekil 9-1'deki gibi grafiği çizilir. Parantez içindeki ifade dikkate alınır ($x \neq 2$) ve matematiksel olarak sıfıra bölüm mümkün olmadığı için $f(x)$ $x = 2$'de tanımlı olmayacağından Şekil 9-1'de açık daire ile belirtilir.

x	$f(x)$
−2	0
−1	1
0	2
1	3
1.5	3.5
1.75	3.75
2.25	4.25
2.5	4.5
3	5
4	6



Şekil 9-1

Şekil 9-1'de, $f(x)$ $x = 2$'de tanımlı olmamasına rağmen, $x \to 2^-$ şeklinde yazılan x soldan 2'ye yaklaşırken (değeri < 2 iken), $f(x)$'in 4'e yaklaştığına; ve x $x \to 2^+$ şeklinde yazılan x sağdan 2'ye yaklaştığında (değeri > 2 iken) ise $f(x)$'in yine 4'e yaklaştığına dikkat ediniz. Fonksiyonun limiti x bir sayıya yaklaşırken x'in değerlerinin yalnızca bir sayıya *yaklaşmasına* bağlı olduğu için limit vardır.

Bu

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4 \qquad \text{şeklinde yazılır.}$$

(*b*) $g(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi olmak üzere, eğer varsa $\lim_{x \to 6} g(x)$ limitini bulmak için tablo oluşturulur ve Şekil 9-2'deki gibi grafik çizilir.

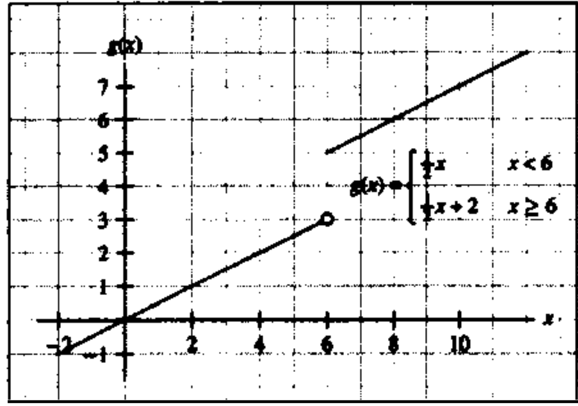
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & iken \quad x < 6 \\ \frac{1}{2}x + 2 & iken \quad x \geq 6 \end{cases}$$

$g(x) = \frac{1}{2}x$

x	$f(x)$
0	0
2	1
4	2
5	2.5

$g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

x	$f(x)$
6	5
8	6
10	7



Şekil 9-2

Şekil 9-2'de, x soldan 6'ya yaklaşırken ($x \to 6^-$), $g(x)$ 3'e yaklaşır ve bu *tek taraflı limit* olarak adlandırılır; ancak x sağdan 6'ya yaklaşırken ($x \to 6^+$), $g(x)$ 5'e yaklaşır, bu da diğer tek taraflı limittir. *x iki taraftan* da 6'ya yaklaşırken $g(x)$ *tek* bir sayıya yaklaşmadığından dolayı limit yoktur.

ÖRNEK 2. Limitler grafik olmaksızın yukarıda numaralandırılan limit kuralları kullanılarak bulunabilir.

(*a*) $\lim_{x \to 5} 24 = 24$ (Kural 1)

(*b*) $\lim_{x \to 7} x^2 = (7)^2 = 49$ (Kural 2)

(*c*) $\lim_{x \to 2} 4x^3 = 4\lim_{x \to 2} x^3 = 4(2)^3 = 32$ (Kural 2 ve Kural 3)

(*d*) $\lim_{x \to 3}(x^4 + 5x) = \lim_{x \to 3} x^4 + 5\lim_{x \to 3} x$
$= (3)^4 + 5(3) = 96$ (Kural 4)

(*e*) $\lim_{x \to 4}[(x+8)(x-5)] = \lim_{x \to 4}(x+8) \cdot \lim_{x \to 4}(x-5)$
$= (4+8) \cdot (4-5) = -12$ (Kural 5)

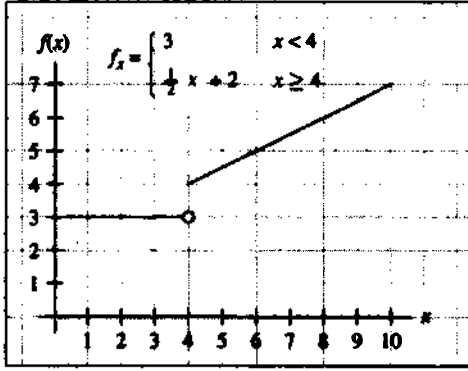
9.2 SÜREKLİLİK

Sürekli fonksiyon, eğrisinde kırılma olmayan bir fonksiyondur. Sürekli bir fonksiyon kalemi kağıttan kaldırmaksızın çizilebilir. Bir f fonksiyonu eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $x=a$ da süreklidir.

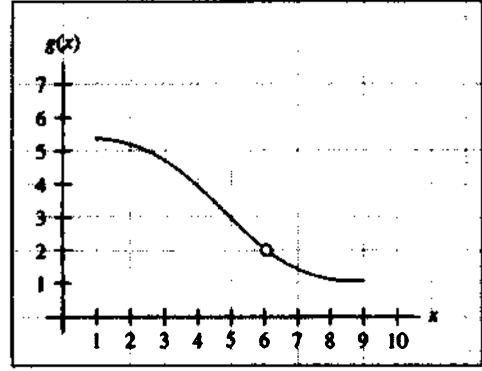
1. $f(x)$, $x = a$'da tanımlı,
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ var,
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Yararlı bir bilgi olarak, tanımsız yani paydası sıfır olan fonksiyonlar haricindeki tüm rasyonel fonksiyonlar gibi bütün polinom fonksiyonlar da süreklidir. Problem 9.6'ya bakınız.

ÖRNEK 3. Sürekli bir fonksiyonun grafiğinin kalemi kağıttan kaldırmaksızın çizilebileceğini ve açık dairenin fonksiyonun o noktada tanımlı olmadığı anlamına geldiği hatırlatıldığında, Şekil 9-3(a)'da $f(x)$'in $x = 4$'te ve Şekil 9-3(b)'de $g(x)$'in $x = 6$'da süreksiz olduğu açıktır.



(a)



(b)

Şekil 9-3

Ancak Şekil 9-3 (a)'nın süreksizlik noktasında $\lim_{x \to 4} f(x)$'in limiti olmasa da Şekil 9-3 (b)'nin süreksizlik noktasında $\lim_{x \to 6} g(x)$'in limitinin olduğuna dikkat ediniz. Çünkü limit ve süreklilik eş anlamlı kavramlar değildir. Limit, fonksiyonun sürekli olmadığı noktada da var olabilir; ancak bir noktada limit yoksa bu noktada fonksiyon sürekli olamaz. Kısaca, limit süreklilik için gerekli fakat yeterli koşul değildir.

9.3 EĞRİSEL FONKSİYONUN EĞİMİ

Eğrisel bir fonksiyonun eğimi sabit değildir. Eğim, eğrinin farklı noktalarında farklı değer alır. Geometride, belirli bir noktada eğrisel bir fonksiyonun eğimi, o noktada fonksiyona çizilen teğetin eğimi ile ölçülür. Eğrisel fonksiyonda *teğet doğrusu*, noktayı çevreleyen alanda yalnızca bir noktada eğriye dokunur. Şekil 9-4'te de görüldüğü gibi eğrinin eğimi A'dan B'ye, B'den C'ye daha düz hale geldiğinden (daha az büyüdüğünden) farklı noktalarda eğrisel fonksiyonun eğiminin hesaplanması için ayrı teğet doğruları gerekir.

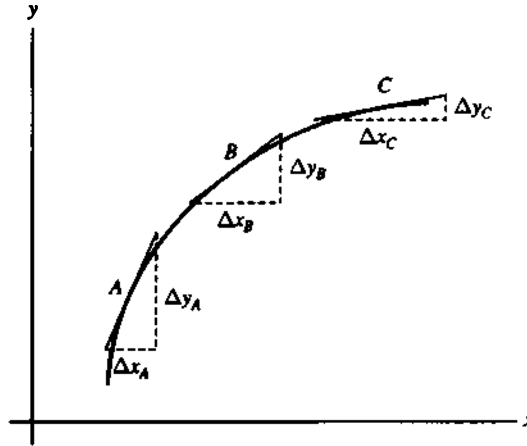
Teğet doğrusunun eğimi, kesen doğrular ailesinin eğiminden türetilmektedir. Kesen doğru S, Şekil 9-5'te görüldüğü gibi eğriyi iki noktada kesen düz bir doğrudur.

$$\text{Eğim } S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

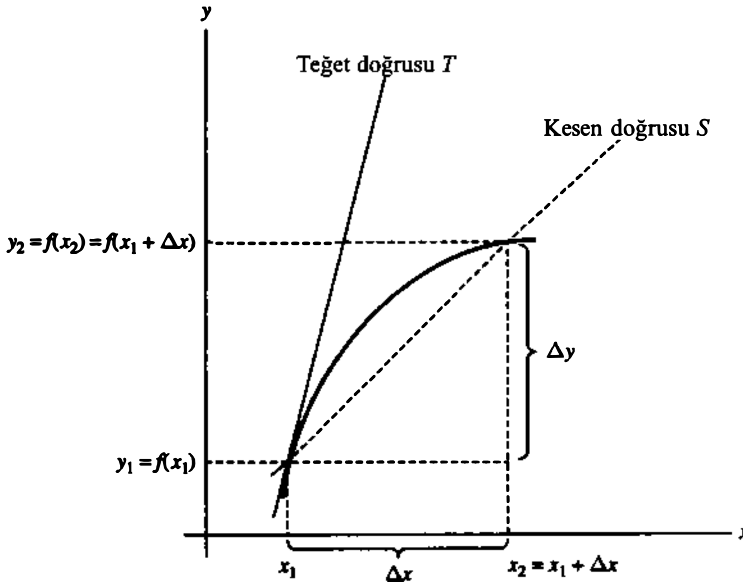
$x_2 = x_1 + \Delta x$ ve $y_2 = f(x_1 + \Delta x)$ alındığında, kesen doğrunun eğimi *fark denklemi* olarak da ifade edilebilir:

$$\text{Eğim } S = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{(x_2 + \Delta x) - x_1}$$

$$\text{Eğim } S = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$



Şekil 9-4



Şekil 9-5

Eğer x_2 ve x_1 arasındaki uzaklık mümkün olduğu kadar küçük getirilirse, yani $\Delta x \rightarrow 0$ ise kesen doğru sola doğru döner ve kademeli olarak teğet doğrusuna yaklaşır. Eğer kesen doğrusunun eğimi $\Delta x \rightarrow 0$ gibi bir limite yaklaşıyorsa, limit o noktada fonksiyonun eğimi olmasının yanında T teğet doğrusunun da eğimidir. Bu

$$\text{Eğim } T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (9.1)$$

şeklinde yazılır.

Not: Birçok kitapta Δx yerine h kullanıldığından

$$\text{Eğim } T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \qquad (9.1a)$$

şeklinde de verilebilir.

ÖRNEK 4. $f(x) = 3x^2$ gibi eğrisel bir fonksiyonun eğimi aşağıda gösterildiği gibi bulunur: (1) (9.1) veya (9.1a) cebirsel formüldeki özel fonksiyon kullanılır ve $x_1 + \Delta x$ (veya $x_1 + h$) ve x_1 değişkenleri sırasıyla yerine yazılır; (2) fonksiyon sadeleştirilir ve (3) sadeleştirilmiş fonksiyonun limiti hesaplanır. Böylece, (9.1) formülünden,

$$\text{Eğim } T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

1) $f(x) = 3x^2$ özel fonksiyonu kullanılır ve değişkenler yerine yazılır,

$$\text{Eğim } T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 3x^2}{\Delta x}$$

2) Sonuçlar sadeleştirilir,

$$\text{Eğim } T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3[(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2] - 3x^2}{\Delta x}$$

$$\text{Eğim } T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x(\Delta x) + 3(\Delta x)}{\Delta x}$$

Δx'e bölündüğünde,

$$\text{Eğim } T = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x)$$

3) Bulunan ifadenin limiti alınır,

$$\text{Eğim } T = 6x$$

Not: Eğimin değeri seçilen x'in değerine bağlıdır. $x = 1$ de eğim $T = 6(1) = 6$; $x = 2$ de eğim $T = 6(2) = 12$ dir.

9.4 TÜREV

$y = f(x)$ olmak üzere verilen bir fonksiyonun, limitinin olması koşuluyla $f'(x)$, y', df/dx veya dy/dx şeklinde yazılan x de ki *türevi*,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{9.2}$$

olarak tanımlanır. Veya (9.1a) kullanılarak "x'e göre f'nin türevi" olarak okunan $f'(x)$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{9.2a}$$

şeklindedir.

$f'(x)$ veya basitçe f' şeklinde ifade edilen bir fonksiyonun türevi, hem fonksiyonun eğimini hem de belirli bir anda fonksiyondaki anlık değişim oranını hesaplar.

9.5 TÜREVLENEBİLİRLİK VE SÜREKLİLİK

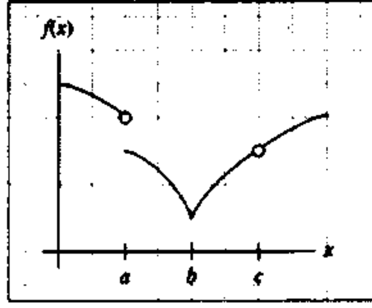
Bir fonksiyonun eğer bir noktada türevi varsa (türev alınabiliyorsa) o noktada *türevlenebilirdir*. Fonksiyonun bir noktada türevlenebilir olması için, o noktada (1) sürekli olmalı ve (2) tek bir teğeti olmalıdır. Şekil 9-6'da, $f(x)$ a ve c de türevlenebilir değildir. Çünkü fonksiyonda bu noktalarda boşluklar vardır ve fonksiyonun süreksiz olduğu herhangi bir noktada türevi alınamaz.

Süreklilik tek başına türevlenebilirliği garanti etmez (türevlenebilirlik için yeterli koşul değildir). Şekil 9-6'da, $f(x)$ b'de süreklidir fakat b'de sivri nokta veya *uç noktası*na sonsuz sayıda teğet doğrusu çizilebileceğinden (ve tek bir teğet doğrusu yoktur) türevlenebilir değildir.

9.6 TÜREV GÖSTERİMİ

Bir fonksiyonun türevi birçok farklı şekilde gösterilebilir. $y = f(x)$'in türevi aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$f'(x) \quad f' \quad y' \quad \frac{df}{dx} \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{d}{dx}[f(x)] \quad \text{veya} \quad D_x[f(x)]$$



Şekil 9-6

$y = \phi(t)$ türevi,

$$\phi'(t) \qquad \phi' \qquad y' \qquad \frac{dy}{dt} \qquad \frac{d\phi}{dt} \qquad \frac{d}{dt}[\phi(t)] \qquad \text{veya} \qquad D_t[\phi(t)]$$

şeklinde yazılabilir.

$y = f(x)$'in türevi $x = a$ için hesaplanırsa, uygun gösterim $f'(a)$ ve $dy/dx|a$ olacaktır. Problem 9.7 ve 9.8 'e bakınız.

ÖRNEK 5. $y = 5x^2 + 7x + 2$ olmak üzere, türevi

$$y' \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{d}{dz}[5x^2+7x+12] \qquad \text{veya} \qquad D_x[5x^2+7x+12]$$

yazılabilir.

$z = \sqrt{8t-3}$ olmak üzere, türevi

$$z' \quad \frac{dz}{dt} \quad \frac{d}{dt}[\sqrt{8t-3}] \qquad \text{veya} \qquad D_t[\sqrt{8t-3}]$$

ifade edilebilir.

9.7 TÜREV ALMA KURALLARI

Türev alma bir fonksiyonun türevinin bulunması işlemidir. Basitçe verilen bir fonksiyona birkaç temel kural veya formülün uygulanmasını kapsar. $y = f(x)$ gibi bir fonksiyon için türev alma kuralları açıklanırken, g ve h x'in tanımlanmamış fonksiyonları olmak üzere $g(x)$ ve $h(x)$ gibi fonksiyonlar yaygın olarak kullanılır ve türevlenebilir oldukları varsayılır. Türev alma kuralları aşağıda listelenmiştir ve Problem 9.7'den 9.22'ye kadar uygulama yapılmıştır. Problem 9.23'ten 9.25'e kadar seçilen kanıtları bulabilirsiniz.

9.7.1 Sabit Fonksiyon Kuralı

k sabit bir sayı olmak üzere $f(x) = k$ şeklindeki sabit bir fonksiyonun türevi sıfırdır.

$$f(x) = k \text{ ise } f'(x) = 0$$

ÖRNEK 6.

$$f(x) = 5 \text{ ise } f'(x) = 0$$

$$f(x) = -9 \text{ ise } f'(x) = 0$$

9.7.2 Doğrusal Fonksiyon Kuralı

$f(x) = mx + b$ şeklindeki doğrusal bir fonksiyonun türevi, x'in katsayısı olan m'ye eşittir. Sabitin türevi sıfırken, birinci kuvveti alınan bir değişkenin türevi daima değişkenin katsayısına eşittir.

$$f(x) = mx + b \text{ ise } f'(x) = m$$

ÖRNEK 7.

$$f(x) = 6x + 7 \text{ ise } f'(x) = 6$$

$$f(x) = 9 - 1/4x \text{ ise } f'(x) = -1/4$$

$$f(x) = 18x \text{ ise } f'(x) = 18$$

9.7.3 Üslü Fonksiyon Kuralı

k bir sabit ve n reel bir sayı olmak üzere, $f(x) = kx^n$ şeklindeki üslü bir fonksiyonun türevi, k katsayısı çarpı n üssü ile x değişkeninin $(n - 1)$. kuvvetinin çarpımına eşittir.

$$f(x) = kx^n \text{ ise } f'(x) = k \cdot n \cdot x^{n-1}$$

ÖRNEK 8.

$$f(x) = 6x^3 \text{ ise } f'(x) = 6 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 18x^2$$

$$f(x) = 7x^2 \text{ ise } f'(x) = 7 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 14x$$

$$f(x) = x^5 \text{ ise } f'(x) = (1) \cdot 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$$

Problem 9.8'e de bakınız.

9.7.4 Toplam ve Fark İçin Kural

İki fonksiyonun toplamının türevi, ayrı ayrı fonksiyonların türevinin toplamına eşittir. Benzer şekilde iki fonksiyonun farklarının türevi, iki fonksiyonun türevlerinin farkına eşittir.

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \text{ ise } f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

ÖRNEK 9.

$$f(x) = 16x^4 - 5x^3 \text{ ise } f'(x) = 64x^3 - 15x^2$$

$$f(x) = 6x^2 + 4x - 9 \text{ ise } f'(x) = 12x + 4$$

Problem 9.9'a bakınız. Bu kuralın türevi için ise Problem 9.23'e bakınız.

9.7.5 Çarpma İşleminin Kuralı

İki fonksiyonun çarpımının türevi, birinci fonksiyon çarpı ikinci fonksiyonun türevi artı ikinci fonksiyon çarpı birinci fonksiyonun türevine eşittir. $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

$$f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) = g'(x) \qquad (9.3)$$

ÖRNEK 10. $f(x) = 4x^5\,(3x - 2)$ olmak üzere $g(x) = 4x^5$ ve $h(x) = (3x - 2)$ olsun. Her birinin ayrı ayrı türevi alındığında, $g'(x) = 20x^4$ ve $h'(x) = 3$'tür. Sonrasında (9.3) çarpım formülünde belirtilmiş yerlere uygun değerler yazılır,

$$f'(x) = 4x^5(3) + (3x - 2)(20x^4)$$

ve sadeleştirme yapılır,

$$f'(x) = 12x^5 + 60x^5 - 40x^4 = 72x^5 - 40x^4$$

Problem 9.10'dan 9.12'ye kadar inceleyiniz; kuralın türevi için Problem 9.24'e bakınız.

9.7.6 Bölme İşleminin Kuralı

İki fonksiyonun bölümünün türevi, payın türevi çarpı payda eksi paydanın türevi çarpı pay ifadesinin tamamının paydanın karesine bölümüne eşittir. $f(x) = g(x)/h(x)$, $h(x) \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2} \tag{9.4}$$

ÖRNEK 11.

$$f(x) = \frac{6x^3}{2x+5} \qquad \left(x \neq -\frac{5}{2}\right)$$

olmak üzere, $g(x) = 6x^3$, $h(x) = 2x + 5$; $g'(x) = 18x^2$ ve $h'(x) = 2$ olsun. Bu değerler bölüm kuralı formülünde (9.4) de yerine yazılır,

$$f'(x) = \frac{(2x+5)(18x^2) - 6x^3(2)}{(2x+5)^2}$$

Sadeleştirme yapılır,

$$f'(x) = \frac{36x^3 + 90x^2 - 12x^3}{(2x+5)^2} = \frac{24x^3 + 90x^2}{(2x+5)^2} = \frac{6x^2(4x+15)}{(2x+5)^2}$$

Problem 9.13 ve 9.14'ü inceleyiniz; kuralın türevi için Problem 9.25'e bakınız.

9.7.7 Genelleştirilmiş Üslü Fonksiyon Kuralı

$g(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon, n reel bir sayı olmak üzere $f(x) = [g(x)]^n$ şeklindeki üslü bir fonksiyonun türevi, sırasıyla n üssü çarpı $g(x)$ fonksiyonunun $(n - 1)$. kuvvetinin ile fonksiyonun kendi türevi $g'(x)$'e çarpılmasına eşittir. Denklem olmak üzere,

$$f'(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x) \tag{9.5}$$

ÖRNEK 12. $f(x) = (x^2 + 8)^3$ olmak üzere $g(x) = x^2 + 8$ olsun ve $g(x)$ in türevi $= g'(x) = 2x$'dır. Bu değerler genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı formülü (*9.5*) de yerine yazılır,

$$f'(x) = 3(x^2 + 8)^{3-1} \cdot 2x$$

Sadeleştirme yapılır,

$$f'(x) = 6x(x^2 + 8)^2$$

Not: Genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı aşağıda gösterilen zincir kuralından türetilmiştir, fakat anlaşılması daha kolay olduğu için genellikle önce anlatılır. Problem 9.15 ve 9.16'ya bakınız.

9.7.8 Zincir Kuralı

Fonksiyonun fonksiyonu olarak da isimlendirilen bir *bileşke fonksiyon*da, y u'nun bir fonksiyonu ve u' da x'in bir fonksiyonudur, yani, $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ ise $y = f[g(x)]$ tir ve x'e göre y'nin türevi, ilk fonksiyonun u'ya göre türevi çarpı ikinci fonksiyonun x'e göre türevine eşittir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad (9.6)$$

Problem 9.17 ve 9.18'e bakınız.

ÖRNEK 13. $y = (4x^3 + 7)^5$ fonksiyonunu alalım. Zincir kuralı uygulanması için $y = u^5$ ve $u = 4x^3 + 7$ olsun. Sonra $dy/du = 5u^4$ ve $du/dx = 12x^2$'tır. Bu değerler (9.6)'da yerine yazılır,

$$\frac{dy}{dx} = 5u^4 \cdot 12x^2 = 60x^2u^4$$

Sonrasında tek bir değişken ile türevi ifade edebilmek için u yerine $(4x^3 + 7)$ yazılır.

$$\frac{dy}{dx} = 60x^2(4x^3 + 7)^4$$

Daha karmaşık fonksiyonlarda, kuralın farklı kombinasyonlarının kullanılması gerekir. Problem 9.19 ve 9.20'ye bakınız.

9.8 YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER

Birinci türev nasıl ki orijinal ya da *ilkel fonksiyon*un eğim ve değişim oranını hesaplarsa, $f''(x)$ şeklinde yazılan ikinci dereceden türev de birinci dereceden türevin eğim ve değişim oranını hesaplar. Üçüncü dereceden türev $[f'''(x)]$ ikinci dereceden türevin eğim ve değişim oranını hesaplar ve bu şekilde devam eder. Yüksek mertebeden türevler, Örnek 14'te gösterildiği ve Problem 9.21 ve 9.22'de çözüldüğü gibi daha düşük mertebeli türevlere türev alma kuralları uygulanarak bulunur.

ÖRNEK 14. $y = f(x)$ şeklinde verilen bir fonksiyonun genel olarak ikinci dereceden türevi $f''(x)$, y'', d^2y/dx^2, D^2y, üçüncü dereceden türevi $f'''(x)$, y''', d^3y/dx^3, D^3y, dördüncü dereceden türevi $f^4(x)$, $y^{(4)}$, d^4y/dx^4, D^4y devam ederek gösterilebilir.

Yüksek mertebede türevler, sırasıyla bir önceki türeve türev alma kuralının uygulanması ile bulunur. Yani, $f(x) = 5x^4 + 8x^3 + 7x^2$ ise,

$$f'(x) = 20x^3 + 24x^2 + 14x$$

$$f''(x) = 60x^2 + 48x + 14$$

$$f'''(x) = 120x + 48$$

$$f^{(4)}(x) = 120 \qquad f^{(5)}(x) = 0\text{'dir.}$$

Problem 9.21 ve 9.22'ye bakınız.

9.9 KAPALI FONKSİYONLAR

Türev alma kuralları şimdiye kadar açık fonksiyonlar için gösterildi. *Açık fonksiyon*, eşitliğin solunda bağımlı değişkenin, sağında ise bağımsız değişken ya da parametrenin olduğu fonksiyondur. Eşitlik işaretinin aynı tarafında her iki değişkenin de olabileceği *kapalı fonksiyonlara* nadiren de olsa rastlanır. Örnek 15'e bakınız; kapalı fonksiyonun türevinin alınması için ise Bölüm 13.11' e bakınız.

ÖRNEK 15. Açık ve kapalı fonksiyonlara dair örnekler:

Açık: $y = 9x$, $y = x^2 + 5x - 8$, $y = \dfrac{x^4 - 7x^3}{x^2 - 48}$ $(x \neq \pm\sqrt{48})$

Kapalı: $3x + 8y = 54$, $4x^2 - 7xy - 6y = 82$, $78x^5y^9 = 429$

Çözümlü Sorular

LİMİT VE SÜREKLİLİK

9.1. Aşağıdaki fonksiyonların limitlerini bulmak için limit kurallarını kullanınız.

(*a*) $\lim_{x\to 3}[x^4(x+5)]$ (Kural 5)

$$\lim_{x\to 3}[x^4(x+5)] = \lim_{x\to 3} x^4 \cdot \lim_{x\to 3}(x+5)$$
$$= (3)^4 \cdot (3+5) = 81 \cdot 8 = 648$$

(*b*) $\lim_{x\to 5}\frac{7x^2-9x}{x+8}$ (Kural 6)

$$\lim_{x\to 5}\frac{7x^2-9x}{x+8} = \frac{\lim_{x\to 5}(7x^2-9x)}{\lim_{x\to 5}(x+8)}$$
$$= \frac{7(5)^2-9(5)}{5+8} = \frac{175-45}{13} = 10$$

(*c*) $\lim_{x\to 4}\sqrt{2x^3-7}$ (Kural 7)

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{2x^3-7} = \lim_{x\to 4}(2x^3-7)^{1/2}$$
$$= \left[\lim_{x\to 4}(2x^3-7)\right]^{1/2}$$
$$= [2(4)^3-7]^{1/2} = (121)^{1/2} = 11$$

9.2. Aşağıdaki polinom ve rasyonel fonksiyonların limitini bulunuz.

(*a*) $\lim_{x\to 4}(3x^2-5x+9)$

Tanımlı bütün polinom fonksiyonların ve rasyonel fonksiyonların, limitin özelliklerinden dolayı $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ olduğu gösterilebilir. Böylece verilen a noktası için fonksiyon kolayca hesaplanarak limit alınabilir.

$$\lim_{x\to 4}(3x^2-5x+9) = 3(4)^2-5(4)+9 = 37$$

(*b*) $\lim_{x\to -3}(6x^2+8x-13)$

$$\lim_{x\to -3}(6x^2+8x-13) = 6(-3)^2+8(-3)-13 = 17$$

(*c*) $\lim_{x\to 8}\frac{2x^2-3x-9}{4x^2+29}$

$$\lim_{x\to 8}\frac{2x^2-3x-9}{4x^2+29} = \frac{2(8)^2-3(8)-9}{4(8)^2+29} = \frac{95}{285} = \frac{1}{3}$$

9.3. Paydanın limiti sıfıra eşit olacağı için yukarıda uygulanan Kural 6 ya da rasyonel fonksiyonlar için genelleştirilmiş kuralın limit hesaplanırken uygulanamayacağını göz önünde bulundurarak, aşağıdaki rasyonel fonksiyonların limitini bulunuz.

(*a*) $\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{x^2-81}$

Paydanın limiti sıfır olduğundan Kural 6 uygulanamaz. Ancak yalnızca fonksiyonda x'in 9'a *yaklaşması* ile ilgilendiğimiz için, limit çarpanlarına ayrılıp ve sadeleştirme yapılarak bulunabilir, paydadaki sıfır sorunu böylelikle çözülür.

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{x^2-81}=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x+9)(x-9)}$$
$$=\lim_{x\to 9}\frac{1}{x+9}=\frac{1}{18}$$

(*b*) $\lim_{x\to -9}\dfrac{x-9}{x^2-81}$

$$\lim_{x\to -9}\frac{x-9}{x^2-81}=\lim_{x\to -9}\frac{x-9}{(x+9)(x-9)}$$
$$=\lim_{x\to -9}\frac{1}{x+9}$$

Paydanın limitinin hala sıfır olduğu ve çarpanlarına da ayrılamayacağı için, limit yoktur.

(*c*) $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$

Paydanın limitinin sıfıra eşit olması nedeniyle çarpanlarına ayrılır.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+1)(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+1)=5$$

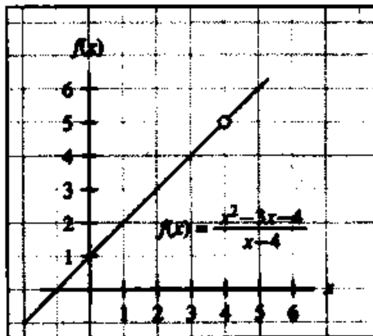
9.4. Aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz ve Problem 9.3. (c)'e göre grafiklerin önemini açıklayınız.

$$f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x-4}\qquad g(x)=x+1$$

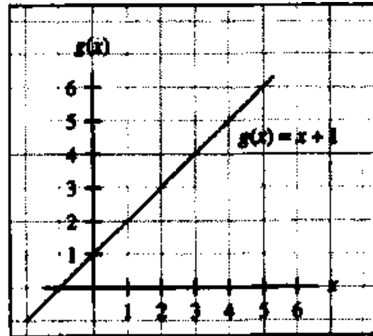
Şekil 9-7 (*a*) ve (*b*) grafiklerinden $f(x)$'in tanımlı olduğu her noktada $f(x)$ ve $g(x)$'in aynı olduğu açıktır. Bu Problem 9.3 (*c*)'deki çarpanlara ayırmanın doğruluğunu ortaya koyar ve

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+1)=5$$

olduğunu söylememizi sağlar.



(*a*)



(*b*)

Şekil 9-7

9.5. Belirsizlik durumuna dikkat ederek aşağıdaki fonksiyonların limitini bulunuz.

(*a*) $\lim_{x\to 0} \frac{2}{x}$ $(x \neq 0)$

Şekil 3-2'de görüldüğü gibi, x sağdan sıfıra yaklaşırken $[x \to 0^+]$, $f(x)$ artı sonsuza yaklaşır; x soldan sıfıra yaklaşırken $[x \to 0^-]$, $f(x)$ eksi sonsuza yaklaşır. Eğer bir limit hem pozitif hem de negatif sonsuza yaklaşıyorsa, limit yoktur ve

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x} = \infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x} = -\infty \qquad \text{limit yoktur}$$

şeklinde yazılır.

(*b*) $\lim_{x\to \infty} \frac{2}{x}$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x}$

Yine Şekil 3-2'de görüldüğü gibi, x ∞'a yaklaşırken, $f(x)$ 0'a yaklaşır; x, $-\infty$'a yaklaşırken, $f(x)$ yine 0'a yaklaşır. Her iki durumda da sıfır geçerli bir limit olduğu için limit vardır ve

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

şeklinde yazılır.

(*c*) $\lim_{x\to \infty} \frac{4x^2 - 9x}{5x^2 - 34}$

$x \to \infty$ iken hem payın hem de paydanın sonsuz olma durumu belirsizlik konusuna bırakılmıştır. Bütün terimlerin fonksiyonda bulunan x'in en yüksek kuvvetine bölünmesi ise bazı durumlarda kolay bir yoldur. Burada bütün terimlerin x^2'ye bölünmesi ile

$$\lim_{x\to \infty} \frac{4x^2 - 9x}{5x^2 - 34} = \lim_{x\to \infty} \frac{4 - (9/x)}{5 - (34/x^2)} = \frac{4 - (0)}{5 - (0)} = \frac{4}{5}$$

elde edilir.

9.6. Kısım 9.2'de de verilen aşağıdaki koşulların hepsinin belirli bir nokta için sağlanıp sağlanmadığını belirleyerek aşağıdaki fonksiyonların verilen noktalarda sürekli olup olmadığını gösteriniz: (1) $f(a)$ tanımlı, (2) $\lim_{x\to a} f(x)$ var ve (3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(*a*) $x = 5$ de $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$

(1) $f(5) = 3(5)^2 - 7(5) + 4 = 44$

(2) $\lim_{x\to 5} 3x^2 - 7x + 4 = 3(5)^2 - 7(5) + 4 = 44$

(3) $\lim_{x\to 5} f(x) = 44 = f(5)$ $f(x)$ süreklidir.

(*b*) $x = 3$'te $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 26}{x - 4}$

(1) $f(3) = \frac{(3)^2 + 5(3) + 26}{(3) - 4} = \frac{50}{-1} = -50$

(2) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + 5x + 26}{x - 4} = -50$

(3) $\lim_{x\to 3} f(x) = -50 = f(3)$ $f(x)$ **süreklidir.**

(*c*) $x = 2$'de $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

(1) $f(2) = \frac{2 - 2}{(2)^2 - 4}$

Payda sıfıra eşit olduğundan $x = 2$'de $f(x)$ tanımlı değildir ve bu yüzden $x = 2$'de limit olmasına rağmen fonksiyon sürekli değildir. $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{4}$

TÜREV GÖSTERİMİ VE BASİT TÜREVLER

9.7. Aşağıdaki her bir fonksiyonun türevini alınız ve türev için farklı gösterimleri kullanarak alıştırma yapınız.

(*a*) $f(x) = 29$
$f'(x) = 0$ (sabit kuralı)

(*b*) $y = -18$
$\frac{dy}{dx} = 0$

(*c*) $y = 6x + 13$
$y' = 6$ (doğrusal fonksiyon kuralı)

(*d*) $f(x) = -7x + 2$
$f' = -7$

9.8. Üslü fonksiyon kuralı kullanarak aşağıdaki fonksiyonların türevlerini alınız. Farklı türev gösterimleri kullanmaya devam ediniz.

(*a*) $y = 9x^4$

$$\frac{d}{dx}(9x^4) = 36x^3$$

(*b*) $f(x) = -5x^3$

$$f' = -15x^2$$

(*c*) $f(x) = 7x^{-2}$

$$f'(x) = 7(-2) \cdot x^{[-2-(1)]} = -14x^{-3} = -\frac{14}{x^3}$$

(*d*) $y = -8x^{-3}$

$$\frac{dy}{dx} = -8(-3) \cdot x^{[-3-(1)]} = 24x^{-4} = \frac{24}{x^4}$$

(*e*) $y = \frac{6}{x} = 6x^{-1}$

$$D_x(6x^{-1}) = 6(-1)x^{-2} = -6x^{-2} = -\frac{6}{x^2}$$

(*f*) $f(x) = 42\sqrt{x} = 42x^{1/2}$

$$\frac{df}{dx} = 42\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x^{[1/2-1]} = 21x^{-1/2} = \frac{21}{\sqrt{x}}$$

9.9. Aşağıdaki fonksiyonların türevini alırken toplam ve fark türev alma kuralını kullanınız. Bağımlı değişken *y* gibi solda ve bağımsız değişken *x* gibi sağda olmak üzere işlem yapınız.

(*a*) $R = 9t^2 + 7t - 4$

$$\frac{dR}{dt} = 18t + 7$$

(*b*) $C = 5t^3 - 8t^2 + 36t + 79$

$$C' = 15t^2 - 16t + 36$$

(*c*) $p = 6q^4 - 2q^3$

$$\frac{dp}{dq} = 24q^3 - 6q^2$$

(*d*) $q = 5p^3 + 16p^{-2}$

$$D_p(5p^3 + 16p^{-2}) = 15p^2 - 32p^{-3}$$

ÇARPMA KURALI

9.10. $y = f(x) = 6x^3(4x - 9)$ olmak üzere, (*a*) türevini bulmak için çarpım kuralını kullanınız. (*b*) Öncelikle orijinal fonksiyonu düzenleyip sonra türevini alınız. (*c*) Bulduğunuz iki türevi karşılaştırınız.

(*a*) (*9.3*)' teki çarpım kuralı formülünü hatırlayalım,

$$f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

$g(x) = 6x^3$ ve $h(x) = 4x - 9$ olsun. Sonrasında $g'(x) = 18x^2$ ve $h'(x) = 4$'tir. Bu değerler çarpım kuralı formülünde yerine yazalır,

$$y' = f'(x) = 6x^3(4) + (4x - 9)(18x^2)$$

Matematiksel olarak düzenlenir,

$$y' = 24x^3 + 72x^3 - 162x^2 = 96x^3 - 162x^2$$

(*b*) Orijinal fonksiyondaki çarpma işlemi dağıtılır,

$$y = 6x^3(4x - 9) = 24x^4 - 54x^3$$

Türev alınır,

$$y' = 96x^3 - 162x^2$$

(*c*), (*a*) ve (*b*) şıklarında bulunan türevler aynıdır. Çarpımın türevi diğer metot yardımıyla da bulunabilir, fakat fonksiyonlar daha karmaşık hale geldiğinde çarpım kuralı daha kullanışlıdır. Başka bir metodun bilgisi, cevapları kontrol etmeye yardımcı olur.

9.11. $y = f(x) = (x^6 + 4)\,(x^3 + 15)$ olmak üzere Problem 9.10'u tekrar çözünüz.

(*a*) $g(x) = x^6 + 4$ ve $h(x) = x^3 + 15$ olsun. Sonra $g'(x) = 6x^5$ ve $h'(x) = 3x^2$ dir. Bu değerler (*9.3*)'te yerine yazılır,

$$y' = f'(x) = (x^6 + 4)(3x^2) + (x^3 + 15)(6x^5)$$
$$y' = 3x^8 + 12x^2 + 6x^8 + 90x^5 = 9x^8 + 90x^5 + 12x^2$$

(*b*) Öncelikle çarpma işlemini düzenlenir,

$$y = (x^6 + 4)(x^3 + 15) = x^9 + 15x^6 + 4x^3 + 60$$

Sonra,

$$y' = 9x^8 + 90x^5 + 12x^2$$

(*c*) Türevler tabi ki aynıdır.

9.12. Çarpım kuralı kullanarak aşağıdaki her fonksiyonun türevini alınız.

Not: Kitabın bu ve diğer bölümlerinde öğrencilerin çeşitli kuralların işleyişini görmelerini kolaylaştırmak için seçilen problemlerin temel düzeyde tutulması amaçlanmıştır. Türev alınmadan önce bir fonksiyonun matematiksel olarak düzenlenmesi daha uygun ve sıkça daha kolay olduğu halde, verilen problemlerde kuralların uygulanması zamanla öğrencilerin kuralları daha etkili öğrenmelerine yardımcı olacaktır.

(*a*) $y = 7x^4(4x^2 - 10)$

$$\frac{dy}{dx} = 7x^4(8x) + (4x^2 - 10)(28x^3)$$
$$\frac{dy}{dx} = 56x^5 + 112x^5 - 280x^3 = 168x^5 - 280x^3$$

(*b*) $f(x) = (4x^3 + 1)(6x^5)$

$$\frac{df}{dx} = (4x^3 + 1)(30x^4) + 6x^5(12x^2)$$
$$\frac{df}{dx} = 120x^7 + 30x^4 + 72x^7 = 192x^7 + 30x^4$$

(*c*) $y = (5x^4 + 6)(2x^5 - 8)$

$$y' = (5x^4 + 6)(10x^4) + (2x^5 - 8)(20x^3)$$
$$y' = 50x^8 + 60x^4 + 40x^8 - 160x^3 = 90x^8 + 60x^4 - 160x^3$$

(*d*) $f(x) = (4 - 6x^5)(3 + 2x^8)$

$$f' = (4 - 6x^5)(16x^7) + (3 + 2x^8)(-30x^4)$$
$$f' = 64x^7 - 96x^{12} - 90x^4 - 60x^{12} = -156x^{12} + 64x^7 - 90x^4$$

BÖLME KURALI

9.13. $f(x) = \dfrac{18x^5 - 9x^4}{3x}$ $(x \neq 0)$ olmak üzere,

(*a*) Bölme kuralı kullanarak türevi direkt bulunuz. (*b*) Fonksiyonu bölerek sadeleştiriniz ve sonra türevini alınız. (*c*) İki türevi karşılaştırınız.

(*a*) Bölme kuralı formülü (*9.4*), $g(x)$ = pay = $18x^5 - 9x^4$ ve $h(x)$ = payda = $3x$ olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Ayrı ayrı türevler alınır,

$$g'(x) = 90x^4 - 36x^3 \qquad h'(x) = 3$$

Formülde yerine yazılır,

$$f'(x) = \frac{3x(90x^4 - 36x^3) - (18x^5 - 9x^4)(3)}{(3x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{270x^5 - 108x^4 - 54x^5 + 27x^4}{9x^2} = \frac{216x^5 - 81x^4}{9x^2}$$

$$f'(x) = 24x^3 - 9x^2 = 3x^2(8x - 3)$$

(*b*) Öncelikle orijinal fonksiyondaki bölme işlemi ile sadeleştirilir,

$$f(x) = \frac{18x^5 - 9x^4}{3x} = 6x^4 - 3x^3$$

$$f'(x) = 24x^3 - 9x^2$$

(*c*) Eğer işlemler doğru yapıldıysa türevler daima aynı olacaktır, fakat fonksiyon karmaşıklaştıkça bölme kuralı daha önemli hale gelir. İkinci metot da cevabı kontrol etmenin bir yoludur.

9.14. Bölme kuralı yardımıyla aşağıdaki fonksiyonların türevini alınız. Verilen fonksiyonlar için kuralları uygulamaya devam ediniz. Bütün kuralları iyice öğrendikten sonra, fonksiyonlar öncelikle düzenlenip en kolay kural uygulanabilir.

(*a*) $y = \dfrac{9x^7 - 8x^6}{5x^4}$ $(x \neq 0)$

Burada $g(x) = 9x^7 - 8x^6$ ve $h(x) = h(x) = 5x^4$ dır. Böylece, $g'(x) = 63x^6 - 48x^5$ ve $h'(x) = 20x^3$ tür. Bölme formülünde yerine yazıldığında,

$$y' = \frac{5x^4(63x^6 - 48x^5) - (9x^7 - 8x^6)(20x^3)}{(5x^4)^2}$$

$$y' = \frac{315x^{10} - 240x^9 - 180x^{10} + 160x^9}{25x^8} = \frac{135x^{10} - 80x^9}{25x^8} = 5.4x^2 - 3.2x$$

(*b*) $y = \dfrac{6x^8}{1 - 4x}$ $\left(x \neq \dfrac{1}{4}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - 4x)(48x^7) - 6x^8(-4)}{(1 - 4x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{48x^7 - 192x^8 + 24x^8}{(1 - 4x)^2} = \frac{48x^7 - 168x^8}{(1 - 4x)^2}$$

(*c*) $f(x) = \dfrac{10x^3}{4x^2 + 9x - 2} \qquad \left(x \neq \dfrac{-9 \pm \sqrt{113}}{8}\right)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{(4x^2 + 9x - 2)(30x^2) - 10x^3(8x + 9)}{(4x^2 + 9x - 2)^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{120x^4 + 270x^3 - 60x^2 - 80x^4 - 90x^3}{(4x^2 + 9x - 2)^2} = \frac{40x^4 + 180x^3 - 60x^2}{(4x^2 + 9x - 2)^2}$$

(*d*) $f = \dfrac{5x - 4}{9x + 2} \qquad \left(x \neq -\dfrac{2}{9}\right)$

$$f' = \frac{(9x + 2)(5) - (5x - 4)(9)}{(9x + 2)^2}$$

$$f' = \frac{45x + 10 - 45x + 36}{(9x + 2)^2} = \frac{46}{(9x + 2)^2}$$

(*e*) $y = \dfrac{4x^2 + 7x - 9}{3x^2 - 5} \qquad \left(x \neq \pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2 - 5)(8x + 7) - (4x^2 + 7x - 9)(6x)}{(3x^2 - 5)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{24x^3 + 21x^2 - 40x - 35 - 24x^3 - 42x^2 + 54x}{(3x^2 - 5)^2} = \frac{-21x^2 + 14x - 35}{(3x^2 - 5)^2}$$

GENELLEŞTİRİLMİŞ ÜSLÜ FONKSİYON KURALI

9.15. $f(x) = (6x + 7)^2$ olmak üzere, (*a*) genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kullanarak türevini bulunuz. (*b*) Fonksiyonun karesi alınıp önce düzenlendikten sonra türevini alınız. (*c*) Cevapları karşılaştırınız.

(*a*) $f(x) = [g(x)]^n$ ise $f'(x) = n\,[g(x)]^{n-1} g'(x)$ olmak üzere, (*9.5*)'te genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralından,

$$f'(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

elde ederiz. Burada $g(x) = 6x + 7$, $g'(x) = 6$ ve $n = 2$'dir. Bu değerler genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralında yerine yazılır,

$$f'(x) = 2(6x + 7)^{2-1} \cdot 6 = 12(6x + 7) = 72x + 84$$

(*b*) Öncelikle fonksiyonun karesi alınır ve sonra türevi alınır,

$$f(x) = (6x + 7)(6x + 7) = 36x^2 + 84x + 49$$

$$f'(x) = 72x + 84$$

(*c*) Türevler aynıdır. Fakat n'nin daha büyük, negatif ve kesirli değerleri için genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı daha hızlı ve pratik bir yoldur.

9.16. Genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı yardımıyla aşağıda verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz.

(*a*) $y = (3x^3 + 8)^5$

Burada $g(x) = 3x^3 + 8$ $g'(x) = 9x^2$ ve $n = 5$'tir. Bu değerler genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralında yerine yazılır,

$$y' = 5(3x^3 + 8)^{5-1} \cdot 9x^2$$

$$y' = 5(3x^3 + 8)^4 \cdot 9x^2 = 45x^2(3x^3 + 8)^4$$

(*b*) $y = (3x^3 - 5x + 9)^4$

$$y' = 4(3x^2 - 5x + 9)^3 \cdot (6x - 5)$$

$$y' = (24x - 20)(3x^2 - 5x + 9)^3$$

(*c*) $y = \dfrac{1}{9x^3 + 11x + 4}$

Öncelikle fonksiyon daha kolay denk bir forma dönüştürülür,

$$y = (9x^3 + 11x + 4)^{-1}$$

Sonra genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kullanılır,

$$y' = -1(9x^3 + 11x + 4)^{-2} \cdot (27x^2 + 11)$$

$$y' = -(27x^2 + 11)(9x^3 + 11x + 4)^{-2}$$

$$y' = \frac{-(27x^2 + 11)}{(9x^3 + 11x + 4)^2}$$

(*d*) $y = \sqrt{21 - 4x^3}$

Köklü fonksiyon üslü bir fonksiyona dönüştürülür, sonra türevini alınır,

$$y = (21 - 4x^3)^{1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2}(21 - 4x^3)^{-1/2} \cdot (-12x^2)$$

$$y' = -6x^2(21 - 4x^3)^{-1/2} = \frac{-6x^2}{\sqrt{21 - 4x^3}}$$

(*e*) $y = \dfrac{1}{\sqrt{7x^2 + 66}}$

Denk bir forma dönüştürülür, sonra türevi alınır,

$$y = (7x^2 + 66)^{-1/2}$$

$$y' = -\frac{1}{2}(7x^2 + 66)^{-3/2} \cdot (14x) = -7x(7x^2 + 66)^{-3/2} = \frac{-7x}{(7x^2 + 66)^{3/2}} = \frac{-7x}{\sqrt{(7x^2 + 66)^3}}$$

ZİNCİR KURALI

9.17. Aşağıdaki her bir fonksiyonun fonksiyonu için dy/dx türevini zincir kuralı kullanarak bulunuz. Genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralının basit özelleştirilmiş bir zincir kuralı olduğunu dikkate alarak, cevaplarınızı genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı ile bulunan cevaplarla kontrol ediniz.

(*a*) $y = (2x^5 + 9)^7$

$y = u^7$ ve $u = 2x^5 + 9$ olsun. Sonra $dy/du = 7u^6$ ve $du/dx = 10x^4$ tür. (*9.6*)'da zincir kuralından,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Yerine yazılır,

$$\frac{dy}{dx} = 7u^6 \cdot 10x^4 = 70x^4u^6$$

Fakat $u = 2x^5 + 9$. Tekrar yerine yazılır,

$$\frac{dy}{dx} = 70x^4(2x^5 + 9)^6$$

(*b*) $y = (6x + 1)^2$

$y = u^2$ ve $u = 6x + 1$ olsun, sonra $dy/du = 2u$ ve $du/dx = 6$'dir. Bu değerler zincir kuralında yerine yazılır,

$$\frac{dy}{dx} = 2u \cdot 6 = 12u$$

Sonra u için $(6x + 1)$ yerine yazılır,

$$\frac{dy}{dx} = 12(6x + 1) = 72x + 12$$

(c) $y = (7x^3 - 4)^5$

$y = u^5$ ve $4 = 7x^3 - 4$ olsun; sonra $dy/du = 454$, $du/dx = 21x^2$ ve

$$\frac{dy}{dx} = 5u^4 \cdot 21x^2 = 105x^2u^4\text{'dir.}$$

$(7x^3 - 4)$ yerine yazılır,

$$\frac{dy}{dx} = 105x^2(7x^3 - 4)^4$$

9.18. Verilen fonksiyonlar için Problem 9.17'yi tekrar çözünüz.

(a) $y = (x^2 + 5x - 8)^6$

$y = u^6$ ve $u = x^2 + 5x - 8$ olsun, sonra $dy/du = 645$, $du/dx = 2x + 5$'tir. (*9.6*)'da yerine yazılır,

$$\frac{dy}{dx} = 6u^5(2x + 5) = (12x + 30)u^5$$

Fakat $u = x^2 + 5x - 8$'dır. Böylece yerine yazıldığında,

$$\frac{dy}{dx} = (12x + 30)(x^2 + 5x - 8)^5$$

(b) $y = -4(x^2 - 3x + 9)^5$

$y = -4u^5$ ve $u = x^2 - 3x + 9$ olsun. Sonra $dy/du = -20u^4$ ve $du/dx = 2x - 3$ ve

$$\frac{dy}{dx} = -20u^4(2x - 3) = (-40x + 60)u^4$$

$$\frac{dy}{dx} = (-40x + 60)(x^2 - 3x + 9)^4$$

KURALLARIN KOMBİNASYONU

9.19. Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulmak için gerekli kural kombinasyonlarını kullanınız. Öncelikle orijinal fonksiyonları sadeleştirmeyiniz. Kuralların uygulamalarını kolaylaştırmak için fonksiyonlar kasten basit tutulmuştur.

(a) $y = \dfrac{4x(3x - 1)}{2x - 5} \qquad \left(x \neq \dfrac{5}{2}\right)$

Fonksiyon paydaki çarpma işlemi ile birlikte bölme işleminden oluşur. Dolayısıyla bölme kuralı da çarpma kuralı da gereklidir. (*9.4*) bölme kuralı ile başlanır, $g(x) = 4x(3x - 1)$, $h(x) = 2x - 5$ ve $h'(x) = 2$ olmak üzere

$$y' = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Y nin türevi

Sonra $g'(x)$ için (*9.3*) çarpma kuralı kullanılır,

$$g'(x) = 4x \cdot 3 + (3x - 1) \cdot 4 = 24x - 4$$

Bölme kuralında uygun değerler yerine yazılır,

$$y' = \frac{(2x - 5)(24x - 4) - [4x(3x - 1)] \cdot 2}{(2x - 5)^2}$$

Matematiksel olarak düzenlenir,

$$y' = \frac{48x^2 - 8x - 120x + 20 - 24x^2 + 8x}{(2x - 5)^2} = \frac{24x^2 - 120x + 20}{(2x - 5)^2}\text{'dir.}$$

Not: Bu cevabı diğerleri arasında kontrol edilebilmek için,

$$y = 4x \cdot \frac{3x-1}{2x-5} \qquad \text{veya} \qquad y = \frac{4x}{2x-5} \cdot (3x-1)$$

ve bölüm içeren çarpma kuralı kullanınız.

(*b*) $y = 5x(3x-4)^2$

Fonksiyon üslü bir fonksiyon ile bir çarpma işleminden oluşur. Bu yüzden hem çarpma kuralı hem de genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kullanılır. Çarpma kuralı ile başlanır, $g(x) = 5x$, $h(x) = (3x-4)^2$ ve $g'(x) = 5$ olmak üzere

$$y' = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

$h'(x)$ için genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kullanılır,

$$h'(x) = 2(3x-4) \cdot 3 = 6(3x-4) = 18x - 24$$

Çarpma kuralında uygun değerler yerine yazılır,

$$y' = 5x \cdot (18x-24) + (3x-4)^2 \cdot (5)$$

ve matematiksel olarak düzenlenir,

$$y' = 90x^2 - 120x + 5(9x^2 - 24x + 16) = 135x^2 - 240x + 80$$

(*c*) $y = (2x-7) \cdot \dfrac{4x+1}{3x+5} \qquad \left(x \neq -\dfrac{5}{3}\right)$

Burada bölüm içeren bir çarpma vardır. Hem çarpma hem de bölüm kuralları gereklidir. Çarpma kuralı ile başlanır,

$$y' = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

$g(x) = 2x - 7$, $h(x) = (4x+1)/(3x+5)$, $g'(x) = 2$ olmak üzere, ve $h'(x)$ için bölüm kuralı kullanılır,

$$h'(x) = \frac{(3x+5)(4) - (4x+1)(3)}{(3x+5)^2} = \frac{17}{(3x+5)^2}$$

Çarpma kuralında uygun değerler yerine yazılır,

$$y' = (2x-7) \cdot \frac{17}{(3x+5)^2} + \frac{4x+1}{3x+5} \cdot 2 = \frac{34x-119}{(3x+5)^2} + \frac{8x+2}{3x+5}$$

$$y' = \frac{34x - 119 + (8x+2)(3x+5)}{(3x+5)^2} = \frac{24x^2 + 80x - 109}{(3x+5)^2}$$

$y = [(2x-7)(4x+1))]/(3x+5)$ olarak alınsın ve bir çarpma işlemi bulunduran bölme kuralı kullanılarak, bu cevap kolayca kontrol edilebilir.

(*d*) $y = \dfrac{(7x-3)^4}{(5x+9)} \qquad \left(x \neq -\dfrac{9}{5}\right)$

Bölme kuralı ile başlarsak, $g(x) = (7x-3)4$ ve $h(x) = 5x + 9$, $h'(x) = 5$ olmak üzere, ve $g'(x)$ için genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kullanılır,

$$g'(x) = 4(7x-3)^3 \cdot 7 = 28(7x-3)^3$$

Bölme kuralında bu değerler yerine yazılır,

$$y' = \frac{(5x+9) \cdot 28(7x-3)^3 - (7x-3)^4 \cdot 5}{(5x+9)^2}$$

$$y' = \frac{(140x+252)(7x-3)^3 - 5(7x-3)^4}{(5x+9)^2}$$

Bu cevabı $y = (7x-3)^4 \cdot (5x+9)^{-1}$ için kontrol ediniz ve iki kez genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kapsayacak şekilde çarpma kuralı kullanınız.

(*e*) $y = \left(\frac{5x+4}{3x+2}\right)^2 \quad \left(x \neq -\frac{2}{3}\right)$

Genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı ile başlanır,

$$y' = 2\left(\frac{5x+4}{3x+2}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{5x+4}{3x+2}\right) \qquad (9.7)$$

Sonra bölüm kuralı kullanılır,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5x+4}{3x+2}\right) = \frac{(3x+2)(5)-(5x+4)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{-2}{(3x+2)^2}$$

ve bu değerler (*9.7*) de yerine yazılır,

$$y' = 2\left(\frac{5x+4}{3x+2}\right) \cdot \frac{-2}{(3x+2)^2} = \frac{-4(5x+4)}{(3x+2)^3} = \frac{-20x-16}{(3x+2)^3}$$

Bu cevabı $y = (5x+4)^2 \cdot (3x+2)^{-2}$ için kontrol ediniz ve iki kez genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kapsayacak şekilde çarpma kuralı kullanınız.

9.20. Gerekli kuralları kullanarak aşağıdaki fonksiyonların türevini alınız:

(*a*) $y = \frac{(4x^2-7)(6x+5)}{3x} \quad (x \neq 0)$

Bölme ve çarpma kuralı kullanılır,

$$y' = \frac{3x[(4x^2-7)(6)+(6x+5)(8x)]-(4x^2-7)(6x+5)(3)}{(3x)^2}$$

Matematiksel olarak düzenlenir,

$$y' = \frac{3x[24x^2-42+48x^2+40x]-3[24x^3+20x^2-42x-35]}{9x^2}$$

$$y' = \frac{144x^3+60x^2+105}{9x^2}$$

(*b*) $f(x) = (9x+4)(2x-7)^4$

Çarpma kuralı ve genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kullanılır,

$$f' = (9x+4)[4(2x-7)^3(2)] + (2x-7)^4(9)$$

Matematiksel olarak düzenlenir,

$$f' = (9x+4)(8)(2x-7)^3 + 9(2x-7)^4$$

$$f' = (72x+32)(2x-7)^3 + 9(2x-7)^4$$

(*c*) $y = \frac{12x+7}{(5x+2)^2} \quad \left(x \neq -\frac{5}{2}\right)$

Bölme kuralı ve genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kullanılır,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5x+2)^2(12)-(12x+7)[2(5x+2)(5)]}{(5x+2)^4}$$

Matematiksel olarak düzenlenir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12(5x+2)^2-(12x+7)(50x+20)}{(5x+2)^4} = \frac{-300x^2-350x-92}{(5x+2)^4}$$

(*d*) $f(x) = \left(\frac{4x-5}{3x+1}\right)^2 \quad \left(x \neq -\frac{1}{3}\right)$

Genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı ve bölüm kuralı kullanılır,

$$\frac{df}{dx} = 2\left(\frac{4x-5}{3x+1}\right)\frac{(3x+1)(4)-(4x-5)(3)}{(3x+1)^2}$$

Matematiksel olarak düzenlenir,

$$\frac{df}{dx} = 2\left(\frac{4x-5}{3x+1}\right)\frac{19}{(3x+1)^2} = \frac{152x-190}{(3x+1)^3}$$

(*e*) $y = (5x+6)\dfrac{3x}{8x-1} \qquad \left(x \neq -\dfrac{1}{8}\right)$

Çarpma kuralı ve bölme kuralı kullanılır,

$$D_y = (5x+6)\frac{(8x-1)(3)-3x(8)}{(8x-1)^2} + \frac{3x}{8x-1}(5)$$

Matematiksel olarak düzenlenir,

$$D_y = (5x+6)\frac{(24x-3-24x)}{(8x-1)^2} + \frac{15x}{8x-1}$$

İki terim $(8x-1)^2$ ortak paydası kullanılarak toplanır,

$$D_y = \frac{120x^2-30x-18}{(8x-1)^2}$$

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER

9.21. Aşağıdaki fonksiyonların, (1) İkinci dereceden türevlerini bulunuz ve (2) $x = 3$ için hesaplayınız. İkinci dereceden türevlerin farklı gösterimlerini kullanarak alıştırma yapınız.

(*a*) $y = 10x^3 + 8x^2 + 19$

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 30x^2 + 16x$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 60x + 16$

(2) $x = 3$ de,

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 60(3) + 16 = 196$

(*b*) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 6x$

(1) $f'(x) = 12x^3 + 15x^2 + 6$

$f''(x) = 36x^2 + 30x$

(2) $x = 3$ de,

$f''(3) = 36(3)^2 + 30(3) = 414$

(*c*) $f(x) = (4x-1)(3x^2+2)$

(1) $f' = (4x-1)(6x) + (3x^2+2)(4)$

$f' = 24x^2 - 6x + 12x^2 + 8$

$f' = 36x^2 - 6x + 8$

$f'' = 72x - 6$

(2) $x = 3$ de,

$f''(3) = 72(3) - 6$

$f''(3) = 210$

(*d*) $y = \dfrac{3x}{2x-1} \quad (x \neq \frac{1}{2})$

(1) $y' = \dfrac{(2x-1)(3) - 3x(2)}{(2x-1)^2}$

$y' = \dfrac{-3}{(2x-1)^2}$

$y'' = \dfrac{(2x-1)^2(0) - (-3)[2(2x-1)(2)]}{(2x-1)^4}$

$y'' = \dfrac{24x - 12}{(2x-1)^4}$

(2) $y''(3) = \dfrac{24(3) - 12}{[2(3) - 1]^4}$

$y''(3) = \dfrac{60}{625} = \dfrac{12}{125}$

(*e*) $f(x) = (6x-5)^3$

(1) $f' = 3(6x-5)^2(6)$

$f' = 18(6x-5)^2$

$f'' = 18[2(6x-5)(6)] = 216(6x-5)$

(2) $f''(3) = 216[6(3) - 5]$

$f''(3) = 216(13) = 2808$

9.22. Aşağıdaki fonksiyonların (1) ardışık türevlerini inceleyiniz ve (2) $x = 2$ için hesaplayınız.

(*a*) $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 9x - 2$

(1) $f'(x) = 6x^2 + 14x + 9$

$f''(x) = 12x + 14$

$f'''(x) = 12$

$f^{(4)}(x) = 0$

(2) $f'(2) = 6(2)^2 + 14(2) + 9 = 61$

$f''(2) = 12(2) + 14 = 38$

$f'''(2) = 12$

$f^{(4)}(2) = 0$

(*b*) $y = (6x+7)(3x-8)$

(1) $y' = (6x+7)(3) + (3x-8)(6)$

$y' = 36x - 27$

$y'' = 36$

$y''' = 0$

(2) $y'(2) = 36(2) - 27$

$y'(2) = 45$

$y''(2) = 36$

$y'''(2) = 0$

(*c*) $f(x) = (8-x)^4$

(1) $D_x = 4(8-x)^3(-1) = -4(8-x)^3$

$D_x^2 = -12(8-x)^2(-1) = 12(8-x)^2$

$D_x^3 = 24(8-x)(-1) = -24(8-x)$

$D_x^4 = -24(-1) = 24$

$D_x^5 = 0$

(2) $D_x(2) = -4(6)^3 = -864$

$D_x^2(2) = 12(6)^2 = 432$

$D_x^3(2) = -24(6) = -144$

$D_x^4(2) = 24$

$D_x^5(2) = 0$

TÜREV ALMA KURALLARININ ELDE EDİLMESİ

9.23. $g(x)$ ve $h(x)$ türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere verilen $f(x) = g(x) + h(x)$ için $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ ile ifade edilen toplam kuralını ispatlayalım.

$f(x)$'in türevi (*9.2*) den

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{dir.}$$

$f(x) = g(x) + h(x)$ yerine yazılır,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x + \Delta x) + h(x + \Delta x)] - [g(x) + h(x)]}{\Delta x}$$

Terimler yeniden düzenlenir,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x) + h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

Terimler ayrılıp ve limiti alınır,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

9.24. $g'(x)$ ve $h'(x)$ var ve $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ olmak üzere, $f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$ ile gösterilen çarpma kuralını ispatlayalım.

$f(x)$'in türevi (*9.2*) den

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{dir.}$$

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ yerine yazılır,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) \cdot h(x + \Delta x) - g(x) \cdot h(x)}{\Delta x}$$

$g(x + \Delta x)$. $h(x)$ eklenip çıkarılır,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x)h(x + \Delta x) - g(x + \Delta x)h(x) + g(x + \Delta x)h(x) - g(x)h(x)}{\Delta x}$$

$g(x + \Delta x)$ ve $h(x)$ parantezine alınır,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x)[h(x + \Delta x) - h(x)] + h(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x)[h(x + \Delta x) - h(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} h(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

9.25. $g'(x)$ ve $h'(x)$ var ve $h(x) \neq 0$ ve $f(x) = g(x)/h(x)$ olmak üzere, denklem ile gösterilen bölme kuralını ispatlayalım.

$$f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$f(x) = g(x)/h(x)$ ile başlayıp $g(x)$ için çözüm yapılır,

$$g(x) = f(x) \cdot h(x)$$

Sonra $g(x)$ in çarpma kuralı kullanılarak türevi alınır,

$$g'(x) = f(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot f'(x)$$

ve $f'(x)$ için çözüm yapılır.

$$h(x) \cdot f'(x) = g'(x) - f(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) - f(x) \cdot h'(x)}{h(x)}$$

$f(x)$ için $g(x)/h(x)$ i yerine yazılır,

$$f'(x) = \frac{g'(x) - [g(x) \cdot h'(x)/h(x)]}{h(x)}$$

Ve pay ile paydayı $h(x)$ ile çarpılır,

$$f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Ek Problemler

LİMİT

9.26. Aşağıdaki fonksiyonların limitini bulunuz:

(*a*) $\lim_{x \to 6} (5x^2 - 2x - 18)$ (*b*) $\lim_{x \to -3} (4x^2 + 9x - 5)$

(*c*) $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 4x + 6}{2x^2 + 8x - 15}$ (*d*) $\lim_{x \to -4} \frac{7x^2 - 12}{8x^2 + 3x + 4}$

(*e*) $\lim_{x \to 5} \sqrt{x^3 + 9x - 1}$ (*f*) $\lim_{x \to -9} \sqrt[3]{2x^2 + 5x + 8}$

9.27. Aşağıda paydanın limiti sıfıra yaklaşan fonksiyonların her birinin limitini bulunuz.

(*a*) $\lim_{x \to -12} \frac{x + 12}{x^2 - 144}$ (*b*) $\lim_{x \to 7} \frac{x - 7}{2x^2 - 98}$

(*c*) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 11x + 30}{x - 5}$ (*d*) $\lim_{x \to 8} \frac{x^2 + 7x - 120}{x - 8}$

9.28. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin limitini bulunuz.

(*a*) $\lim_{x \to \infty} \frac{7x - 22}{21x + 8}$ (*b*) $\lim_{x \to \infty} \frac{8x^2 - 49}{3x^3 + 16}$

(*c*) $\lim_{x \to \infty} \frac{9x^2 - 4x + 2}{4x^2 + 6x - 7}$ (*d*) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 9}{x^3 + 8}$

TÜREV

9.29. Aşağıdaki fonksiyonların birinci türevini bulunuz.

(*a*) $y = 6x^5$ (*b*) $f(x) = 2x + 9$ (*c*) $f(x) = 17$

(*d*) $y = 8x^3 + 4x^2 + 9x + 3$ (*e*) $y = 6x^{-4}$ (*f*) $f(x) = -7x^{-2}$

(*g*) $y = 18x^{1/3}$ (*h*) $f(x) = 5x^{-1/2}$

Bu bölümde verilen geri kalan fonksiyonlara türev almanın temel kurallarını daha iyi öğrenmeyi kolaylaştırmak için, önce matematiksel düzenleme yapmaksızın verildiği haliyle uygun kural veya kurallar uygulayınız.

ÇARPMA KURALI

9.30. Aşağıdaki fonksiyonların türevini almak için çarpma kuralı kullanınız:

(a) $f(x) = (8x - 9)(4x^5)$ (b) $f(x) = 12x^3(7x + 3)$

(c) $y = (6x^2 + 11)(9x^3 - 4)$ (d) $y = (15 - 8x^4)(6x^6 - 5)$

BÖLME KURALI

9.31. Aşağıdaki fonksiyonların bölme kuralı kullanarak türevlerini alınız:

(a) $y = \dfrac{22x^4 - 15}{8x - 1}$ (b) $y = \dfrac{8x^6}{3x + 5}$

(c) $y = \dfrac{5x^3}{6x^2 - 7x + 2}$ (d) $y = \dfrac{8x^2 + 3x - 9}{7x^2 - 4}$

GENELLEŞTİRİLMİŞ ÜSLÜ FONKSİYON KURALI

9.32. Aşağıdaki fonksiyonların türevini almak için genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kullanınız:

(a) $f(x) = (9x - 4)^5$ (b) $f(x) = (7x^3 + 6)^4$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{(3x^2 - 11)^2} = (3x^2 - 11)^{-2}$

(d) $f(x) = \dfrac{-50}{6x^2 - 4x - 9} = -50(6x^2 - 4x - 9)^{-1}$

(e) $f(x) = \sqrt{14x^4 - 45} = (14x^4 - 45)^{1/2}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{22 - 9x^6}} = (22 - 9x^6)^{-1/2}$

ZİNCİR KURALI

9.33. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin birinci mertebeden türevini zincir kuralı kullanarak bulunuz:

(a) $y = (6x^4 - 35)^8$ (b) $y = (27 - 8x^3)^5$

(c) $f(x) = (18x^2 + 23)^{1/3}$ (d) $f(x) = (122x^3 - 49)^{-4}$

KURALLARIN BİRLEŞİMİ

9.34. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin türevini gerekli kurallar kombinasyonunu kullanarak bulunuz.

(a) $y = 5x^2(4x - 9)^3$ (b) $y = \dfrac{6x(x^2 + 7)}{4x + 1}$

(c) $f(x) = \dfrac{(8x - 5)^3}{3x + 2}$ (d) $f(x) = (7x - 4)(3x + 8)^4$

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER

9.35. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin ardışık türevlerini bulunuz:

(a) $y = 3x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 13$ (b) $y = (8x + 9)(10x - 3)$

(c) $f(x) = (6x - 7)^4$ (d) $f(x) = (5 - 2x)^4$

Ek Soruların Cevapları

9.26. (*a*) 150 (*b*) 4 (*c*) 2 (*d*) $\frac{5}{6}$ (*e*) 13 (*f*) 5

9.27. (*a*) $-\frac{1}{24}$ (*b*) $\frac{1}{28}$ (*c*) -1 (*d*) 23

9.28. (*a*) $\frac{1}{3}$ (*b*) 0 (*c*) 2.25 (*d*) Limit yoktur.

9.29. (*a*) $y' = 30x^4$ (*b*) $f' = 2$ (*c*) $f' = 0$ (*d*) $y' = 24x^2 + 8x + 9$
(*e*) $y' = -24x^{-5}$ (*f*) $f' = 14x^{-3}$ (*g*) $y' = 6x^{-2/3}$ (*h*) $f' = -2.5x^{-3/2}$

9.30. (*a*) $f' = 192x^5 - 180x^4$ (*b*) $f' = 336x^3 + 108x^2$
(*c*) $y' = 270x^4 + 297x^2 - 48x$ (*d*) $y' = -480x^9 + 540x^5 + 160x^3$

9.31. (*a*) $y' = \frac{528x^4 - 88x^3 + 120}{(8x-1)^2}$ (*b*) $y' = \frac{120x^6 + 240x^5}{(3x+5)^2}$
(*c*) $y' = \frac{30x^4 - 70x^3 + 30x^2}{(6x^2 - 7x + 2)^2}$ (*d*) $y' = \frac{-21x^2 + 62x - 12}{(7x^2 - 4)^2}$

9.32. (*a*) $f' = 45(9x - 4)^4$ (*b*) $f' = 84x^2(7x^3 + 6)^3$
(*c*) $f' = -12x(3x^2 - 11)^{-3} = \frac{-12x}{(3x^2 - 11)^3}$
(*d*) $f' = (600x - 200)(6x^2 - 4x - 9)^{-2} = \frac{600x - 200}{(6x^2 - 4x - 9)^2}$
(*e*) $f' = 28x^3(14x^4 - 45)^{-1/2} = \frac{28x^3}{\sqrt{14x^4 - 45}}$
(*f*) $f' = 27x^5(22 - 9x^6)^{-3/2} = \frac{27x^5}{\sqrt{(22 - 9x^6)^3}}$ veya $\frac{27x^5}{\left(\sqrt{22 - 9x^6}\right)^3}$

9.33. (*a*) $y' = 192x^3(6x^4 - 35)^7$ (*b*) $y' = -120x^2(27 - 8x^3)^4$
(*c*) $f'(x) = 12x(18x^2 + 23)^{-2/3} = \frac{12x}{\sqrt[3]{(18x^2 + 23)^2}}$ veya $\frac{12x}{\left(\sqrt[3]{18x^2 + 23}\right)^2}$
(*d*) $f'(x) = -1464x^2(122x^3 - 49)^{-5} = \frac{-1464x^2}{(122x^3 - 49)^5}$

9.34. (*a*) $y' = 60x^2(4x - 9)^2 + 10x(4x - 9)^3$
(*b*) $y' = \frac{48x^3 + 18x^2 + 42}{(4x+1)^2}$
(*c*) $f'(x) = \frac{(72x + 48)(8x - 5)^{-2} - 3(8x - 5)^3}{(3x + 2)^2}$
(*d*) $f'(x) = (84x - 48)(3x + 8)^3 + 7(3x + 8)^4$

9.35. (*a*) $y' = 12x^3 - 15x^2 + 16x - 7$
$y'' = 36x^2 - 30x + 16$
$y''' = 72x - 30$
$y^{(4)} = 72$
$y^{(5)} = 0$

(*b*) $y' = 160x + 66$
$y'' = 160$
$y''' = 0$

(*c*) $f'(x) = 14(6x - 7)^3$

$f''(x) = 432(6x - 7)^2$

$f'''(x) = 5184(6x - 7)$

$f^{(4)}(x) = 31{,}104$

$f^{(5)}(x) = 0$

(*d*) $f'(x) = -8(5 - 2x)^3$

$f''(x) = 48(5 - 2x)^2$

$f'''(x) = -192(5 - 2x)$

$f^{(4)}(x) = 384$

$f^{(5)}(x) = 0$

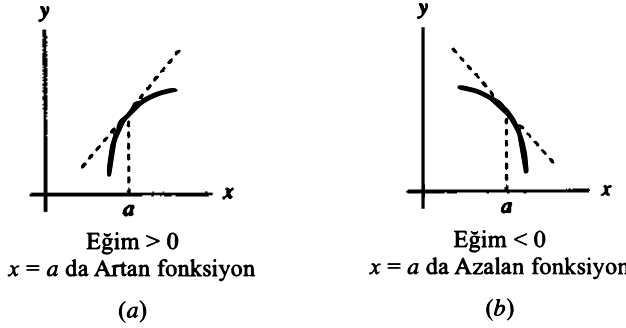
Bölüm 10

TÜREVSEL HESAP: TÜREV KULLANIMI

10.1 ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

$[a, f(a)]$ noktasının yakınında bir fonksiyonun grafiği soldan sağa doğru hareket ettikçe artıyorsa (azalıyorsa) $x = a$ noktasında $f(x)$ fonksiyonun, *artan (azalan)* olduğu söylenir. Birinci türev fonksiyonun hem değişim oranını hem de eğimini ölçtüğü için, $x = a$ noktasında birinci türevin pozitif olması fonksiyonun a noktasında artan; negatif olması ise azalan olduğunu gösterir. Kısaca, Şekil 10-1'de gösterildiği gibidir,

$$f'(a) > 0: x = a \text{ noktasında artan fonksiyon}$$
$$f'(a) < 0: x = a \text{ noktasında azalan fonksiyon}$$



Eğim > 0
$x = a$ da Artan fonksiyon
(*a*)

Eğim < 0
$x = a$ da Azalan fonksiyon
(*b*)

Şekil 10-1

Tüm tanım kümesi için artan (veya azalan) bir fonksiyon *monoton fonksiyon* olarak adlandırılır. Bu *monoton olarak* artan (azalan) olarak ifade edilir. Problem 10.1'den 10.3'e kadar bakınız.

10.2 KONKAVLIK VE KONVEKSLİK

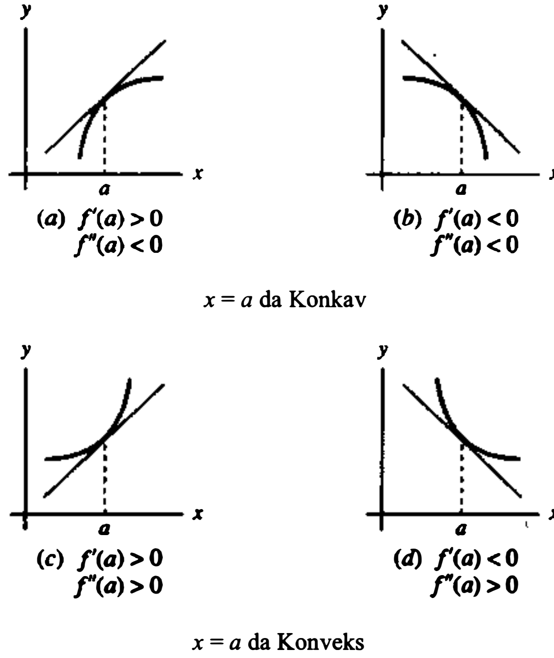
$[a, f(a)]$ noktasına yaklaşan küçük bir bölgede fonksiyonun grafiği tamamen teğet doğrusunun altında kalıyorsa $x = a$ da $f(x)$ fonksiyonu *konkav*dır. $[a, f(a)]$ ya yaklaşan küçük bir alanda fonksiyonun grafiği tamamen teğet doğrusunun üstünde kalıyorsa $x = a$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu *konveks*tir. $x = a$ noktasında pozitif ikinci mertebeden bir türev fonksiyonun bu noktada konveks; $x = a$ noktasında negatif ikinci mertebeden türev ise fonksiyonun a'da konkav olduğu anlamına gelmektedir. Birinci türevin işareti konkavlık için önemsizdir. Kısaca, Şekli 10-2 ve Problem 10.1'den 10.4'e kadar görüldüğü gibidir,

$$f''(a) < 0: x = a \text{ noktasında } f(x) \text{ konkavdır}$$
$$f''(a) > 0: x = a \text{ noktasında } f(x) \text{ konvekstir}$$

Tanım kümesindeki tüm x değerleri için $f''(x) < 0$ ise, $f(x)$ *tam konkavdır*. Tanım kümesindeki tüm x değerleri için $f''(x) > 0$ ise, $f(x)$ *tam konvekstir*.

10.3 BAĞIL EKSTREMUM

Bağıl veya *yerel ekstremum* bir fonksiyonun bağıl maksimum veya minimuma ulaştığı noktadır. Bir a noktasının bağıl maksimum veya minimum olabilmesi için, fonksiyon nispeten yatay (düz) olmalıdır, yani,

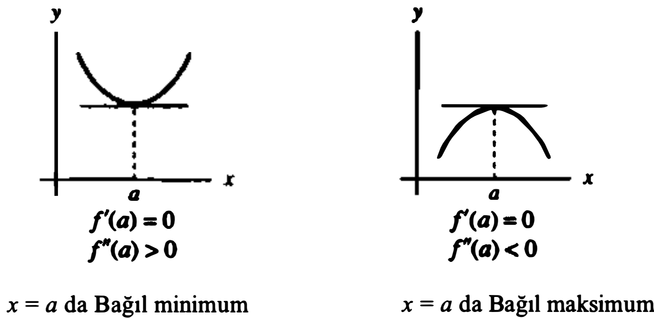


Şekil 10-2

a noktasında ne artan ne de azalan olmalıdır. Eğer fonksiyon a noktasında artan ya da azalan değilse, fonksiyonun birinci türevi a'da sıfıra eşit veya tanımsız olmalıdır. Bir fonksiyonun tanım kümesinde türevinin sıfıra eşit olduğu veya tanımsız olduğu nokta *kritik nokta* veya *değer* olarak adlandırılır.

Matematiksel olarak bağıl maksimum ve minimumu ayırabilmek için, *ikinci dereceden türev* testi kullanılır. $f'(a) = 0$ varsayılmak üzere,

1) $f''(a) > 0$ ise, bu fonksiyonun konveks olduğunu, fonksiyonun grafiğinin $x = a$ da (yatay) teğet doğrusunun tamamen üstünde kaldığını, fonksiyonun Şekil 10-3 (a)'de görüldüğü gibi $x = a$ noktasında bağıl minimum olması gerektiği gösterir.
2) $f''(a) < 0$ ise, bu fonksiyonun konkav olduğunu, fonksiyonun grafiğinin $x = a$ noktasında (yatay) teğet doğrusunun tamamen altında kaldığını, fonksiyonun Şekil 10-3 (b)'de görüldüğü gibi $x = a$ da bağıl maksimum olması gerektiği belirtir.
3) $f''(a) = 0$ ise, test geçersizdir.



Şekil 10-3

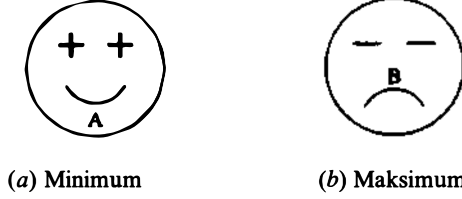
Tipik olarak işletme ve iktisatta karşılaşılan, *türevlenebilir* veya *düzgün fonksiyon* olarak isimlendirilen yani bütün x değerlerinde türevlenebilir fonksiyonlar için, kritik noktaları ararken tek ihtiyaç duyulan $f'(x) = 0$ olan durumları dikkate almaktır.

Özetlersek,

$f'(a) = 0, \quad f''(a) > 0$ ise $x = a$ bağıl minimum
$f'(a) = 0, \quad f''(a) < 0$ ise $x = a$ bağıl maksimum

Örnek 1 ve Problem 10.5 ile 10.6'ya bakınız.

ÖRNEK 1. (*a*) Kritik noktalarda ikinci mertebeden türevin pozitif olmasının (++) fonksiyonun (‿) teğetten yukarıda olduğu anlamına geldiğini ve (*b*) Kritik noktalarda ikinci mertebeden türevin negatif olmasının (− −) fonksiyonun (⁀) teğetten aşağıda olduğu anlamına geldiğini, Şekil 10-4 ile gösterilen basit anımsatıcı kural ile aklımızda tutalım.



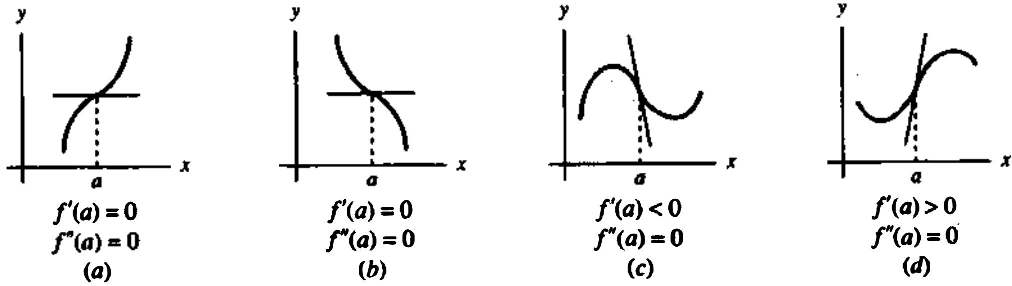
(*a*) Minimum (*b*) Maksimum

Şekil 10-4

10.4 BÜKÜM NOKTALARI

Büküm noktası, fonksiyonun konkavdan konvekse veya tam tersi yönde değiştiği ve grafikte teğet doğrusu ile kesiştiği noktadır. Büküm noktalarının yalnızca *ikinci mertebeden* türevin sıfıra eşit olduğu veya tanımsız olduğu noktada olması mümkündür. Birinci dereceden türevin işareti önemsizdir. Kısaca, a da bir bükülme noktası için Şekil 10-5 gösterildiği gibi,

1. $f''(a) = 0$ veya tanımsızdır.
2. $x = a$ noktasında konkavlık değişir.
3. $x = a$ noktasında grafik ile teğet doğrusu kesişir.



$x = a$ da Büküm Noktası

Şekil 10-5

Örnek 2'ye ve Problem 10.7, 10.9 ve 10.14'e bakınız.

10.5 EĞRİ ÇİZİMİ

Birinci ve ikinci dereceden türevler eğrinin genel şekli hakkında yararlı bilgi sağlar ve bu yüzden eğriyi çizmeyi kolaylaştırır. Nispeten karmaşık bir fonksiyon birkaç kolay adımda genel hatlarıyla çizilebilir. $f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

1. Birinci mertebeden türevin sıfıra eşit olduğu noktalar aranarak bağıl ekstremum değerleri bulunur: $f'(x) = 0$.
2. Bağıl maksimum $[f''(x) < 0]$ ve bağıl minimum $[f''(x) > 0]$ arasında ayrım yapabilmek için ikinci mertebeden türevin işareti test edilerek kritik nokta(lar)daki konkavlık belirlenir.
3. $f''(x) = 0$ veya $f''(x)$ tanımsız olduğu ve konkavlığın değiştiği büküm noktaları kontrol edilir.

ÖRNEK 2. Yukarıda Kısım 10.5'te özetlenen işlemleri kullanarak $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 45x$ fonksiyonu aşağıda çizilmiştir.

(*a*) Birinci türev alınır,

$$f'(x) = -3x^2 + 6x^2 + 45$$

Alınan türev sıfıra eşitlenir ve x için çözülür,

$$f'(x) = -3x^2 + 6x^2 + 45 = 0$$

Çarpanlarına ayrılır,

$$-3(x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$(x + 3)(x - 5) = 0$$

$$x = -3 \qquad x = 5 \qquad \text{kritik noktalar}$$

(*b*) İkinci türev alınır, kritik noktalar için hesaplanır ve işaretler kontrol edilerek konkavlık test edilir.

$$f''(x) = -6x^2 + 6$$

$$f''(-3) = -6(-3) + 6 = 24 > 0 \qquad \text{konveks, bağıl minimum}$$

$$f''(5) = -6(5) + 6 = -24 < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

(*c*) $f''(x) = 0$ olan ve konkavlığın değiştiği büküm noktaları incelenir.

$$f''(x) = -6x + 6 = 0$$
$$x = 1$$

$x = 1$'de $f''(x) = 0$ ve $f(x)$ $x = -3$'te konvekslikten $x = 5$'te konkavlığa değiştiği için, $x = 1$ büküm noktasıdır.

(*d*) $x = -3$, 1 ve 5 için $f(x)$ hesaplanır ve Şekil 10-6 da ki gibi grafiği çizilir.

$$f(-3) = -3(-3)^3 + 3(-3)^2 + 45(-3) = -81$$

$$f(5) = -(1)^3 + 3(1)^2 + 45(1) = 47$$

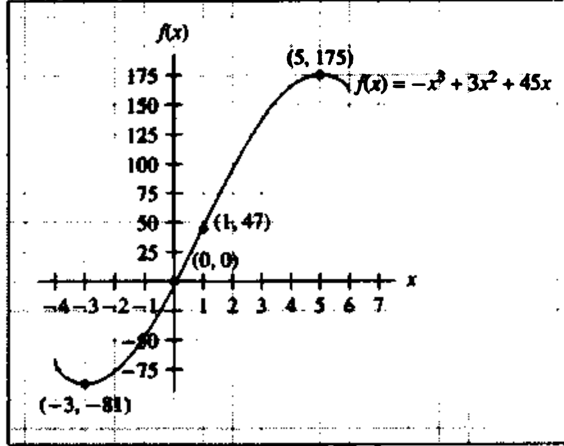
$$f(5) = -(5)^3 + 3(5)^2 + 45(5) = 175$$

Problem 10.6 dan 10.14 e kadar bakınız.

10.6 FONKSİYONLARIN OPTİMİZASYONU

Optimizasyon, bir fonksiyonun bağıl maksimum veya minimumunu bulma sürecidir. Bu, grafik yardımı olmaksızın Kısım 10.3'ten 10.5'e kadar geliştirilen yöntemler ile yapılır ve aşağıda özetlenmektedir. Her zamanki gibi türevlenebilir bir fonksiyon verilmek üzere,

1. Birinci türevi alınır, sıfıra eşitlenir ve kritik nokta(lar) için çözümlenir. Bu adım *birinci dereceden koşul* ve *gerek koşul* olarak bilinir.
2. İkinci türevi alınır, kritik nokta(lar)da hesaplanır, işaret(ler)i kontrol edilir. Eğer a kritik noktaysa,



Şekil 10-6

$f''(a) > 0$:	konveks, bağıl minimum
$f''(a) < 0$:	konkav, bağıl maksimum
$f''(a) = 0$:	test geçersizdir.

İkinci türev testi olan bu adım, *ikinci dereceden koşul* veya *yeter koşul* olarak adlandırılır. Özetle,

Bağıl Maksimum	Bağıl Minimum
$f'(a) = 0$	$f'(a) = 0$
$f''(a) < 0$	$f''(a) > 0$

Örnek 1'e tekrar bakınız. Aynı zamanda Örnek 3 ve Problem 10.15 ile 10.16'ya da bakınız.

ÖRNEK 3. $f(x) = 3x^3 - 54x^2 + 288x - 22$ optimize edilmek üzere,

(*a*) Birinci türevi alınarak kritik noktaları bulunur, sıfıra eşitlenir ve x için çözümlenir.

$$f'(x) = 9x^2 - 108x + 288 = 0$$

$$9(x-4)(x-8) = 0$$

$$x = 4 \qquad x = 8 \qquad \text{kritik noktalar}$$

(*b*) İkinci türevini alarak konkavlığı test edilir, ikinci türevi kritik noktalar için hesaplanır ve bağıl minimum ve bağıl maksimumu ayırmak için işaretleri kontrol edilir.

$$f''(x) = 18x - 108$$

$$f''(4) = 18(4) - 108 = -36 < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

$$f''(8) = 18(8) - 108 = 36 > 0 \qquad \text{konveks, bağıl minimum}$$

Fonksiyon $x = 4$ de maksimum ve $x = 8$ de minimumdur.

10.7 ARDIŞIK TÜREV TESTİ

İkinci türev testi, Şekil 10-5 (a) ve (b) de gösterildiği gibi büküm noktalarının kritik değerlerde olduğu fonksiyonlar için geçersiz olabilir. $f''(a) = 0$ olduğu ve kılavuzluk için grafiğin olmadığı durumlarda, ardışık türev testi uygulanır:

1) Kritik noktalar hesaplanırken sıfıra eşit olmayan yüksek mertebeden ilk türevin kuvveti tek sayı (üçüncü, beşinci gibi) ise, fonksiyon büküm noktasındadır. Problem 10.7, 10.9 ve 10.14'e bakınız.
2) Kritik değer hesaplanırken sıfıra eşit olmayan yüksek mertebeden ilk türevin kuvveti çift sayı ise, fonksiyon bağıl ekstremumdadır. Bu türevin pozitif değeri bağıl minimumu, negatif değeri ise bağıl maksimumu gösterir. Problem 10.6, 10.8, 10.13 ve 10.16'ya bakınız.

10.8 EKONOMİDE MARJİNAL KONUSU

Ekonomide *marjinal gelir*, ek bir malın satışının toplam gelirde meydana getirdiği değişiklik olarak tanımlanır. *Marjinal maliyet* üretilen ilave bir birim ürünün toplam maliyette meydana getirdiği değişiklik olarak tanımlanır. Toplam gelir TR ve toplam maliyet TC, Q çıktı düzeyinin fonksiyonu olduğu için marjinal gelir MR ve marjinal maliyet MC, ilgili toplam fonksiyonların türevi olarak matematiksel biçimde ifade edilebilir:

$$\text{TR} = \text{TR}(Q) \text{ ise, } \text{MR} = \frac{d\text{TR}}{dQ}$$

$$\text{TC} = \text{TC}(Q) \text{ ise, } \text{MC} = \frac{d\text{TC}}{dQ}$$

Kısaca herhangi bir ekonomik fonksiyonun marjinal ifadesi, toplam fonksiyonun bir türevi olarak yazılabilir.

ÖRNEK 4. $TC = Q^2 + 5Q + 72$ ise, sonra

$$MC = \frac{d\text{TC}}{dQ} = 2Q + 5$$

$TR = -3Q^2 + 95Q$ ise,

$$\text{MR} = -6Q + 95$$

ÖRNEK 5. Talep fonksiyonu $P = 80 - 3Q$ olmak üzere, marjinal gelir önce toplam gelir fonksiyonu bulunup sonra bu fonksiyonun Q' ya göre türevi alınarak bulunabilir. Böylece

$$\text{TR} = PQ = (80 - 3Q)Q = 80Q - 3Q^2$$

ve

$$\text{MR} = \frac{d\text{TR}}{dQ} = 80 - 6Q$$

Eğer $Q = 5$ ise MR = 80 – 6(5) = 50; $Q = 7$ ise MR = 80 – 6(7) = 38'dır. Problem 10.17'den 10.19'a kadar bakınız.

10.9 İŞLETME İÇİN EKONOMİK FONKSİYONLARI OPTİMİZE ETME

Firmalar sıklıkla işletmeciler ve iktisatçılardan fayda, çıktı düzeyi veya verimliliğini maksimize etmesi ile maliyet, gürültü veya kirlilik düzeyi ve kıt doğal kaynakların kullanımının minimize edilmesi gibi problemlerinin çözümünde yardım etmelerini isterler. Bu görev önceki bölümde geliştirilen yöntemlerle kolaylaştırılır. Örnek 6 ile Problem 10.20'den 10.25'e kadar ise örneklendirilmiştir.

ÖRNEK 6. $Q > 0$ varsayılarak bir firmanın kârını π maksimize etmek için, toplam gelir $R = 3300Q - 26Q^2$ ve toplam maliyet $C = Q^3 - 2Q^2 + 420Q + 750$ olmak üzere,

(*a*) Kâr fonksiyonu oluşturulur:

$$\pi = 3300Q - 26Q^2 - (Q^3 - 2Q^2 + 420Q + 750)$$

$$\pi = -Q^3 - 24Q^2 + 2880Q - 750$$

(*b*) Birinci türevi alınıp sıfıra eşitlenir ve kritik noktaları bulmak için Q için çözümlenir.

$$\pi' = -3Q^2 - 48Q + 2880 = 0$$

$$= -3(Q^2 + 16Q - 960) = 0$$

$$= -3(Q - 24)(Q + 40) = 0$$

$Q = 24$ $\quad Q = -40$ $\quad$ kritik noktalar

(*c*) İkinci türevi alınır ve pozitif kritik değer için hesaplanır. Sonra bağıl maksimumu temsil eden konkavlık için işareti kontrol edilir. Negatif kritik değer önemsenmez. Negatif değerin ekonomik önemi yoktur ve matematiksel olarak bağıl minimum olduğu kanıtlanacaktır.

$$\pi'' = -6Q - 48$$

$\pi''(24) = -6(24) - 48 = -192 < 0$ $\quad$ konkav, bağıl maksimum

$Q = 24$ için maksimize olan kâr,

$$\pi(24) = -(24)^3 - 24(24)^2 + 2880(24) - 750 = 40{,}722$$

10.10 TOPLAM, MARJİNAL VE ORTALAMA FONKSİYONLAR ARASINDAKİ İLİŞKİ

İşletmeciler ve iktisatçılar sıklıkla maliyetler, gelir ve kâr içeren fonksiyonlarla ilgilenirler. Toplam, marjinal ve ortalama fonksiyonlar arasındaki önemli ilişki belki de en kolay grafik üzerinden anlaşılır. Daha önceki bölümde anlatılan eğri çizme metotları kullanılarak toplam maliyet, marjinal maliyet ve ortalama maliyet fonksiyonları arasında karşılıklı bir ilişki olduğuna dair bağlantılar Örnek 7'de gösterilmektedir.

ÖRNEK 7. Toplam maliyet fonksiyonu $TC = Q^3 - 24Q^2 + 600Q$ olmak üzere, toplam, ortalama ve marjinal maliyet fonksiyonları arasındaki ilişkiler aşağıda gösterilmiştir:

(*a*) Toplam maliyet fonksiyonunun birinci ve ikinci türevi alınır,

$$TC' = 3Q^2 - 48Q + 600$$

$$TC'' = 6Q - 48$$

ve ikinci türev kullanılarak (1) konkavlığı ve (2) büküm noktaları kontrol edilir,

(1) $Q < 8$ için, $TC'' < 0$ $\quad$ konkav

$Q > 8$ için, $TC'' > 0$ $\quad$ konveks

(2)

$$6Q - 48 = 0$$

$$Q = 8$$

$$TC(8) = (8)^3 - 24(8)^2 + 600(8) = 3776$$

$Q = 8$ da $TC(Q)$'nin konkavdan konvekse değişmesi nedeniyle,

(8, 3776) $\quad$ büküm noktası

(*b*) Ortalama maliyet fonksiyonu AC ve bağıl ekstremumları bulunur.

$$\text{AC} = \frac{\text{TC}}{Q} = Q^2 - 24Q + 600$$

$$\text{AC}' = 2Q - 24 = 0$$

$Q = 12$ kritik nokta

$\text{AC}'' = 2 > 0$ konveks, bağıl minimum

(*c*) Marjinal maliyet fonksiyonu için aynı işlemleri yapınız.

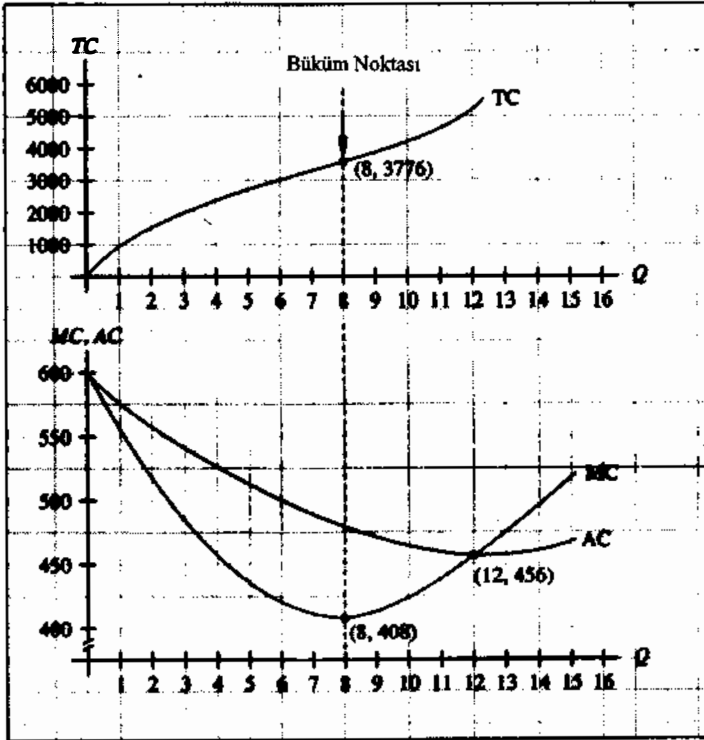
$$\text{MC} = \text{TC}' = 3Q^2 - 48Q + 600$$

$$\text{MC}' = 6Q - 48 = 0$$

$Q = 8$ kritik nokta

$\text{MC}'' = 6 > 0$ konveks, bağıl minimum

(*d*) Şekil 10-7'de grafik çizilir.



Şekil 10-7

Not:

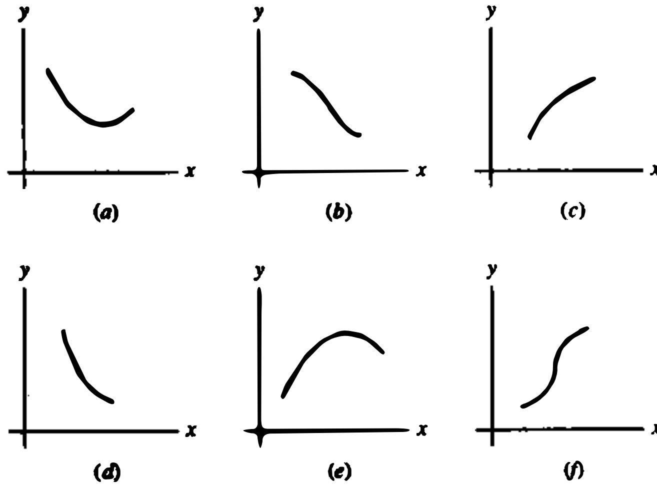
1. MC, TC konkav ve azalarak artan iken azalır, TC konveks ve artarak artan iken artar ve TC büküm noktasında ve konkavlık değişirken minimumdadır.
2. AC, MC < AC olan tüm bölgelerde azalır, MC = AC iken minimumdadır ve MC > AC iken artar.
3. Eğer MC < AC ise, AC azalır. MC = AC ise AC minimumdadır. MC > AC ise AC artar.

Ayrıca Problem 10.26'ya bakınız.

Çözümlü Sorular

ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR, KONKAVLIK VE KONVEKSLİK

10.1. Şekil 10-8 de ki grafiklerden, (1) tüm x değerleri için artan, (2) tüm x değerleri için azalan, (3) tüm x değerleri için konveks, (4) tüm x değerleri için konkav olanları, (5) hangilerinin bağıl maksimum ve minimuma sahip olduğunu ve (6) hangilerinin büküm noktasına sahip olduğunu belirtiniz.



Şekil 10-8

(1) c, f; tüm x değerleri için artan,

(2) b, d; tüm x değerleri için azalan,

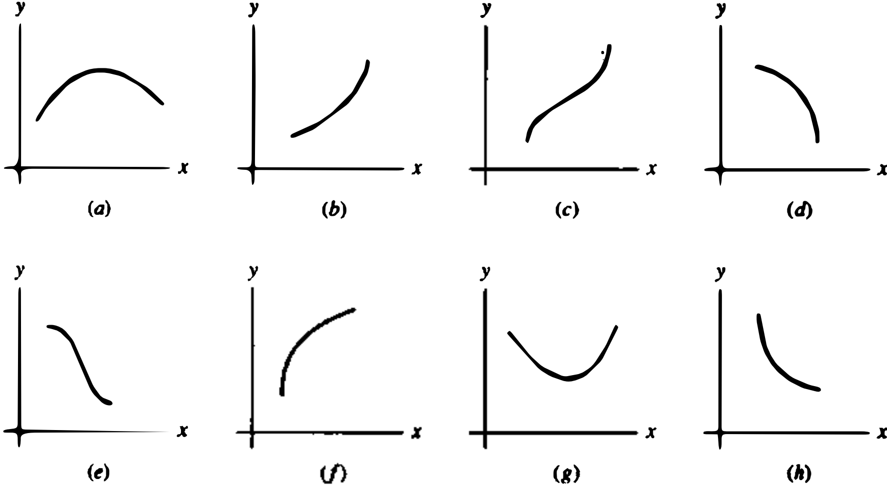
(3) a, d; tüm x değerleri için konveks,

(4) c, e; tüm x değerleri için konkav,

(5) a, e; bağıl maksimum veya minimum gösterir,

(6) b, f; büküm noktasına sahiptir.

10.2. Şekil 10-9'daki grafiklere bağlı olarak hangi fonksiyonların (1) birinci türevlerinin tüm x değerleri için pozitif, (2) birinci türevlerinin tüm x değerleri için negatif, (3) ikinci türevlerinin tüm x değerleri için pozitif, (4) ikinci türevlerinin tüm x değerleri için negatif olduğu,



Şekil 10-9

(5) birinci türevlerinin sıfıra eşit veya tanımsız olduğu noktayı ve (6) ikinci türevlerinin sıfıra eşit veya tanımsız olduğu noktayı belirtiniz.

(1) *b*, c, *f;* grafikleri soldan sağa doğru yukarı yönlüdür,

(2) *d*, e, *h;* grafikleri soldan sağa doğru aşağı yönlüdür,

(3) *b*, *g*, *h;* grafikleri konveks,

(4) *a*, *d*, *f;* grafikleri konkav,

(5) *a*, *g;*grafikleri bir düzlüğe değer (ekstremum noktasında),

(6) *c*, *e;* grafikleri büküm noktasına sahiptir.

10.3. Aşağıdaki fonksiyonların $x = 3$ noktasında artan, azalan veya sabit olup olmadığı bulunuz.

(*a*) $y = 5x^2 - 12x + 8$

$$y' = 10x - 12$$

$$y'(3) = 10(3) - 12 = 18 > 0 \qquad \text{fonksiyon artandır}$$

(*b*) $y = x^3 - 4x^2 - 9x + 19$

$$y' = 3x^2 - 8x - 9$$

$$y'(3) = 3(3)^2 - 8(3) - 9 = -6 < 0 \qquad \text{fonksiyon azalandır}$$

(*c*) $y = 4x^4 - 9x^3 + 22.5x^2 - 92$

$$y' = 4x^3 - 27x^2 + 45x$$

$$y'(3) = 4(3)^3 - 27(3)^2 + 45(3) = 0 \qquad \text{fonksiyon sabittir}$$

10.4. Aşağıdaki fonksiyonların $x = 2$ noktasında konkav veya konveks olduğunu araştırınız.

(*a*) $y = -4x^3 + 5x^2 + 3x - 25$

$$y' = -12x^2 + 10x + 3$$

$$y'' = -24x + 10$$

$$y''(2) = -24(2) + 10 = -38 < 0 \qquad \text{konkav}$$

(*b*) $y = (3x^2 - 4)^2$

$$y' = 2(3x^2 - 4)(6x) = 12x(3x^2 - 4) = 36x^3 - 48x$$

$$y'' = 108x^2 - 48$$

$$y''(2) = 108(2)^2 - 48 = 384 > 0 \qquad \text{konveks}$$

BAĞIL EKSTREMUM

10.5. Aşağıdaki fonksiyonlar için (1) kritik değer(ler)i bularak ve (2) kritik değer(ler)de fonksiyonun bağıl maksimum veya minimumu olup olmadığını belirleyerek bağıl ekstremumunu bulunuz.

(*a*) $f(x) = -9x^2 + 126x - 45$

(1) Birinci türevi alınır, sıfıra eşitlenir ve kritik değer(ler)i bulmak için x çözümlenir.

$$f'(x) = -18x + 126 = 0$$

$$x = 7 \qquad \text{kritik değer}$$

(2) İkinci türevi alınır, kritik değer(ler) için hesaplanır ve bağıl maksimum ve minimumu ayırmak için konkavlığı kontrol edilir.

$$f''(x) = -18$$

$$f''(7) = -18 < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

(*b*) $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 48x - 29$

(1)
$$f'(x) = 6x^2 - 36x + 48 = 0$$

$$f'(x) = 6(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$f'(x) = 6(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$x = 2 \qquad x = 4 \qquad \text{kritik değerler}$$

(2)
$$f''(x) = 12x - 36$$

$$f''(2) = 12(2) - 36 = -12 < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

$$f''(4) = 12(4) - 36 = 12 > 0 \qquad \text{konveks, bağıl minimum}$$

(*c*) $f(x) = 4x^4 + 8x^3 - 80x^2 + 195$

(1)
$$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 - 160x = 0$$

$$f'(x) = 4x(x^2 + 6x - 40) = 0$$

$$f'(x) = 4x(x - 4)(x + 10) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 4 \qquad x = -10 \qquad \text{kritik değerler}$$

(2) $f''(x) = 12x^2 + 48x - 160$

$$f''(-10) = 12(-10)^2 + 48(-10) - 160 = 560 > 0 \qquad \text{konveks, bağıl minimum}$$

$$f''(0) = 12(0)^2 + 48(0) - 160 = -160 > 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

$$f''(4) = 12(4)^2 + 48(4) - 160 = 224 > 0 \qquad \text{konveks, bağıl minimum}$$

10.6. Denklem fonksiyonu için, (1) kritik değerleri bulunuz ve (2) fonksiyonun kritik değerlerde bağıl maksimum, minimum veya olası bir büküm noktası varsa bulunuz.

(1) Birinci türevi alınır, sıfıra eşitlenir ve kritik değer(ler)i elde etmek için x çözümlenir.

$$y' = 4(x-5)^3 = 0$$

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5 \qquad \text{kritik değer}$$

(2) İkinci türevi alınır, kritik değerler için hesaplanır ve bağıl maksimum, minimum veya büküm noktasını ayırmak için konkavlığın işareti kontrol edilir.

$$y'' = 12(x-5)^2$$

$$y''(5) = 12(5-5)^2 = 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

Eğer ikinci türev testi geçersizse, ardışık yüksek mertebeden türevleri alınmaya devam edilir ve sıfırdan farklı ilk yüksek mertebeden türeve ulaşılıncaya kadar kritik değerler için hesaplanır:

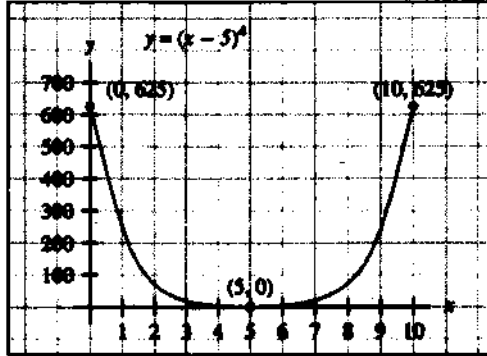
$$y''' = 24(x-5)$$

$$y'''(5) = 24(5-5) = 0 \qquad \text{test yetersiz}$$

$$y^{(4)} = 24$$

$$y^{(4)}(5) = 24 > 0$$

Kısım 10.7'de açıklandığı gibi, eğer sıfırdan farklı yüksek merteben ilk türev çift sayılı türev ise y bağıl ekstremumdadır. Türevin pozitif olması ile y konveks ve bağıl minimumdadır. Şekil 10-10'a bakınız.



Şekil 10-10

10.7. Problem 10.6'daki soruları Denklem için tekrar çözünüz.

(1) $$y' = 3(6-x)^2(-1) = -3(6-x)^2 = 0$$

$$x = 6 \qquad \text{kritik değer}$$

(2) $$y'' = -6(6-x)(-1) = 6(6-x) = 0$$

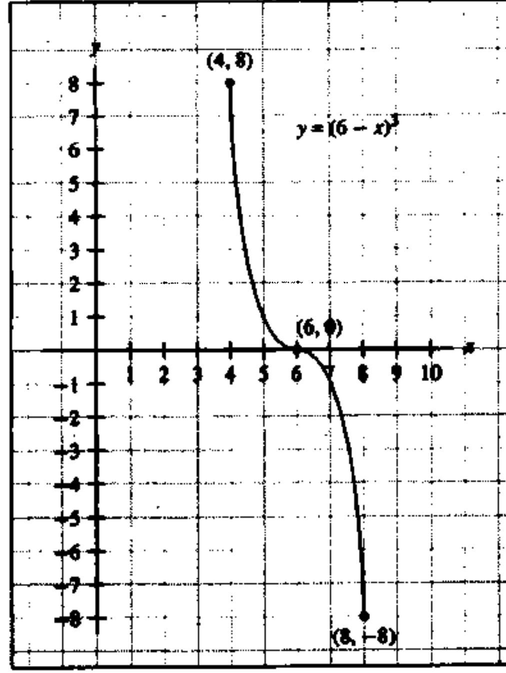
$$y''(6) = 6(6-6) = 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

Ardışık yüksek mertebeden türevler alınmaya devam edilir ve sıfıra eşit olmayan yüksek mertebeden ilk türev bulunduğunda kritik değer için hesaplanır.

$$y''' = -6$$

$$y'''(6) = -6 < 0$$

Kısım 10.7'de açıklandığı gibi, sıfırdan farklı ilk yüksek mertebeden türev tek sayılı türev ise y ekstrem noktada değil büküm noktasındadır. Şekil 10-11'e bakınız.



Şekil 10-11

10.8. Problem 10.6 daki soruları $y = -3(x-4)^6$ için tekrar çözünüz.

(1) $$y' = -18(x-4)^5 = 0$$

$$x = 4 \qquad \text{kritik değer}$$

(2) $$y'' = -90(x-4)^4$$

$$y''(4) = -90(0)^4 = 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

Devam edilir,

$$y''' = -360(x-4)^3 \qquad y'''(4) = 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

$$y^{(4)} = -1080(x-4)^2 \qquad y^{(4)}(4) = 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

$$y^{(5)} = -2160(x-4) \qquad y^{(5)}(4) = 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

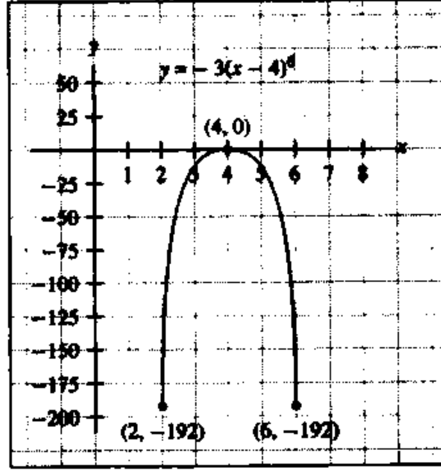
$$y^{(6)} = -2160 \qquad y^{(6)}(4) = -2160 < 0$$

Sıfırdan farklı yüksek mertebeden ilk türevin çift sayılı olması nedeniyle y bir ekstrem noktasındadır; $y^{(6)}(4) < 0$ olduğundan y konkavdır ve bağıl maksimumdadır. Şekil 10-12'ye bakınız.

10.9. Problem 10.6 daki soruları $y = (x-3)^5$ için tekrar çözünüz.

(1) $$y' = 5(x-3)^4 = 0$$

$$x = 3 \qquad \text{kritik değer}$$



Şekil 10-12

(2) $$y'' = 20(x-3)^3$$

$$y''(3) = 20(0)^3 = 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

Üçüncü ve daha yüksek mertebeden türev almaya devam edelim,

$$y''' = 60(x-3)^2 \qquad y'''(3) = 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

$$y^{(4)} = 120(x-3) \qquad y^{(4)}(3) = 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

$$y^{(5)} = 120 \qquad y^{(5)}(3) = 120 > 0$$

Sıfırdan farklı yüksek mertebeden ilk türevin tek sayılı olması nedeniyle y bir büküm noktasındadır. Şekil 10-13'e bakınız.

EĞRİ ÇİZİMİ

10.10. Aşağıdaki bilgilerden yararlanarak, belirtilen noktada fonksiyonu tanımlayınız ve sonra kabataslak grafiğini çiziniz.

(*a*) $f(4) = 2, f'(4) = 3, f''(4) = 5$

$f(4) = 2$ olduğundan, fonksiyon (4, 2) **noktasından** geçer. $f'(4) = 3 > 0$ olduğunda fonksiyon artandır ve $f''(4) = 5 > 0$ **olduğu için fonksiyon konvekstir. Şekil** 10-14(*a*)'ya bakınız.

(*b*) $f(5) = 4, f'(5) = -6, f''(5) = -9$

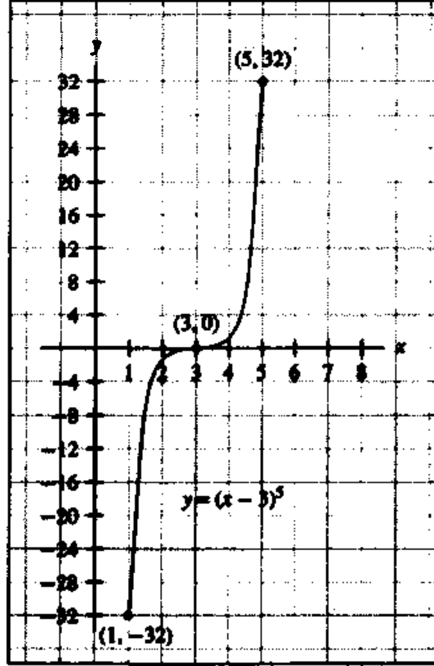
$f(5) = 4$ olduğundan, fonksiyon (5, 4) noktasından geçer. $f'(5) = -6 < 0$ olduğunda fonksiyon azalandır ve $f''(5) = -9 < 0$ olduğu için fonksiyon konkavdır. Şekil 10-14(*b*)'ya bakınız.

(*c*) $f(4) = 5, f'(4) = 0, f''(4) = -7$

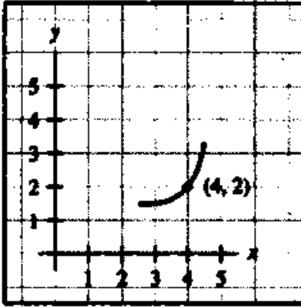
Fonksiyon (4, 5) noktasından geçer. $f'(4) = 0$ olduğundan $x = 4$'te fonksiyonun bağıl yatay olduğunu biliyoruz ve $f''(4) = -7$ olduğu için $x = 4$'te fonksiyonun konkav olduğunu biliyoruz. Bu yüzden bağıl maksimumdadır. Şekil 10-14(*c*)'ya bakınız.

(*d*) $f(2) = 4, f'(2) = -5, f''(2) = 6$

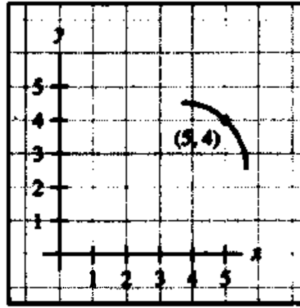
Fonksiyon azalan ve konveks olduğu (2, 4) noktasından geçer. Şekil 10-14(*d*)'ya bakınız.



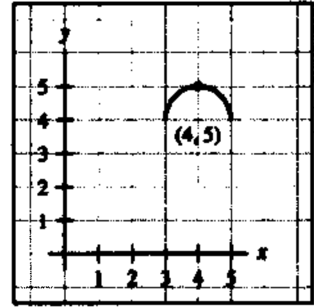
Şekil 10-13



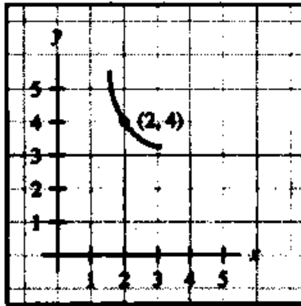
(*a*)



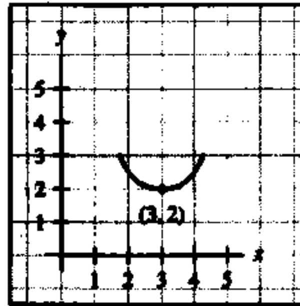
(*b*)



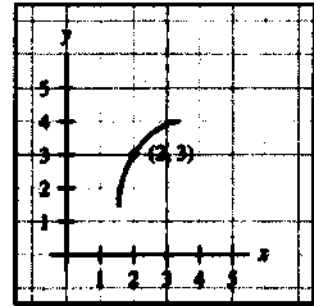
(*c*)



(*d*)



(*e*)



(*f*)

Şekil 10-14

(*e*) $f(3) = 2, f'(3) = 0, f''(3) = 8$

Fonksiyon bağıl yatay ve konveks olduğu (3, 2) noktasından geçer. Bu nedenle fonksiyon (3, 2) noktasında bağıl minimumdadır. Şekil 10-14(*e*)'ye bakınız.

(*f*) $f(2) = 4, f'(2) = 7, f''(2) = -9$

Fonksiyon artan ve konkav olduğu (2, 3) noktasından geçer. Şekil 10-14(*f*)'ye bakınız.

10.11. $f(x) = x^3 - 18x^2 + 81x - 58$ olmak üzere,

(*a*) Kritik değerleri bulunuz, (*b*) bağıl maksimum veya minimumunu belirlemek için konkavlığı test ediniz, (*c*) büküm noktalarını kontrol ediniz, (*d*) büküm noktalarında ve kritik değerlerde fonksiyonu hesaplayınız ve (*e*) grafiğini çiziniz.

(*a*)

$$f'(x) = 3x^2 - 36x + 81 = 3(x^2 - 12x + 27) = 0$$
$$f'(x) = 3(x-3)(x-9) = 0$$
$$x = 3 \qquad x = 9 \qquad \text{kritik değerler}$$

(*b*)

$$f''(x) = 6x - 36$$
$$f''(3) = 6(3) - 36 = -18 < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$
$$f''(9) = 6(9) - 36 = -18 > 0 \qquad \text{konveks, bağıl minimum}$$

(*c*)

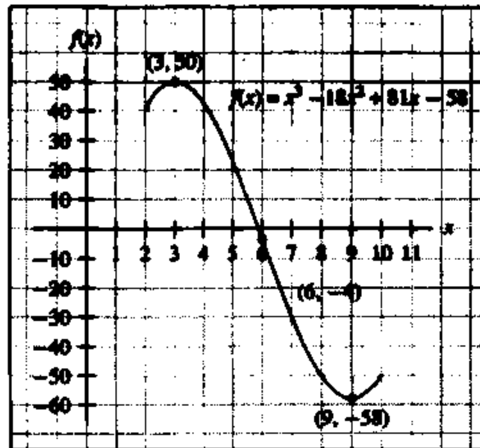
$$f''(x) = 6x - 36$$
$$x = 6 \qquad \text{olası büküm noktası}$$

$f''(6) = 0$ olduğu ve (*b*)'de görüldüğü gibi $x = 3$ ile $x = 9$ arasında konkavlık değiştiği için $x = 6$ büküm noktasıdır.

(*d*)

$$f(3) = (3)^3 - 18(3)^2 + 81(3) - 58 = 50 \qquad (3,50) \text{ bağıl maksimum}$$
$$f(6) = (6)^3 - 18(6)^2 + 81(6) - 58 = -4 \qquad (6,-4) \text{ büküm noktası}$$
$$f(9) = (9)^3 - 18(9)^2 + 81(9) - 58 = -58 \qquad (9,-58) \text{ bağıl minimum}$$

(*e*) Şekil 10-15'e bakınız.



Şekil 10-15

10.12. Problem 10.11 deki soruları $f(x) = -2x^3 + 12x^2 + 72x - 70$ için tekrar çözünüz.

(*a*) $$f'(x) = -6x^2 + 24x + 72 = -6(x^2 - 4x - 12) = 0$$
$$f'(x) = -6(x + 2)(x - 6) = 0$$

$x = -2$ $x = 6$ kritik değerler

(*b*) $$f''(x) = -12x^2 + 24$$

$f''(-2) = -12(-2) + 24 = 48 > 0$ konveks, bağıl minimum

$f''(6) = -12(6) + 24 = -48 < 0$ konkav, bağıl maksimum

(*c*) $f''(x) = -12x + 24 = 0$

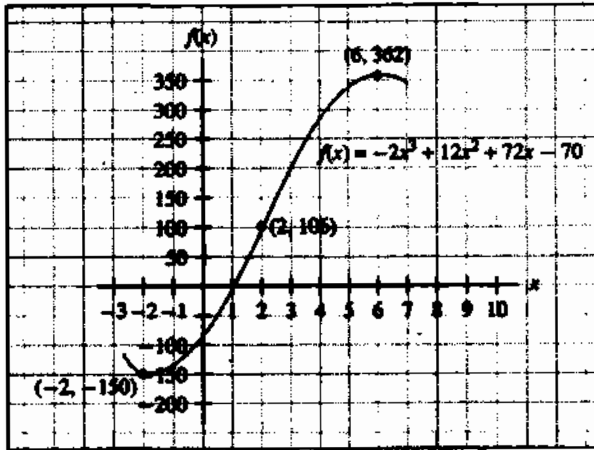
$x = 2$ büküm noktasıdır

(*d*) $f(-2) = -50$ $(-2, -150)$ bağıl minimum

$f(2) = 106$ $(2{,}106)$ büküm noktası

$f(6) = 362$ $(6{,}362)$ bağıl maksimum

(*e*) Şekil 10-16'ya bakınız.



Şekil 10-16

10.13. Problem 10.11 deki soruları $f(x) = (3 - x)^4$ için tekrar çözünüz.

(*a*) $f'(x) = 4(3 - x)^3(-1) = -4(3 - x)^3 = 0$

$x = 3$ kritik değer

(*b*) $$f''(x) = 12(3 - x)^2$$

$f''(3) = 12(3 - 3)^2 = 0$ test geçersiz

Kısım 10.7'de açıklandığı gibi devam edilir,

$$f'''(x) = -24(3 - x)$$

$$f'''(3) = -24(3 - 3) = 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

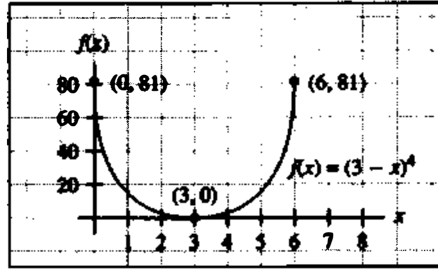
$$f^{(4)}(3) = 24 > 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

Sıfırdan farklı yüksek mertebeden ilk türev çift sayılı olduğundan ve sıfırdan büyük olduğundan $x = 3$'te $f(x)$ minimumdur.

(*c*) Büküm noktası yoktur.

(*d*) $f(3) = 0$ (3, 0) bağıl minimum

(*e*) Şekil 10-17'e bakınız.



Şekil 10-17

10.14. Problem 10.11 deki soruları $f(x) = (2x - 8)^3$ için tekrar çözünüz.

(*a*) $f'(x) = 3(2x - 8)^2(2) = 6(2x - 8)^2 = 0$

$$x = 4 \qquad \text{kritik değer}$$

(*b*) $f''(x) = 12(2x - 8)(2) = 24(2x - 8)$

$$f''(4) = 24(8 - 8) = 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

Ardışık yüksek mertebeden türevi alınmaya devam edilir,

$$f''' = 48$$

$$f'''(4) = 48 \neq 0$$

(*c*) Kısım 10.7'de açıklandığı gibi, sıfır olmayan yüksek mertebeden ilk türev tek sayılı olduğundan fonksiyon $x = 4$'te büküm noktasındadır. Kritik değerde yalnızca büküm noktası vardır, bağıl maksimum ve bağıl minimum yoktur.

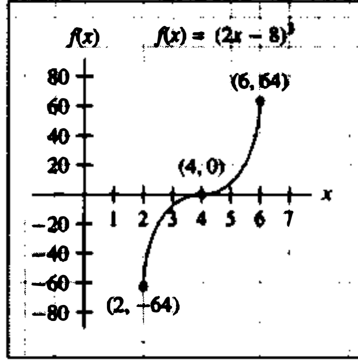
(*d*) $f(4) = 0$ (4, 0) büküm noktası

Büküm noktasının sağı ($x = 5$) ve solu ($x = 3$) için konkavlığı test edin,

$$f''(3) = 24[2(3) - 8] = -48 < 0 \qquad \text{konkav}$$

$$f''(5) = 24[2(5) - 8] = 48 > 0 \qquad \text{konveks}$$

(*e*) Şekil 10-18'e bakınız.



Şekil 10-18

OPTİMİZASYON

10.15. Aşağıdaki ikinci ve üçüncü dereceden fonksiyonları (1) fonksiyonun optimize edildiği kritik değer(ler)i bularak ve (2) bağıl maksimum ve minimumu ayırmak için ikinci dereceden koşulu test ederek optimize ediniz.

(*a*) $y = 9x^2 + 126x - 74$

(1) Birinci türev alınır, sıfıra eşitlenir ve kritik değer(ler)i bulmak için x çözümlenir.

$$y' = 18x + 126 = 0$$

$$x = -7 \qquad \text{kritik değer}$$

(2) İkinci türev alınır, kritik değerler için ikinci türevi hesaplanır ve bağıl maksimum veya minimum için işareti kontrol edilir.

$$y'' = 18$$

$$y''(-7) = 18 > 0 \qquad \text{konveks, bağıl minimum}$$

(*b*) $y = -5x^2 + 90x - 73$

(1) $y' = -10x + 90 = 0$

$$x = 9 \qquad \text{kritik değer}$$

(2) $y'' = -10$

$$y''(10) = -10 < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

(*c*) $y = x^3 + 6x^2 - 96x + 23$

(1)
$$y' = 3x^2 + 12x - 96 = 0$$
$$y' = 3(x^2 + 4x - 32) = 0$$
$$y' = 3(x - 4)(x + 8) = 0$$

$$x = 4 \qquad x = -8 \qquad \text{kritik değerler}$$

(2) $y'' = 6x + 12$

$$y''(4) = 6(4) + 12 = 36 > 0 \qquad \text{konveks, bağıl minimum}$$

$$y''(-8) = 6(-8) + 12 = -36 < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

(*d*) $y = -3x^3 + 40.5x^2 - 162x + 39$

(1) $y' = -9x^2 + 81x - 162 = 0$

$y' = -9(x^2 - 9x + 18)$

$y' = -9(x-3)(x-6) = 0$

$x = 3 \qquad x = 6$ kritik değerler

(2) $y'' = -18x + 81$

$y''(3) = -18(3) + 81 = 27 > 0$ konveks, bağıl minimum

$y''(6) = -18(6) + 81 = -27 < 0$ konkav, bağıl maksimum

10.16. Aşağıdaki yüksek dereceli polinom fonksiyonlarını Problem 10.15'teki aynı işlemleri uygulayarak optimize ediniz.

(*a*) $y = 2x^4 - 8x^3 - 40x^2 + 79$

(1) $y' = 8x^3 - 24x^2 - 80x = 0$

$y' = 8x(x^2 - 3x - 10) = 0$

$y' = 8x(x+2)(x-5) = 0$

$x = 0 \qquad x = -2 \qquad x = 5$ kritik değerler

(2) $y''(2) = 24x^2 - 48x - 80$

$y''(2) = 24(-2)^2 - 48(-2) - 80 = 112 > 0$ konveks, bağıl minimum

$y''(0) = 24(0)^2 - 48(0) - 80 = -80 < 0$ konkav, bağıl maksimum

$y''(5) = 24(5)^2 - 48(5) - 80 = 280 > 0$ konveks, bağıl minimum

(*b*) $y = -5x^4 + 20x^3 + 280x^2 - 19$

(1) $y' = -20x^3 + 60x^2 + 560x = 0$

$y' = -20x(x^2 - 3x - 28) = 0$

$y' = -20x(x+4)(x-7) = 0$

$x = 0 \qquad x = -4 \qquad x = 7$ kritik değerler

(2) $y'' = -60x^2 + 120x + 560$

$y''(-4) = -60(-4)^2 + 120(-4) + 560 = -880 < 0$ konkav, bağıl maksimum

$y''(0) = -60(0)^2 + 120(0) + 560 = 560 > 0$ konveks, bağıl minimum

$y''(7) = -60(7)^2 + 120(7) + 560 = -1540 < 0$ konkav, bağıl maksimum

(*c*) $y = (7 - 2x)^4$

(1) $y' = 4(7-2x)^3(-2) = -8(7-2x)^3 = 0$

$7 - 2x = 0 \qquad x = 3.5$ kritik değer

(2) $y'' = -24(7-2x)^2(-2) = -48(7-2x)^2$

$y''(3.5) = 48[7 - 2(3.5)]^2 = 48(0)^2 = 0$ test geçersiz

Kısım 10.7 ve Problem 10.6'da açıklandığı gibi türev almaya devam edilir,

$$y''' = 96(7-2x)(-2) = -192(7-2x)$$

$$y'''(3.5) = -192(0) = 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

$$y^{(4)} = 384$$

$$y^{(4)}(3.5) = 384 > 0 \qquad \text{konveks, bağıl minimum}$$

(*d*) $y = -2(x+19)^4$

(1) $$y' = -8(x+19)^3 = 0$$

$$x + 19 = 0 \qquad x = -19 \qquad \text{kritik değer}$$

(2) $$y'' = -24(x+19)^2$$

$$y''(-19) = -24(-19+19)^2 = 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

$$y''' = -48(x+19)$$

$$y''(-19) = -48(0) = 0 \qquad \text{test geçersiz}$$

$$y^{(4)} = -48$$

$$y^{(4)}(-19) = -48 < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

MARJİNAL VE ORTALAMA KONULARI

10.17. Aşağıdaki toplam fonksiyonların (1) marjinal ve (2) ortalama fonksiyonlarını bulunuz. Sonuçları $Q = 2$ ve $Q = 4$ için hesaplayınız.

(*a*) $$\text{TC} = Q^2 + 9Q + 16$$

(1) $$\text{MC} = \frac{d\text{TC}}{dQ} = 2Q + 9$$

$$\text{MC}(2) = 2(2) + 9 = 13$$

$$\text{MC}(4) = 2(4) + 9 = 17$$

(2) $$\text{AC} = \frac{\text{TC}}{Q} = Q + 9 + \frac{16}{Q}$$

$$\text{AC}(2) = (2) + 9 + \frac{16}{2} = 19$$

$$\text{AC}(4) = (4) + 9 + \frac{16}{4} = 17$$

Not: Ortalama fonksiyonu bulurken, sabit terimi Q 'ya böldüğünüzden emin olunuz.

(*b*) $$\text{TR} = 24Q - Q^2$$

(1) $$\text{MR} = \frac{dTR}{dQ} = 24 - 2Q$$

$$\text{MR}(2) = 24 - 2(2) = 20$$

$$\text{MR}(4) = 24 - 2(4) = 16$$

(2) $$\text{AR} = \frac{\text{TR}}{Q} = 24 - Q$$

$$\text{AR}(2) = 24 - 2 = 22$$

$$\text{AR}(4) = 24 - 4 = 20$$

(*c*) $$\pi = -Q^2 + 75Q - 12$$

(1) $$M\pi = \frac{d\pi}{dQ} = -2Q + 75$$

$$M\pi(2) = -2(2) + 75 = 71$$

$$M\pi(4) = -2(4) + 75 = 67$$

(2) $$A\pi = \frac{\pi}{Q} = -Q + 75 - \frac{12}{Q}$$

$$A\pi(2) = -(2) + 75 - \frac{12}{2} = 67$$

$$A\pi(4) = -(4) + 75 - \frac{12}{4} = 68$$

10.18. Aşağıdaki talep fonksiyonları için ilgili MR fonksiyonlarını bulunuz ve $Q = 20$ ile $Q = 40$ için hesaplayınız.

(a) $P = -0.1Q + 25$

MR fonksiyonunu bulmak için verilen talep fonksiyonunda önce Q'ya göre TR fonksiyonu hesaplanıp sonra Q'ya göre türev alınır.

$$\text{TR} = PQ = (-0.1Q + 25)Q = -0.1Q^2 + 25Q$$

$$\text{MR} = d\text{TR}/dQ = -0.2Q + 25$$

ve $\text{MR}(20) = -0.2(20) + 25 = 21$

$$\text{MR}(40) = -0.2(40) + 25 = 17$$

(b) $P = -0.5Q + 48$

$$\text{TR} = (-0.5Q + 48)Q = -0.5Q^2 + 48Q$$

$$\text{MR} = d\text{TR}/dQ = -Q + 48$$

ve $\text{MR}(20) = -(20) + 48 = 28$

$$\text{MR}(40) = -(40) + 48 = 8$$

(c) $Q = -4P + 240$

Eğer talep fonksiyonu P'nin bir fonksiyonu olarak verilirse, önce ters fonksiyon bulunur ve sonra TR fonksiyonu elde edilir. Tersi bulunduğunda,

$$P = -0.25Q + 60$$

sonra $\text{TR} = (-0.25Q + 60)Q = -0.25Q^2 + 60Q$

$$\text{MR} = -0.5Q + 60$$

ve $\text{MR}(20) = -0.5(20) + 60 = 50$

$$\text{MR}(40) = -0.5(40) + 60 = 40$$

10.19. Aşağıdaki tüketim fonksiyonlarının marjinal tüketim eğilimini bulmak için **MPC** = dC / dY **türevini** kullanınız.

(a) $C = bY + C_0$
$\text{MPC} = dC/dY = b$

(b) $C = 0.85Y + 1250$
$\text{MPC} = dC/dY = 0.85$

İŞLETME VE İKTİSAT FONKSİYONLARINI OPTİMİZE ETME

10.20. Aşağıdaki toplam gelir TR ve **toplam kâr π fonksiyonlarını (1) kritik değer(ler)i bulup, (2) ikinci** dereceden koşulları test **ederek ve (3) maksimum TR veya π değerlerini hesaplayarak maksimize** ediniz.

(a) $\text{TR} = 96Q - 2Q^2$

(1) $\text{TR}' = 96 - 4Q = 0$

$Q = 24$ kritik değer

(2) $\text{TR}'' = -4 < 0$ konkav, bağıl maksimum

(3) $\text{TR} = 96(24) - 2(24)^2 = 1152$

(b) $\pi = -Q^2 + 25Q - 12$

(1) $\pi' = -2Q + 25 = 0$

$Q = 12.5$ kritik değer

(2) $\pi'' = -2 < 0$ konkav, bağıl maksimum

(3) $\pi = -(12.5)^2 + 25(12.5) - 12 = 144.25$

(*c*) $\pi = -1/3Q^3 - 7.5Q^2 + 450Q - 200$

(1) $\pi' = -Q^2 - 15Q + 450 = 0$ (*10.1*)

$-1(Q^2 + 15Q - 450) = 0$ (*10.2*)

$$(Q - 15)(Q + 30) = 0$$

$Q = 15$ $Q = -30$ kritik değerler

(2) $\pi'' = -2Q - 15$

$\pi''(15) = -2(15) - 15 = -45 < 0$ konkav, bağıl maksimum

$\pi''(-30) = -2(-30) - 15 = 45 > 0$ konveks, bağıl minimum

Negatif kritik değerler iktisadi olarak önemsiz olduğu için dikkate alınmayacaktır.

(3) $\pi = -1/3(15)^3 - 7.5(15)^2 + 450(15) - 200 = 3737.50$

Not: İkinci dereceden koşullar 2. adımda olduğu gibi test edilirken negatif sayı parantezine alınmadan önce daima orijinal birinci türevden (*10.1*) ikinci türev alınır. (*10.2*)'deki gibi negatif sayı parantezine alındıktan sonra birinci türevden ikinci türevin alınması ikinci dereceden koşulları tersine çevirecek ve fonksiyonun $Q = -30$'da maksimum ve $Q = 15$'te minimum olduğunu gösterecektir. Bunu siz test ediniz.

(*d*) $\pi = -2Q^3 - 15Q^2 + 3000Q - 1200$

(1) $\pi' = -6Q^2 - 30Q + 3000 = 0$
$= -6(Q^2 + 5Q - 500) = 0$
$= -6(Q^2 - 20)(Q + 25) = 0$

$Q = 20$ $Q = -25$ kritik değerler

(2) $\pi'' = -12Q - 30$

$\pi''(20) = -12(20)^2 - 30 = -270 < 0$ konkav, bağıl maksimum

(3) $\pi = -2(20)^3 - 15(20)^2 + 3000(20) - 1200 = 36,800$

10.21. Aşağıdaki toplam maliyet TC fonksiyonlarından, (1) ortalama maliyet AC fonksiyonunu bulunuz, (2) AC'nin minimum olduğu kritik değerleri ve (3) minimum ortalama maliyeti bulunuz.

(*a*) $TC = 2Q^3 - 12Q^2 + 225Q$

(1) $$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{2Q^3 - 12Q^2 + 225Q}{Q} = 2Q^2 - 12Q + 225$$

(2) $AC' = 4Q - 12 = 0$ $Q = 3$

$AC'' = 4 > 0$ konveks, bağıl minimum

(3) $AC(3) = 2(3)^2 - 12(3) + 225 = 207$

(*b*) $TC = Q^3 - 16Q^2 + 450Q$

(1) $$AC = \frac{Q^3 - 16Q^2 + 450Q}{Q} = Q^2 - 16Q + 450$$

(2) $AC' = 2Q - 16 = 0$

$AC = 2 > 0$ konveks, bağıl minimum

(3) $AC = (8)^2 - 16(8) + 450 = 386$

10.22. Aşağıda farklı firmalar için verilen toplam gelir TR ve toplam maliyet TC fonksiyonları için firmaların kârını π şu şekilde maksimize ediniz: (1) π = TR – TC fonksiyonunu oluşturunuz, (2) bağıl ekstremum olan π kritik değer(ler)ini bulunuz ve ikinci dereceden koşulları test ediniz ve (3) maksimum kârı hesaplayınız.

(*a*) $\text{TR} = 440Q - 3Q^2 \qquad \text{TC} = 14Q + 225$

(1) $\pi = 440Q - 3Q^2 - (14Q + 225)$

$\pi = -3Q^2 + 426Q - 224$

(2) $\pi' = -6Q + 426 = 0$

$$Q = 71 \qquad \text{kritik değer}$$

$$\pi'' = -6 < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

(3) $\pi = -3(71)^2 + 426(71) - 225 = 14{,}898$

(*b*) $\text{TR} = 800Q - 7Q^2 \qquad \text{TC} = 2Q^3 - Q^2 + 80Q + 150$

(1) $\pi = 800Q - 7Q^2 - (2Q^3 - Q^2 + 80Q + 150)$

$= -2Q^3 - 6Q^2 + 720Q - 150$

(2) $\pi' = -6Q^2 - 12Q + 720 = 0 \qquad (10.3)$

$= -6(Q^2 + 2Q - 120) = 0$

$= -6(Q - 10)(Q + 12) = 0$

$$Q = 10 \qquad Q = -12 \qquad \text{kritik değerler}$$

Problem 10.20 (*c*)'de açıklandığı gibi *(10.3)*'ten direkt ikinci türev alınır ve bütün negatif değerler göz ardı edilir,

$$\pi'' = -12Q - 12$$

$$\pi''(10) = -12(10) - 12 = -132 < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

(3) $\pi = -2(10)^3 - 6(10)^2 + 720(10) - 150 = 4450$

(*c*) $\text{TR} = 3200Q - 9Q^2, \qquad \text{TC} = Q^3 - 1.5Q^2 + 50Q + 42$

(1) $\pi = 3200Q - 9Q^2 - (Q^3 - 1.5Q^2 + 50Q + 425)$

$= -Q^3 - 7.5Q^2 + 3150Q - 425$

(2) $\pi' = -3Q^2 - 15Q + 3150 = 0$

$= -3(Q^2 + 5Q - 1050) = 0$

$= -3(Q - 30)(Q + 35) = 0$

$$Q = 30 \qquad Q = -35 \qquad \text{kritik değerler}$$

$$\pi'' = -6Q - 15$$

$$\pi''(30) = -6(30) - 15 = -195 < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

(3) $\pi = -(30)^3 - 7.5(30)^2 + 3150(30) - 425 = 60{,}325$

(*d*) $\text{TR} = 500Q - 11Q^2, \qquad \text{TC} = 3Q^3 - 2Q^2 + 68Q + 175$

(1) $\pi = 500Q - 11Q^2 - (3Q^3 - 2Q^2 + 68Q + 175)$

$= -3Q - 9Q^2 + 432Q - 175$

(2) $\pi' = -9Q^2 - 18Q + 432 = 0$

$= -9(Q^2 + 2Q - 48) = 0$

$= -9(Q - 6)(Q + 8) = 0$

$Q = 6 \qquad Q = -8$ kritik değerler

$$\pi'' = -18Q - 18$$

$\pi''(6) = -18(6) - 18 = -126 < 0$ konkav, bağıl maksimum

(3) $\pi = -3(6)^3 - 6(6)^2 + 432(6) - 175 = 1445$

10.23. Kârı maksimize eden çıktı seviyesinde marjinal maliyetin (MC) marjinal gelire (MR) eşit olması gerektiğini gösteriniz.

Tanım olarak, π = TR – TC'dir. π'nin maksimum olması için $d\pi/dQ$'nın sıfıra eşit olması gereklidir. Bu yüzden türev alınıp sıfıra eşitlenir,

$$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{d\text{TR}}{dQ} - \frac{d\text{TC}}{dQ} = 0$$

Cebirsel çözüm yapılır, $d\text{TR}/dQ$ = MR, $d\text{TC}/dQ$ = MC olduğunu hatırlayın,

$$\frac{d\text{TR}}{dQ} = \frac{d\text{TC}}{dQ}$$

$$\text{MR} = \text{MC}$$

10.24. TR ve TC denklemleri aşağıdaki gibi olmak üzere, MR = MC formülünü (*a*) kârı π maksimize etmek ve (*b*) ikinci dereceden koşulları kontrol etmek için kullanınız.

$$\text{TR} = 800Q - 7Q^2 \qquad \text{TC} = 2Q^3 - Q^2 + 80Q + 150$$

(*a*) $\text{MR} = \text{TR}' = 800 - 14Q \qquad \text{MC} = \text{TC}' = 6Q^2 - 2Q + 80$

Maksimum kâr için MR = MC eşitlenir,

$$800 - 14Q = 6Q^2 - 2Q + 80$$

Q yu çözümlemek için tüm değerler sağ tarafa alınır,

$$6Q^2 + 12Q - 720 = 0$$

$$6(Q^2 + 2Q - 120) = 0$$

$$6(Q - 10)(Q + 12) = 0$$

$Q = 10 \qquad Q = -12$ kritik değerler

(*b*) $\text{TR}'' = -14 \qquad \text{TC}'' = 12Q - 2$

Amaç π'yi maksimize etmek ve π = TR – TC olduğundan TR″ den TC″ yi çıkardığınıza emin olunuz veya ikinci derece koşulları ters alacak ve yanlış kritik değer seçeceksiniz.

$\pi'' = \text{TR}'' - \text{TC}''$

$= -14 - 12Q + 2 = -12Q - 12$

$\pi''(10) = -12(10) - 12 = -132 < 0$ konkav, bağıl maksimum

Sonuçları Problem 10.22 (*b*) ile karşılaştırınız.

10.25. Verilen TR ve TC denklemleri için Problem 10.24. sorularını tekrar çözünüz.

$$\text{TR} = 500Q - 11Q^2 \qquad \text{TC} = 3Q^3 - 2Q^2 + 68Q + 175$$

(*a*) $\text{MR} = \text{TR}' = 500 - 22Q \qquad \text{MC} = \text{TC}' = 9Q^2 - 4Q + 68$

MR = MC eşitlenir,

$$500 - 22Q = 9Q^2 - 4Q + 68$$

Her şey eşitliğin sağ tarafına alınır,

$$9Q^2 + 18Q - 432 = 0$$

$$9(Q^2 + 2Q - 48) = 0$$

$$9(Q - 6)(Q + 8) = 0$$

$$Q = 6 \qquad Q = -8 \qquad \text{kritik değerler}$$

(*b*) $$TR'' = -22 \qquad TC'' = 18Q - 4$$

İkinci dereceden koşulları ters almamak için TR″ den TC″ nin çıkarıldığına emin olunur, denklem hatırlayınız.

$$\pi'' = TR'' - TC''$$

$$\pi'' = -22 - 18Q + 4 = -18Q - 18$$

$$\pi''(6) = -18(6) - 18 = -126 < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

Problem 10.22 (*d*) ile karşılaştırınız.

FONKSİYON VE GRAFİKLER ARASINDAKİ İLİŞKİ

10.26. Bir girdinin *toplam ürün eğrisi* TP, diğer girdiler (sermaye, toprak) sabit tutulurken tek bir girdinin (emek dersek) miktarında değişime izin veren bir üretim fonksiyonudur. $TP = 562.5L^2 - 15L^3$ olmak üzere, (*a*) toplam kâr (TP), (*b*) ortalama kâr (AP), (*c*) marjinal ürün (MP) eğrisinin grafiğini çiziniz ve (*d*) aralarındaki ilişkiyi açıklayınız.

(*a*) Kritik değerlerin olup olmadığını bulmak için birinci dereceden koşullar test edilir,

$$TP' = 1125L - 45L^2 = 0$$
$$45L(25 - L) = 0$$

$$L = 0 \qquad L = 25 \qquad \text{kritik değerler}$$

İkinci dereceden koşullar kontrol edilir,

$$TP'' = 1125 - 90L$$

$$TP''(0) = 1125 > 0 \qquad \text{konveks, bağıl minimum}$$

$$TP''(25) = -1125 < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

Büküm noktaları aranır,

$$TP'' = 1125 - 90L = 0$$

$$L = 12.5$$

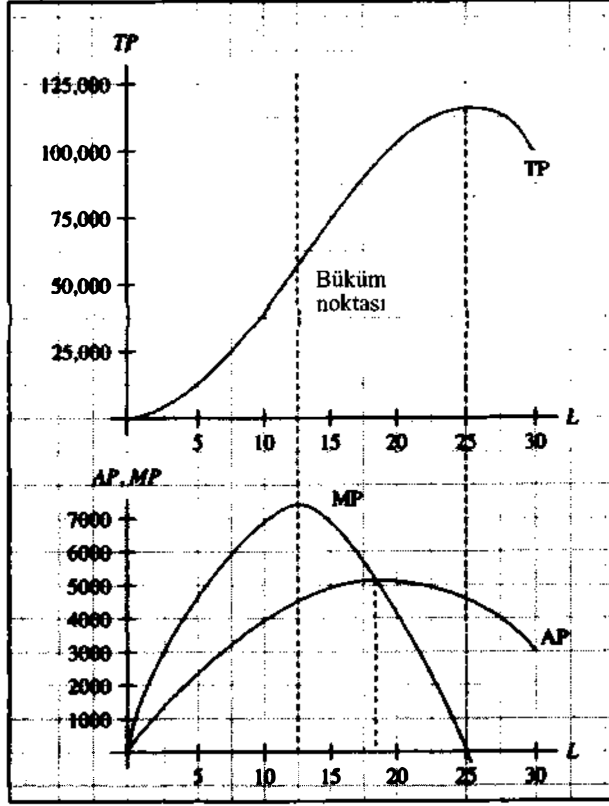
$L < 12.5$ için

$$TP'' > 0 \text{ konveks}$$

$L > 12.5$ için

$$TP'' < 0 \text{ konkav}$$

Şekil 10-19'a bakınız.



Şekil 10-19

(*b*) $$\text{AP}_L = \frac{\text{TP}}{L} = \frac{562.5L^2 - 15L^3}{L} = 562.5L - 15L^2$$

Ekstremumları kontrol edilir,

$$\text{AP}'_L = 562.5 - 30L = 0$$

$$L = 18.75$$

$$\text{AP}''_L = -30L < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

$$\text{AP}_L(18.75) \approx 5273.43$$

(*c*) $\text{MP}_L = \text{TP}' = 1125L - 45L^2$ olduğu anımsanır ve optimize edilir,

$$\text{MP}'_L = 1125 - 90L = 0$$

$$L = 12.5$$

$$\text{MP}''_L = -90 < 0 \qquad \text{konkav, bağıl maksimum}$$

$$\text{MP}_L(12.5) = 7031.25$$

(*d*) 3 duruma dikkat etmeliyiz: (1) MP_L, TP konveks ve bu nedenle artarak artan olduğunda artar, TP büküm noktasında iken maksimumdadır ve TP konkav ve dolayısıyla azalarak artan ise azalır. (2) MP_L'nin pozitif olduğu tüm bölgede TP artar, $\text{MP}_L = 0$ ise maksimumdadır ve MP_L negatif olduğunda azalır. (3) $\text{MP}_L > \text{AP}_L$ ise AP_L artar, $\text{MP}_L < \text{AP}_L$ ise AP_L azalır ve orijinden TP eğrisine düz doğrunun eğimi TP eğrisinin teğeti olduğu noktadaki $\text{MP}_L = \text{AP}_L$ da maksimumdadır.

10.27. $y = ax^2 + bx + c$ verilmek üzere parabolün tepe noktasının koordinatlarının $[-b/2a, (4ac - b^2)/4a]$ sıralı ikilisi olduğunu Kısım 3.6 da gösterdiğimiz gibi ispatlayınız.

Tepe noktası bir parabolün maksimum veya minimum noktasıdır. Verilen fonksiyonda x kritik noktası bulunarak optimize edilir,

$$y' = 2ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Sonra $x = -b/2a$ yerine yazarak fonksiyon y için çözümlenir,

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad \text{Q. E. D.}$$

Ek Sorular

ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

10.28. Aşağıdaki fonksiyonların istenen noktalarda artan veya azalan olup olmadığını gösteriniz.

(*a*) $x = 3$ için $f(x) = 5x^2 - 4x - 89$
(*b*) $x = -4$ için $f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 15x$
(*c*) $x = 5$ için $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 7x + 9$
(*d*) $x = 2$ için $f(x) = 2x^3 - 17x^2 + 5x + 127$

KONKAVLIK VE KONVEKSLİK

10.29. $x = 3$ için aşağıdaki fonksiyonların konkav veya konveks olup olmadığını belirleyiniz.

(*a*) $f(x) = 7x^2 + 19x - 24$
(*b*) $f(x) = 5x^3 - 81x^2 + 11x + 97$
(*c*) $f(x) = (4 - 9x)^3$
(*d*) $f(x) = (3x^4 - 7)^2$

BAĞIL EKSTREMUM VE BÜKÜM NOKTASI

10.30. Aşağıdaki fonksiyonların her biri için bağıl ekstremum ve büküm noktalarını bulunuz ve grafiklerini kendiniz çiziniz.

(*a*) $f(x) = 4x^3 - 48x^2 - 240x + 29$
(*b*) $f(x) = (x + 6)^3$
(*c*) $f(x) = -2x^3 + 24x^2 + 288x - 35$
(*d*) $f(x) = (2x + 7)^4$
(*e*) $f(x) = -5x^3 + 135x^2 - 675x + 107$
(*f*) $f(x) = -3(4x - 11)^6$
(*g*) $f(x) = 3x^3 - 58.5x^2 + 360x - 49$
(*h*) $f(x) = 2(5x - 13)^5$

FONKSİYONLARIN OPTİMİZASYONU

10.31. Aşağıdaki fonksiyonları optimize ediniz ve bağıl maksimum ve bağıl minimumu ayırmak için kritik noktalarda ikinci dereceden koşulları test ediniz.

(*a*) $y = 8x^2 - 208x + 73$
(*b*) $y = -12x^2 + 528x + 95$
(*c*) $y = -2x^3 + 69x^2 + 1260x - 9$
(*d*) $y = x^3 + 27x^2 + 96x - 47$
(*e*) $y = 3x^3 - 45x^2 - 675x^2 + 13$
(*f*) $y = -4x^3 + 186x^2 - 1008x + 25$
(*g*) $y = x^4 + 36x^3 + 280x^2 - 79$
(*h*) $y = 4x^4 - 48x^3 - 288x^2 + 129$

MARJİNAL VE ORTALAMA FONKSİYONLAR

10.32. Aşağıda verilen toplam fonksiyonlar için marjinal ve ortalama fonksiyonları bulunuz:

(*a*) $TR = -Q^2 + 96Q$ (*b*) $TR = -3Q^2 + 198Q$

(*c*) $TC = Q^2 + 3Q + 55$ (*d*) $TC = 0.5Q^2 + 2Q + 69$

10.33. Aşağıdaki talep fonksiyonu ile ilgili olan marjinal gelir fonksiyonlarını bulunuz:

(*a*) $P = -0.3Q + 228$ (*b*) $P = -8Q + 1465$

(*c*) $P = -2.5Q + 145$ (*d*) $P = -4Q + 875$

İŞLETME VE İKTİSAT FONKSİYONLARINI OPTİMİZE ETME

10.34. Aşağıdaki toplam gelir TR fonksiyonu ve kâr π fonksiyonlarının maksimum olduğu kritik noktaları bulunuz. İkinci dereceden koşulları kendiniz kontrol ediniz.

(*a*) $TR = -3Q^2 + 210Q$ (*b*) $\pi = -2.5Q^2 + 315Q - 16$

(*c*) $\pi = -3Q^3 - 18Q^2 + 2880Q - 125$ (*d*) $\pi = -2Q^3 - 9Q^2 + 1080Q - 48$

10.35. Aşağıdaki ortalama maliyet AC fonksiyonunun minimum olduğu kritik noktaları bulunuz. İkinci dereceden koşulları kendiniz kontrol ediniz.

(*a*) $AC = 3Q^2 - 18Q + 585$ (*b*) $AC = 2.25Q^2 - 27Q + 768$

10.36. Aşağıda verilen firmaların toplam gelir TR ve toplam maliyet TC fonksiyonlarının her biri için kârı π maksimum yapan kritik noktaları bulunuz. İkinci dereceden koşulları kendiniz kontrol ediniz.

(*a*) $TR = 520Q - 2Q^2$ $TC = 28Q + 176$ (*b*) $TR = 693Q - 4Q^2$ $TC = 33Q + 125$

(*c*) $TR = 98Q - 17Q^2$ $TC = 5Q^3 - 2Q^2 + 40Q + 167$

(*d*) $TR = 387Q - 27Q^2$ $TC = 4Q^3 - 3Q^2 + 35Q + 223$

(*e*) $TR = 1526Q - 9Q^2$ $TC = Q^3 - 1.5Q^2 + 26Q + 127$

(*f*) $TR = 4527Q - 18Q^2$ $TC = 2Q^3 - 3Q^2 + 27Q + 324$

Ek Soruların Cevapları

10.28. (*a*) artan (*b*) artan (*c*) azalan (*d*) azalan

10.29. (*a*) konveks (*b*) konkav (*c*) konkav (*d*) konveks

10.30. (*a*) $x = -2$ bağıl maksimum, $x = 4$ büküm noktası, $x = 10$ bağıl minimum

(*b*) $x = -6$ büküm noktası; bağıl minimum veya maksimum yok

(*c*) $x = 12$ bağıl maksimum, $x = 4$ büküm noktası, $x = -4$ bağıl minimum

(*d*) $x = -3.5$ bağıl minimum, büküm noktası veya bağıl maksimum yok

(*e*) $x = 15$ bağıl maksimum, $x = 9$ büküm noktası, $x = 3$ bağıl minimum

(*f*) $x = 2.75$ bağıl maksimum, büküm noktası veya bağıl minimum yok

(*g*) $x = 5$ bağıl maksimum, $x = 6.5$ büküm noktası, $x = 8$ bağıl minimum

(*h*) $x = 2.6$ büküm noktası, bağıl minimum veya maksimum yok

10.31. (*a*) $x = 13$ bağıl minimum (*b*) $x = 22$ bağıl maksimum

(*c*) $x = 30$ bağıl maksimum, $x = -7$ bağıl minimum

(*d*) $x = -16$ bağıl maksimum, $x = -2$ bağıl minimum

(*e*) $x = -5$ bağıl maksimum, $x = 15$ bağıl minimum

(*f*) $x = 3$ bağıl minimum, $x = 28$ bağıl maksimum

(*g*) $x = -20$ bağıl minimum, $x = -7$ bağıl maksimum, $x = 0$ bağıl minimum

(*h*) $x = -3$ bağıl minimum, $x = 0$ bağıl maksimum, $x = 12$ bağıl minimum

10.32. (*a*) $MR = -2Q + 96, AR = -Q + 96$ (*b*) $MR = -6Q + 198, AR = -3Q + 198$
(*c*) $MC = 2Q + 3, AC = Q + 3 + 55/Q$ (*d*) $MC = Q + 2, AC = 0.5Q + 2 + 69/Q$

10.33. (*a*) $MR = -0.6Q + 228$ (*b*) $MR = -16Q + 1465$
(*c*) $MR = -5Q + 145$ (*d*) $MR = -8Q + 875$

10.34. (*a*) $Q = 35$ (*b*) $Q = 63$ (*c*) $Q = 16$ (*d*) $Q = 12$

10.35. (*a*) $Q = 3$ (*b*) $Q = 6$

10.36. (*a*) $Q = 123$ (*b*) $Q = 82.5$ (*c*) $Q = 7$
(*d*) $Q = 16$ (*e*) $Q = 20$ (*f*) $Q = 25$

Bölüm 11

ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

11.1 ÜSTEL FONKSİYONLAR

Önceki bölümlerde $y = x^a$ gibi x değişken tabanının sabit bir a kuvvetinin alındığı üslü fonksiyonlarla uğraşıldı. Bu bölümde a sabit tabanının x değişken üssü ile kuvvetinin alındığı yeni bir fonksiyon anlatılacaktır. Bu fonksiyon üstel fonksiyon olarak isimlendirilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$y = a^x, \; a > 0, \; a \neq 1$$

Yaygın olarak bileşke faiz ya da amortisman gibi azalma ve artma oranlarını ifade etmek için kullanılan üstel fonksiyonlar aşağıdaki genel özelliklere sahiptir. $y = a^x$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere,

1. Fonksiyonun tanım kümesi reel sayılardan, değer kümesi ise pozitif reel sayılardan oluşur, yani tüm x değerleri için, hatta $x \leq 0$ için $y > 0$'dır.
2. $a > 1$ için, fonksiyon artan ve konvekstir; $0 < a < 1$ için ise fonksiyon azalan ve konvekstir.
3. $x = 0$ iken tabandan bağımsız olarak $y = 1$'dir.

Örnek 1 ve Problem 11.1 ile 11.2'ye bakınız; üslü sayıları gözden geçirmek için Kısım 1.1 ve Problem 1.1'e bakınız.

ÖRNEK 1. (*a*) $y = 3^x$ ve (*b*) $y = 3^{-3} = (\frac{1}{3})^x$ olmak üzere, üstel fonksiyonların yukarıdaki özellikleri tablolardan ve Şekil 11-1'deki fonksiyonların grafiklerinden kolayca görülebilir. Daha karmaşık üstel fonksiyonlar hesap makinesinin $\boxed{y^x}$ tuşu yardımıyla hesaplanabilir.

(*a*) $y = 3^x$

x	y
−3	$\frac{1}{27}$
−2	$\frac{1}{9}$
−1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

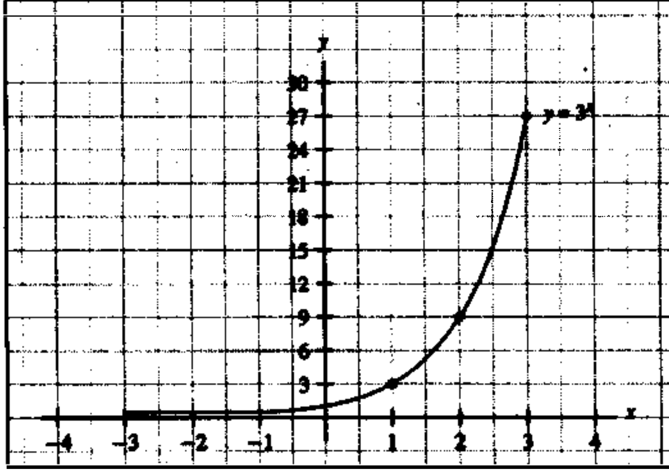
(*b*) $y = 3^{-x} = (\frac{1}{3})^x$

x	y
−3	27
−2	9
−1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{27}$

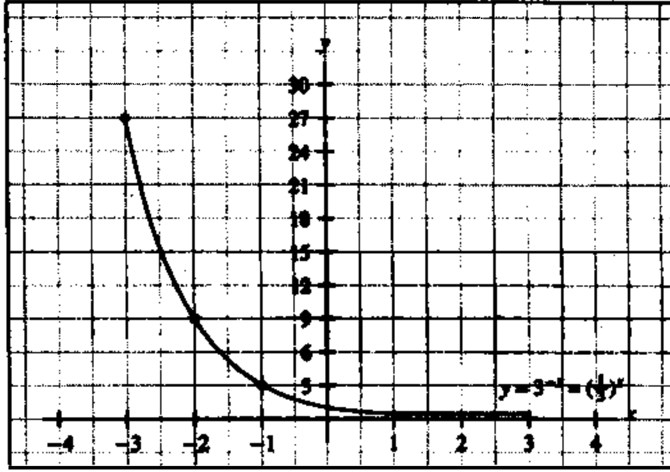
11.2 LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

$y = a^x$ şeklinde tanımlanan f üstel fonksiyonunun değişkenleri yer değiştirdiğinde $x = a^y$ şeklinde tanımlanan f de ki herhangi sıralı ikililerin g de ters sıralı halde bulunacağı yeni bir g fonksiyonu ortaya çıkar. Örneğin, $f(2) = 9$ için $g(9) = 2$, $f(3) = 27$ için $g(27) = 3$'tür. f üstel fonksiyonunun tersi olan yeni g fonksiyonu, *a tabanlı logaritmik fonksiyon* olarak adlandırılır. $x = a^y$ yerine, a tabanındaki logaritmik fonksiyon yaygın olarak aşağıdaki gibi yazılır,

$$y = \log_a x \qquad a > 0, \qquad a \neq 1$$


y
30
27
24
21
18
15
12
9
6
3
x
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
$y = 3^x$

(a)


y
30
27
24
21
18
15
12
9
6
3
x
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
$y = 3^{-x} = (\frac{1}{3})^x$

(b)

Şekil 11-1

$\log_a x$ x'i elde etmek için a'nın bir kuvveti olarak alınması gereken üstür. 1 dışındaki herhangi bir pozitif sayı logaritmanın tabanı olarak kullanılabilir. *x'in bayağı logaritması,* $\log_{10} x$ veya basitçe $\log x$ şeklinde yazılan, x'i elde etmek için 10'un kuvveti şeklinde alınması gereken üsteldir. Logaritmalar aşağıdaki özelliklere sahiptir. $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ olmak üzere,

1. Fonksiyonun tanım kümesi pozitif reel sayılardan, değer kümesi tüm reel sayılardan oluşur.- üstel fonksiyonun tam tersidir.
2. Taban $a > 1$ ise $g(x)$ artan ve konkavdır. $0 < a < 1$ için $g(x)$ azalan ve konvekstir.
3. $x = 1$ iken tabandan bağımsız olarak $y = 0$'dır.

Örnek 2'den 4'e kadar ve Problem 11.5 ve 11.6'ya bakınız.

ÖRNEK 2. Şekil 11-2'de ki $y = (\frac{1}{2})^x$ ve $x = (\frac{1}{2})^y$ gibi, x ve y'nin yerlerinin değiştirildiği f ve g fonksiyonlarının grafiği, örneğin $f(x) = y$ ise $g(y) = x$ gibi, $y = x$ 45° doğrusu boyunca bir fonksiyonun diğer fonksiyonun ters görüntüsü olduğunu gösterir. $x = (\frac{1}{2})^y$ 'in genellikle denk olduğu $y = \log_{1/2} x$ olarak ifade edildiğini hatırlayınız.

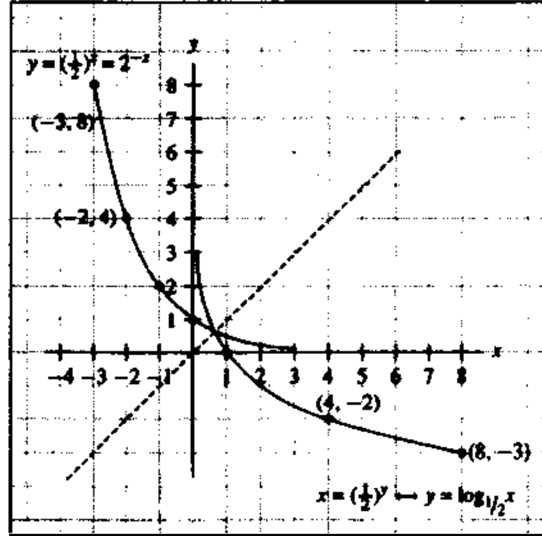
$$(a) \quad y = (\frac{1}{2})^x \qquad\qquad (b) \quad y = \log_{1/2} x \leftrightarrow x = (\frac{1}{2})^y$$

(a)

x	y
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

(b)

x	y
8	−3
4	−2
2	−1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3



Şekil 11-2

ÖRNEK 3. x'i elde etmek için x'in bayağı logaritmasının 10'un kuvveti şeklinde alınması gerektiği bilinir ve aşağıdaki gibidir:

$\log 10 = 1$ için $10^{(1)} = 10$	$\log 1 = 0$ için $10^0 = 1$
$\log 100 = 2$ için $10^{(2)} = 100$	$\log .1 = -1$ için $10^{-1} = .1$
$\log 1000 = 3$ için $10^{(3)} = 1000$	$\log .01 = -2$ için $10^{-1} = .01$

ÖRNEK 4. Sayılar tabanın tam kuvveti olduğunda logaritmaları hesap makinesi olmaksızın kolayca hesaplanır.

$8^2 = 64$ olduğu için $\log_8 64 = 2$	$3^4 = 81$ olduğu için $\log_3 81 = 4$
$25^{1/2} = 5$ olduğu için $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$	$27^{1/3} = 5 = 3$ olduğu için $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$
$2^{-4} = \frac{1}{16}$ olduğu için $\log_2 \frac{1}{16} = -4$	$3^{-1} = \frac{1}{9}$ olduğu için $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

Tabanın tam kuvveti olmadığında ise logaritma tablosu veya hesap makinesine ihtiyaç duyulur. Kısım 1.7.9'a bakınız.

11.3 ÜSLÜLERİN VE LOGARİTMALARIN ÖZELLİKLERİ

$a, b > 0$; $a, b \neq 1$ ve x ve y herhangi reel sayılar olmak üzere,

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $1/a^x = a^{-x}$
3. $a^x/a^y = a^{x-y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
6. $a^x/b^x = (a/b)^x$

a, x ve y pozitif reel sayılar, n reel bir sayı ve $a \neq 1$ için,

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^n = n \log_a x$
4. $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}(\log_a x)$

Üslülerin özellikleri Kısım 1.1 ve Problem 1.1'de anlatılmıştı. Logaritma özellikleri Örnek 5 ve Problem 11.12'den 11.16'ya kadar işlenmiştir.

TABLO 11-1

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
1	0.0000	6	0.7782	11	1.0414	16	1.2041
2	0.3010	7	0.8451	12	1.0792	27	1.4314
3	0.4771	8	0.9031	13	1.1139	36	1.5563
4	0.6021	9	0.9542	14	1.1461	49	1.6902
5	0.6990	10	1.0000	15	1.1761	64	1.8062

ÖRNEK 5. Aşağıdaki örnekler basit tutulmuş ve Tablo 11-1'de gösterilen logaritma özellikleri kullanılarak çözülmüştür.

(*a*) $x = 3 \cdot 12$

$\log x = \log 3 + \log 12$

$\log x = 0.4771 + 1.0792$

$\log x = 1.5563$

$x = 36$

(*b*) $x = 64 \div 4$

$\log x = \log 64 - \log 4$

$\log x = 1.8062 - 0.6021$

$\log x = 1.2041$

$x = 16$

(*c*) $x = 7^2$

$\log x = 2 \log 7$

$\log x = 2(0.8451)$

$\log x = 1.6902$

$x = 49$

(*d*) $x = \sqrt[3]{27}$

$\log x = \frac{1}{3} \log 27$

$\log x = \frac{1}{3}(1.4314)$

$\log x = 0.4771$

$x = 3$

11.4 DOĞAL ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

Üstel ve logaritmik fonksiyonlarda en sık kullanılan taban irrasyonel bir sayı olan e dir. Matematiksel olarak ifadesi,

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828 \qquad (11.1)$$

e tabanlı üstel fonksiyonlar ***doğal üstel fonksiyonlar*** olarak isimlendirilir ve $y = e^x$ şeklinde yazılır; e tabanlı logaritmik fonksiyonlar ise ***doğal logaritmik fonksiyonlar*** olarak isimlendirilir ve $y = \log_e x$ veya daha sık olarak $\ln x$ şeklinde ifade edilir. $\ln x$ basitçe x'i elde etmek için e kuvveti veya üssü olarak alınmasıdır.

Ortak tabana sahip diğer üstel ve logaritmik fonksiyonlarda olduğu gibi, (a, b) sıralı ikilisi eğer e^x'e ait iken (b, a) sıralı ikilisi sadece ve sadece $\ln x$'e aitse, fonksiyon diğerinin tersidir. Doğal üstel ve logaritmik fonksiyonlar diğer üstel ve logaritmik fonksiyonlarla aynı özelliklere sahiptir ve hesap makinasında ki $\boxed{e^x}$ ve $\boxed{\ln x}$ tuşları veya tablolar yardımıyla hesaplanır. Kısım 1.7.10 ile 1.7.12'ye ve Problem 11.3, 11.4 ve 11.6'ya bakınız.

11.5 DOĞAL ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARIN ÇÖZÜMÜ

Doğal üstel fonksiyonlar ve doğal logaritmik fonksiyonlar birbirinin tersi olduğu için birini çözmek genellikle diğerini çözmemize de yardımcı olur. x'i elde etmek için $\ln x$'in e nin kuvveti şeklinde alınması gerektiğine dikkat ediniz, buna göre

1. Bir sabitin ($a > 0$), bir değişkenin ($x > 0$) veya bir değişkenin fonksiyonunun $[f(x)]$ doğal logaritması e'nin kuvveti olarak alındığında sonuç bu sabit, değişken veya değişkenin fonksiyonuna eşit olmalıdır:

$$e^{\ln a} = a \qquad e^{\ln x} = x \qquad e^{\ln f(x)} = f(x) \qquad (11.2)$$

2. Tersine, e'nin doğal logaritmasının sabit, değişken veya değişkenin fonksiyonu şeklinde kuvveti alındığında, sonuç yine bu sabit, değişken veya değişkenin fonksiyonuna eşit olmalıdır:

$$\ln e^a = a \qquad \ln e^x = x \qquad \ln e^{f(x)} = f(x) \qquad (11.3)$$

Örnek 6 ile Problem 11.18 ve 11.19'a bakınız.

ÖRNEK 6. (*11.2*) ve (*11.3*)'te verilen kurallardan yola çıkarak aşağıda verilen denklemlerde x'i bulunuz.

(*a*) $7.5e^{x-3} = 150$

e^{x-3} için çözülür,

$$7.5e^{x-3} = 150$$

$$e^{x-3} = 20$$

e'yi yok etmek için iki tarafın da doğal logaritması alınır,

$$\ln e^{x-3} = \ln 20$$

(*11.3*)'ten

$$x - 3 = \ln 20$$

$$x = \ln 20 + 3$$

Hesap makinenize 20 girilir ve $\ln 20 = 2.99573$ bulmak için $\boxed{\ln x}$ tuşuna basılır. Sonra yerine koyulur ve çözülür.

$$x = 2.99573 + 3 = 5.99573$$

(*b*) $4 \ln x + 9 = 30.6$

$\ln x$ için çözülür,

$$4 \ln x = 21.6$$
$$\ln x = 5.4$$

Doğal logaritma ifadesini yok etmek için iki taraf da e'nin kuvveti olarak alınır,

$$e^{\ln x} = e^{5.4}$$

(*11.2*)'den

$$x = e^{5.4}$$

Hesap makinesine 5.4 girilir ve $\boxed{e^x}$ tuşuna basılarak $e^{5.4} = 221.40642$ bulunur ve yerine koyulur.

$$x = 221.40642$$

Not: Birçok hesap makinesinde [e^x] tuşu [ln x] tuşunun tersidir (shift veya ikinci fonksiyon) ve [e^x] tuşunun aktive edilmesi için [ln x] tuşunun ardından [INV] ([Shift] veya [2dF]) tuşuna basılmalıdır.

11.6 DOĞRUSAL OLMAYAN FONKSİYONLARIN LOGARİTMİK DÖNÜŞÜMÜ

Doğrusal fonksiyon veya denklemler varsayımı lineer cebir ve sıradan ve iki aşamalı en küçük kareler yöntemi kullanılan regresyon analizi, ile ekonomik analizin ortak araçlarıdır. Cobb-Douglas üretim fonksiyonu gibi bazı önemli doğrusal olmayan fonksiyonlar, logaritmik dönüşümlerle kolayca doğrusal fonksiyonlara dönüştürülür. Genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonu,

$$q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

olmak üzere, logaritmanın özelliklerinden açıktır ki

$$\ln q = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L \qquad (11.4)$$

logaritmik doğrusal fonksiyondur. Ayrıca (*11.4*) de olduğu gibi Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun doğrusal dönüşümü, α ve β sırasıyla *K* ve *L* nin *üretim esnekliğinin* doğrudan ölçümlerini sağladığı için tahminler iyi bir ek özelliğe de sahiptir.

11.7 DOĞAL ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONUN TÜREVİ

Doğal üstel ve logaritmik fonksiyonların türev alma kuralları aşağıda anlatılmış, Örnek 7 ve 8'de gösterilmiş ve Problem 11.20'den 11.23'e kadar uygulama yapılmıştır. Konunun daha detaylı uygulaması ve kuralların ispatı için Dowling, *Shaum's Outline of Introduction to Mathematical Economics* kitabı Bölüm 9'a bakınız.

1) $g(x)$, x için türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, $f(x) = e^{g(x)}$ için türev,

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) \qquad (11.5)$$

Kısaca, doğal üstel fonksiyonun türevi, doğal üstel fonksiyon çarpı üssün türevine eşittir.

2) $g(x)$ pozitif ve türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, $f(x) = \ln[g(x)]$ için türev,

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \qquad (11.6)$$

ÖRNEK 7. Verilen doğal üstel fonksiyonların her birinin türevi aşağıdaki gibi bulunmuştur:

1) $f(x) = e^x$ ve $g(x) = x$ olsun, sonra $g'(x) = 1$ değeri (*11.5*)'te yerine yazılır,

$$f'(x) = e^x \cdot 1 = e^x$$

e^x'in türevi basitçe orijinal fonksiyonun kendisi yani e^x'dir. Bu yalnızca e tabanı için doğrudur. Bu da e'nin üstel fonksiyonlarda sıklıkla taban olarak kullanılmasını açıklamaktadır.

2) $f(x) = e^{7x-4}$, $g(x) = 7x - 4$ olursa, sonra $g'(x) = 7$ değeri (*11.5*)'te yerine yazılır,

$$f(x) = e^{7x-4} \cdot 7 = 7e^{7x-4}$$

3) $g(x) = e^{5x^3}$. Burada $g(x) = 5x^3$ bu nedenle $g'(x) = 15x^2$ değeri (*11.5*)'ten,

$$f(x) = e^{7x^3} \cdot 15x^2 = 15x^2e^{7x^3}$$

Problem 11.20 ve 11.21'e de bakınız.

ÖRNEK 8. Doğal logaritmik fonksiyonun türevi aşağıda gösterildiği gibi bulunur:

1) $g(x) = \ln x$, $g(x) = x$ dir, sonra $g'(x) = 1$. (*11.6*)'da yerine yazılır,

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$$

$\ln x$ in türevi $1/x$ dir.

2) $y = \ln 9x^4$. Burada $g(x) = 9x^4$ bu nedenle $g'(x) = 36x^3$. (*11.6*)'dan,

$$y' = \frac{1}{9x^4} \cdot 36x^3 = \frac{4}{x}$$

3) $f(x) = \ln(8x^2 - 13)$, $g(x) = 8x^2 - 13$ olursa, sonra $g'(x) = 16x$'dir. (*11.6*)'dan,

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{16x}{8x^2 - 13}$$

Problem 11.22 ve 11.23'e de bakınız.

11.8 BİLEŞİK FAİZ

Bileşik faiz genel olarak üstel fonksiyon cinsinden ifade edilir. Bir kişinin yıllık r bileşik faiz oranında ödünç verdiği P anaparasının değeri bir yılın sonunda örneğin A değerine eşit olacaktır.

$$A_1 = P + rP = P(1 + r)$$

İki yılın sonunda, bu kişi A_1 artı A_1'in faiz getirisine sahip olur,

$$A_2 = A_1 + rA_1$$
$$A_2 = P(1 + r) + r[P(1 + r)]$$

$P(1 + r)$ parantezine alınır,

$$A_2 = r[P(1 + r)][1 + r] = P(1 + r)^2$$

t yılın sonuna kadar aynı işlemlere devam edilirse,

$$A_t = P(1 + r)^t \qquad (11.7)$$

Eğer faiz bir yılda m kere birleştiriliyorsa, yıl boyunca m kere faiz alan bir kişi (r/m) için, t yıl sonunda,

$$A_t = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Eğer faiz $m \to \infty$ olana kadar sürekli birleştiriyor ise,

$$A_t = \lim_{m\to\infty} P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

P limit dışına alınır ve üs r/r ile çarpılır,

$$A_t = P \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{(m/r)rt}$$

$m/r = n$ olsun,

$$A_t = P \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nrt}$$

Fakat Kısım 11.4'ten, $\lim_{n\to\infty}[1 + (1/n)]^n = e$ yerine yazılır,

$$A_t = Pe^{rt} \qquad (11.9)$$

ÖRNEK 9. t =5 yıl için r = 6 (yüzde) faiz oranı ile P = 1000 TL anaparasının A değerinin, (*a*) yıllık, (*b*) çeyreklik, (*c*) aylık ve (*d*) sürekli bileşik faizi aşağıda bulunmuştur.

(*a*) İlgili değerler (*11.7*)'de yerine yazılır ve üstel fonksiyonları hesaplamak için hesap makinesinin $\boxed{y^x}$ tuşu kullanılır,

$$A = 1000(1 + .06)^5$$
$$A = 1000(1.33823) = 1338.23\$$$

(*b*) Çeyreklik bileşik faiz için m = 4 değeri (*11.8*) de yerine yazılır,

$$A = 1000\left(1 + \frac{.06}{4}\right)^{4(5)}$$
$$A = 1000(1 + .015)^{20}$$
$$A = 1000(1.34686) = 1346.86\$$$

(*c*) Şimdi aylık bileşik faiz için m = 12 değeri (*11.8*)'de yerine yazılır,

$$A = 1000\left(1 + \frac{.06}{12}\right)^{12(5)}$$
$$A = 1000(1 + .005)^{60}$$
$$A = 1000(1.34885) = 1348.85\$$$

(*d*) Son olarak sürekli bileşik faiz için (*11.9*) kullanılır,

$$A = 1000e^{(.06)5} = 1000e^{0.3}$$
$$A = 1000(1.34986) = 1349.86\$$$

Problem 11.24'ten 11.31'e kadar bakınız, iskonto problemleri için ise Problem 11.32'den 11.34'e kadar bakınız.

11.9 VERİ NOKTALARDAN BÜYÜME ORANLARINI TAHMİN ETME

Zamanla sürekli büyüyen bir fonksiyon- kârlar, satışlar ve varlıklar- için iki veri seti verilmiş olsun, yılık büyüme oranı ölçülebilir ve doğal bir üstel fonksiyon eşanlı denklemler sistemi yoluyla tahmin edilir. Örneğin, eğer yatırım fonu varlıkları 1983'te 48 milyon TL ve 1993'te 98.6 milyon TL ise, 1983 de $t = 0$ baz yıl olarak alınırsa, 1993 yılı için t = 10'dur. Doğal üstel fonksiyon $S = Pe^{rt}$ e göre ve $e^{(0)} = 1$ olduğunu hatırlayarak veri noktalarının iki setinin her biri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$48.0 = Pe^{r(0)} = P \qquad (11.10)$$

$$98.6 = Pe^{r(10)} \qquad (11.11)$$

(*11.10*) ve (*11.11*)'de P = 48.0 değeri yerine yazılır ve sadeleştirme yapılır,

$$98.6 = 48.0e^{10r}$$

$$2.05417 = e^{10r}$$

(*11.3*) kullanılır ve her iki tarafın da doğal logaritması alınır,

$$\ln 2.05417 = \ln e^{10r} = 10r$$

$$0.71987 = 10r$$

$$r = 0.07199 \approx \%7.2$$

Yerine yazılır, $$S = 48.0e^{0.072t}$$

r = 0.072 bulunduğundan yıllık sürekli büyüme oranı yüzde 7.2'dir. Örnek 10, Problem 11.35'ten 11.39'a kadar bakınız.

ÖRNEK 10. Başlangıç bilgileri yukarıda verilmiş olmak üzere, $S = P(1 + r)^t$ büyüme için basit üstel fonksiyonunu veriden direkt de tahmin edilebilir.

Basit üstel formda veri kurulur,

$$48.0 = P(1 + r)^0 = P \qquad (11.12)$$

$$98.6 = P(1 + r)^{10} \qquad (11.13)$$

(*11.12*) ve (*11.13*)'ten $P = 48.0$ değerini yerine yazılır ve sadeleştirilir,

$$98.6 = 48.0(1 + r)^{10}$$

$$2.0417 = (1 + r)^{10}$$

Her iki tarafında ortak logaritması alınır,

$$\log 2.05417 = 10 \log(1 + r)$$

$$\frac{1}{10}(0.31264) = \log(1 + r)$$

$$\log(1 + r) = 0.03126$$

(*11.12*)'ye benzer olarak, her iki taraf da 10'un kuvveti şeklinde alınır.

$$1 + r = 10^{0.03126} = 1.07463$$

$$r = 1.07463 - 1 = 0.07463 \approx \%7.46$$

Yerine yazılır, $S = 48.0(1 + 0.0746)^t$

Yıllık bileşik faize göre, varlıklar bir yılda yüzde 7.46 büyür.

Çözümlü Sorular

GRAFİKLER

11.1. Tabanı $a > 1$ olan aşağıdaki üstel fonksiyonların her biri için tablo oluşturun ve sonra (1) fonksiyonların asla sıfıra eşit olmadığını, (2) hepsinin (0,1) noktasından geçtiğini ve (3) pozitif eğimli ve konveks olduğunu görmek için grafikleri aynı kareli kağıda çiziniz.

(*a*) $y = 2^x$ (*b*) $y = 3^x$ (*c*) $y = 4^x$

(*a*)

x	y
−3	$\frac{1}{8}$
−2	$\frac{1}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

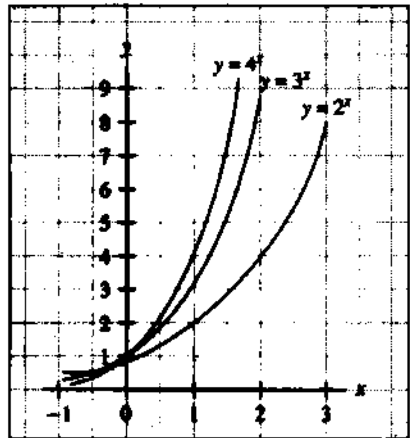
(*b*)

x	y
−3	$\frac{1}{27}$
−2	$\frac{1}{9}$
−1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

(*c*)

x	y
−3	$\frac{1}{64}$
−2	$\frac{1}{16}$
−1	$\frac{1}{4}$
0	1
1	4
2	16
3	64

Şekil 11-3'e bakınız.



Şekil 11-3

11.2. Tabanı $0 < a < 1$ olan aşağıdaki üstel fonksiyonların her biri için tablo oluşturun ve sonra (1) fonksiyonların asla sıfıra eşit olmadığı, (2) hepsinin (0,1) noktasından geçtiğini ve (3) negatif eğimli ve konveks olduğunu görmek için aynı grafik üzerinde çiziniz.

(*a*) $y = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ (*b*) $y = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$ (*c*) $y = (\frac{1}{4})^x = 4^{-x}$

(*a*)

x	*y*
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

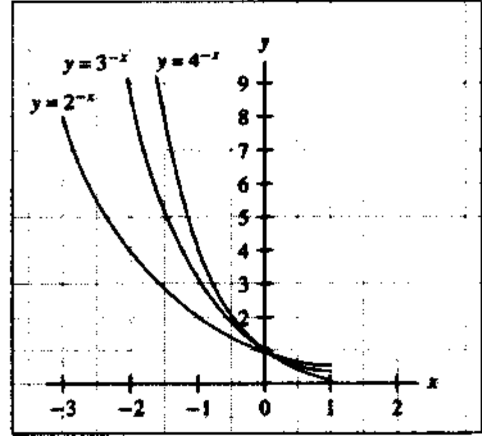
(*b*)

x	*y*
−3	27
−2	9
−1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{27}$

(*c*)

x	*y*
−3	64
−2	16
−1	4
0	1
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{64}$

Şekil 11-4'e bakınız.



Şekil 11-3

11.3. Hesap makinesi veya tablo kullanarak ve (1) fonksiyonların asla sıfıra eşit olmadığını, (2) hepsinin (0,1) noktasından geçtiğini ve (3) pozitif eğimli ve konveks olduğunu dikkate alarak $k > 0$ olmak üzere aşağıda verilen $y = e^{kx}$ doğal üstel fonksiyonlarının her biri için tablo oluşturunuz.

(*a*) $y = e^{0.5x}$ (*b*) $y = e^x$ (*c*) $y = e^{2x}$

(*a*)

x	*y*
−2	0.37
−1	0.61
0	1.00
1	1.65
2	2.72

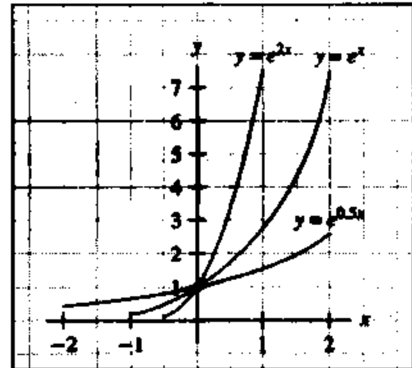
(*b*)

x	*y*
−2	0.14
−1	0.37
0	1.00
1	2.72
2	7.39

(*c*)

x	*y*
−2	0.02
−1	0.14
0	1.00
1	7.39
2	54.60

Şekil 11-5'e bakınız.



Şekil 11-5

11.4. $k < 0$ olmak üzere aşağıda verilen $y = e^{kx}$ doğal üstel fonksiyonları için (1) fonksiyonların asla sıfıra eşit olmadığı, (2) hepsinin (0, 1) noktasından geçtiğini ve (3) hepsinin negatif eğimli ve konveks olduğunu dikkate alarak iki ondalık basamağa yuvarlayıp tablo oluşturunuz.

(*a*) $y = e^{-0.5x}$ (*b*) $y = e^{-x}$ (*c*) $y = e^{-2x}$

(*a*)

x	y
−2	2.72
−1	1.65
0	1.00
1	0.61
2	0.37

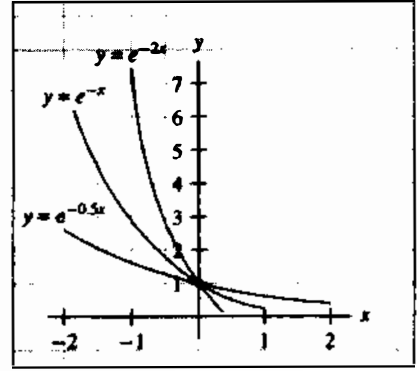
(*b*)

x	y
−2	7.39
−1	2.72
0	1.00
1	0.37
2	0.14

(*c*)

x	y
−2	54.60
−1	7.39
0	1.00
1	0.14
2	0.02

Şekil 11-6'ya bakınız.



Şekil 11-6

11.5. Aşağıdaki fonksiyonlarda (1) (*a*) nın tanım kümesinin (*b*) nin değer kümesi ve (*a*) nın değer kümesinin (*b*) nin tanım kümesi olduğunu, (2) $a > 1$ için logaritmik bir fonksiyonun artan ve konkav olduğunu dikkate alarak ayna simetrisi yı ve dolayısıyla birinin diğerinin tersi olduğunu göstermek için tablo oluşturun, grafiğini çizin.

(*a*) $y = 2^x$ (*b*) $y = \log_2 x \leftrightarrow x = 2^y$

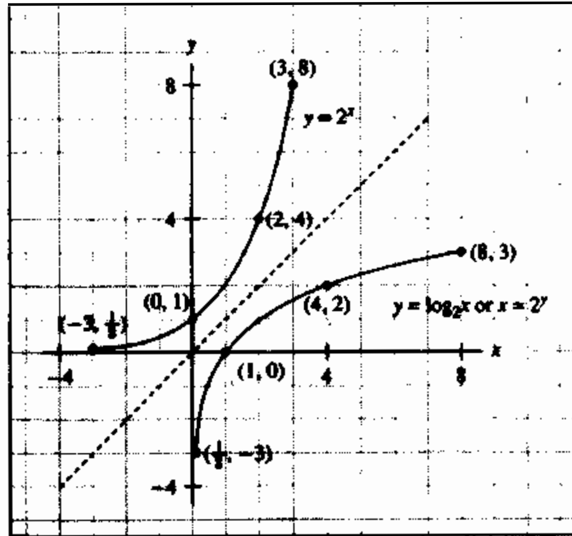
(*a*)

x	y
−3	$\frac{1}{8}$
−2	$\frac{1}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

(*b*)

x	y
$\frac{1}{8}$	−3
$\frac{1}{4}$	−2
$\frac{1}{2}$	−1
1	0
2	1
4	2
8	3

Şekil 11-7'ye bakınız.



Şekil 11-7

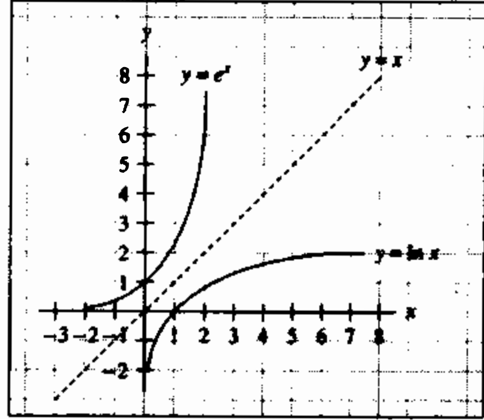
11.6. Verilen (*a*) $y = e^x$ ve (*b*) $y = \ln x$ için tablo veya hesap makinesi kullanarak ve (1) (*a*) nın tanım kümesinin (*b*) nin değer kümesi ve (*a*) nın değer kümesinin (*b*) nin tanım kümesi olduğunu, (2) $0 < x < 1$ için $\ln x$ in negatif ve $x > 1$ için pozitif olduğunu ve (3) $\ln x$ in artan bir fonksiyon ve aşağı yönlü konkav olduğunu dikkate alarak her bir fonksiyonun simetriği veya birbirinin tersi olduğunu göstermek için tablo oluşturun ve grafiğini çizin.

(*a*) $y = e^x$ (*b*) $y = \ln x$

x	y
−2	0.13534
−1	0.36788
0	1.00000
1	2.71828
2	7.38906

x	y
0.13534	−2
0.36788	−1
1.00000	0
2.71828	1
7.38906	2

Şekil 11-8'e bakınız.



Şekil 11-8

ÜSTEL-LOGARİTMİK DÖNÜŞÜM

11.7. Aşağıdaki logaritmaları denk üstel formlarına dönüştürünüz:

(*a*) $\log_7 49 = 2$
$49 = 7^2$

(*b*) $\log_4 64 = 3$
$64 = 4^3$

(*c*) $\log_9 (\frac{1}{9}) = -1$
$\frac{1}{9} = 9^{-1}$

(*d*) $\log_2 (\frac{1}{32}) = -5$
$\frac{1}{32} = 2^{-5}$

(*e*) $\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$
$8 = 64^{1/2}$

(*f*) $\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$
$3 = 81^{1/4}$

(*g*) $\log_a y = 5x$
$y = a^{5x}$

(*h*) $\log_2 y = 4x$
$y = 2^{4x}$

11.8. Aşağıdaki doğal logaritmaları doğal üstel fonksiyonlara dönüştürünüz:

(*a*) $\ln 24 = 3.17805$
$24 = e^{3.17805}$

(*b*) $\ln 0.6 = -0.51083$
$0.6 = e^{-0.51083}$

(*c*) $\ln 44 = 0.78419$
$44 = e^{3.78419}$

(*d*) $\ln 4.2 = 1.43508$
$4.2 = e^{1.43508}$

(*e*) $\ln y = -8x$
$y = e^{-8x}$

(*f*) $\ln y = 5t - 3$
$y = e^{5t-3}$

11.9. Aşağıdaki üstel formları logaritmik formlara değiştiriniz.

(*a*) $36 = 6^2$
$\log_6 36 = 2$

(*b*) $125 = 5^3$
$\log_5 125 = 3$

(*c*) $\frac{1}{4} = 2^{-2}$
$\log_2 (\frac{1}{4}) = -2$

(*d*) $1/27 = 3^{-3}$
$\log_3 (1/27) = -3$

(*e*) $3 = 81^{1/4}$
$\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$

(*f*) $12 = 144^{1/2}$
$\log_{144} 12 = \frac{1}{2}$

(*g*) $64 = 16^{3/2}$

$\log_{16} 64 = \frac{3}{2}$

(*h*) $27 = 81^{3/4}$

$\log_{81} 27 = \frac{3}{4}$

11.10. Aşağıdaki doğal üstel ifadeleri denk doğal logaritmik formlara dönüştürünüz:

(*a*) $3.5 = e^{1.25276}$

$\ln 3.5 = 1.25276$

(*b*) $26 = e^{3.25810}$

$\ln 26 = 3.25810$

(*c*) $0.3 = e^{-1.20397}$

$\ln 0.3 = -1.20397$

(*d*) $145 = e^{4.97673}$

$\ln 145 = 4.97673$

(*e*) $y = e^{(1/4)t}$

$\ln y = \frac{1}{4}t$

(*f*) $y = e^{9-t}$

$\ln y = 9 - t$

11.11. Denk ifade bulunarak aşağıdaki x, y veya a yı çözümleyiniz:

(*a*) $y = \log_{20} 400$

$400 = 20^y$

$y = 2$

(*b*) $y = \log_3(\frac{1}{27})$

$\frac{1}{27} = 3^y$

$y = -3$

(*c*) $\log_2 x = 4$

$x = 2^4$

$x = 16$

(*d*) $\log_{256} x = \frac{3}{4}$

$x = 256^{3/4}$

$x = 64$

(*e*) $\log_a 49 = 2$

$49 = a^2$

$a = 49^{1/2}$

$a = 7$

(*f*) $\log_a 125 = 3$

$125 = a^3$

$a = 125^{1/3}$

$a = 5$

(*g*) $\log_a 9 = \frac{2}{3}$

$9 = a^{2/3}$

$a = 9^{3/2}$

$a = 27$

(*h*) $\log_a 32 = \frac{5}{3}$

$32 = a^{5/3}$

$a = 32^{3/5}$

$a = 8$

LOGARİTMA VE ÜSLÜLERİN ÖZELLİKLERİ

11.12. Aşağıdaki ifadeleri toplam, fark veya çarpım olarak yazmak için logaritmanın özelliklerini kullanınız:

(*a*) $\log_a(23x)$

$\log_a(23x) = \log_a 23 + \log_a x$

(*b*) $\log_a(69x^3)$

$\log_a(69x^3) = \log_a 69 + 3\log_a x$

(*c*) $\log_a x^4y^5$

$\log_a x^4y^5 = 4\log_a x + 5\log_a y$

(*d*) $\log_a u^2v^{-3}$

$\log_a u^2v^{-3} = 2\log_a u - 3\log_a v$

(*e*) $\log_a(3x/8y)$

$$\log_a(3x/8y) = \log_a 3x - \log_a 8y$$

$$= \log_a 3 + \log_a x - (\log_a 8 + \log_a y)$$

$$= \log_a 3 + \log_a x - \log_a 8 - \log_a y$$

(*f*) $\log_a(x^9/y^4)$

$\log_a(x^9/y^4) = 9\log_a x - 4\log_a y$

(*g*) $\log_a \sqrt[5]{x}$

$\log_a \sqrt[5]{x} = \frac{1}{5}\log_a x$

11.13. Aşağıdaki doğal logaritmik formları toplam, fark veya çarpım olarak yazmak için logaritmanın özelliklerini kullanınız:

(*a*) $\ln 49x^6$

$\ln 49x^6 = \ln 49 + 6\ln x$

(*b*) $\ln x^3y^7$

$\ln x^3y^7 = 3\ln x + 7\ln y$

(*c*) $\ln(x^9/y^2)$

$\ln(x^9/y^2) = 9\ln x - 2\ln y$

(*d*) $\ln(5x/8y)$

$$\ln(5x/8y) = \ln 5x - \ln 8y$$
$$= \ln 5 + \ln x - (\ln 8 + \ln y)$$
$$= \ln 5 + \ln x - \ln 8 - \ln y$$

(*e*) $\ln \sqrt[3]{x}$

$\ln \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}\ln x$

(*f*) $\ln(x^4 \cdot \sqrt{y})$

$\ln(x^4 \cdot \sqrt{y}) = 4\ln x + \frac{1}{2}\ln y$

(*g*) $\dfrac{8\sqrt[4]{x}}{\sqrt{y}}$

$\ln \dfrac{8\sqrt[4]{x}}{\sqrt{y}} = \ln 8 + \dfrac{1}{4}\ln x - \dfrac{1}{2}\ln y$

(*h*) $\ln\sqrt{\dfrac{x^5}{y^3}}$

$\ln\sqrt{\dfrac{x^5}{y^3}} = \frac{1}{2}(5\ln x - 3\ln y)$

11.14. $a, b > 0$ ve $a \neq b$ varsayımı ile aşağıdaki üstel ifadeleri daha sade yazabilmek için üstel özelliklerini kullanınız:

(*a*) $a^x \cdot a^y$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(*b*) $a^{7x} \cdot a^{9y}$

$a^{7x} \cdot a^{9y} = a^{7x+9y}$

(*c*) $\dfrac{a^{5x}}{a^{2y}}$

$\dfrac{a^{5x}}{a^{2y}} = a^{5x-2y}$

(*d*) $\dfrac{a^x}{b^x}$

$\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

(*e*) $\sqrt{a^{9x}}$

$\sqrt{a^{9x}} = (a^{9x})^{1/2} = a^{(9/2)x}$

(*f*) $(a^x)^{5y}$

$(a^x)^{5y} = a^{5xy}$

11.15. Aşağıdaki doğal üstel ifadeleri **sadeleştiriniz.**

(*a*) $e^{3x} \cdot e^{8y}$

$e^{3x} \cdot e^{8y} = e^{3x+8y}$

(*b*) $(e^{4x})^3$

$(e^{4x})^3 = e^{12x}$

(*c*) $\dfrac{e^{7x}}{e^{4x}}$

$\dfrac{e^{7x}}{e^{4x}} = e^{7x-4x} = e^{3x}$

(*d*) $\dfrac{e^{2x}}{e^{8x}}$

$\dfrac{e^{2x}}{e^{8x}} = e^{2x-8x} = e^{-6x} = \dfrac{1}{e^{6x}}$

11.16. Aşağıdaki doğal logaritmik ifadeleri sadeleştiriniz:

(*a*) $\ln 6 + \ln x$

$\ln 6 + \ln x = \ln 6x$

(*b*) $\ln x^7 - \ln x^2$

$\ln x^7 - \ln x^2 = \ln\left(\frac{x^7}{x^2}\right) = \ln x^5 = 5 \ln x$

(*c*) $\ln 12 + \ln 3 - \ln 4$

$\ln 12 + \ln 3 - \ln 4 = \left(\frac{12 \cdot 3}{4}\right) = \ln 9$

(*d*) $\ln 5 - \ln 2x + \ln 8$

$\ln 5 - \ln 2x + \ln 8 = \ln\left(\frac{5 \cdot 8}{2x}\right) = \ln\left(\frac{20}{x}\right)$

(*e*) $\frac{1}{2}\ln 36$

$\frac{1}{2}\ln 36 = \ln 36^{1/2} = \ln 6$

(*f*) $4\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$4\ln\frac{1}{3} = \ln\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \ln\frac{1}{81}$

(*g*) $\frac{1}{2}\ln 49 + 3\ln 4$

$\frac{1}{2}\ln 49 + 3\ln 4 = \ln 49^{1/2} + \ln 4^3 = \ln(7 \cdot 64) = \ln 448$

(*h*) $2\ln 9 - \frac{1}{4}\ln 81$

$2\ln 9 - \frac{1}{4}\ln 81 = \ln 9^2 - \ln 81^{1/4} = \ln\left(\frac{81}{3}\right) = \ln 27$

11.17. Aşağıdaki üstel ifadelerin her birini sadeleştiriniz:

(*a*) $e^{2 \ln x}$

$$e^{2 \ln x} = e^{\ln x^2}$$

(*11.2*)'den, $e^{\ln x^2} = x^2$

(*b*) $e^{3\ln x + 4\ln y}$

$$e^{3\ln x + 4\ln y} = e^{\ln x^3} \cdot e^{\ln y^4} = x^3 y^4$$

(*c*) $e^{1/2 \ln 9x}$

$$e^{1/2\ln 9x} = e^{\ln(9x)^{1/2}} = (9x)^{1/2} = \sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$$

(*d*) $e^{5\ln x - 8\ln y}$

$$e^{5\ln x - 8\ln y} = \frac{e^{\ln x^5}}{e^{\ln y^8}} = \frac{x^5}{y^8}$$

11.18. Kısım 11.5'teki teknikler kullanılarak aşağıdaki doğal logaritmik fonksiyonlar x için çözünüz:

(*a*) $7e^{3x} = 630$

e^{3x} için cebirsel olarak çözümlenir,

$$e^{3x} = 90$$

e'yi yok etmek için her iki tarafın da doğal logaritması alınır,

$$\ln e^{3x} = \ln 90$$

(*11.3*)'den $3x = \ln 90$

Hesap makinesine 90 yazılır ve Kısım 1.7.10'da açıklandığı gibi [ln x] tuşuna basılır.
$\ln 90 = 90 = 4.49981 = 4.5$

Böylece

$$3x = 4.5$$
$$x = 1.5$$

(*b*) $3e^{2x+1.2} = 4018.29$

$e^{2x+1.2}$ için çözülür, $e^{2x+1.2} = 1339.43$

Doğal logaritması alınır, $\ln e^{2x+1.2} = \ln 1339.43$

(*11.3*)'den $2x + 1.2 = 7.19999 \approx 7.2$

$$2x + 1.2 = 7.2 \qquad x = 3$$

(*c*) $1/4\, e^{x^2} = 2.37194$

e^{x^2} için çözülür, $e^{x^2} = 9.48776$

Doğal logaritması alınır, $x^2 = 2.25$

$$x = \pm 1.5$$

11.19. Kısım 11.5'teki teknikler kullanılarak aşağıdaki doğal logaritmik fonksiyonlar x için çözünüz:

(*a*) $7 \ln x - 2.6 = 10$

$\ln x$ cebirsel olarak çözülür,

$$7 \ln x = 12.9, \qquad \ln x = 1.8$$

Doğal logaritmayı yok etmek için eşitliğin iki tarafı da e nin kuvveti olarak alınır,

$$e^{\ln x} = e^{1.8}$$

(*11.2*)'den $x = e^{1.8}$

Kısım 1.7.12'de açıklandığı gibi hesap makinesi kullanılır,

$$x = 6.04965 \approx 6.05$$

(*b*) $\ln (x - 1.51)^3 = 1.2$

Logaritma kuralları ile düzenlenir, sonra $\ln x$ için çözülür,

$$3 \ln(x - 1.51) = 1.2$$
$$\ln(x - 1.51) = 0.4$$

Eşitliğin iki tarafı da e'nin kuvveti olarak alınır,

$$e^{\ln(x-1.51)} = e^{0.4}$$

(*11.2*)'den $x - 1.51 \approx 1.49$

$$x = 3$$

(*c*) $\ln \sqrt{x + 2.24} = 2.14$

Düzenlenip çözülür,

$$\frac{1}{2} \ln(x + 2.25) = 2.14$$
$$\ln(x + 2.24) = 4.28$$

Her iki taraf da e'nin kuvveti olarak alınır,

$$e^{\ln(x+2.24)} = e^{4.28}$$

$$x + 2.24 \approx 72.24$$

(*11.2*)'den $x = 70$

DOĞAL ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

11.20. (*11.5*)'te verilen $d/dx[e^{g(x)}] = e^{g(x)} \cdot g'(x)$ kuralı kullanılarak, aşağıdaki doğal üstel fonksiyonların türevini alınız.

(*a*) $f(x) = e^{6x}$
$g(x) = 6x$'dır, Sonra
$f'(x) = e^{6x} \cdot 6$ ve (*11.5*)'ten
$= 6e^{6x}$

(*b*) $y = e^{-8x}$
$g(x) = -8x$'dır, Sonra
$y' = e^{-8x} \cdot -8$ ve (*11.5*)'ten
$= -8e^{-8x}$

(*c*) $f(x) = e^{3x^2}$
$f'(x) = e^{3x^2} \cdot 6x$
$= 6xe^{3x^2}$

(*d*) $y = e^{4x-9}$
$y' = e^{4x-9} \cdot 4$
$= 4e^{4x-9}$

(*e*) $y = 5e^{7-x^3}$
$y' = 5e^{7-x^3} \cdot -3x^2$
$= -15x^2e^{7-x^3}$

(*f*) $y = 1/3e^{(1/2)x^4}$
$y' = 1/3e^{(1/2)x^4} \cdot 1/2(4x^3)$
$= 2/3x^3e^{(1/2)x^4}$

11.21. Aşağıdaki fonksiyonların türevini almak için birkaç kuralı birleştiriniz.

(*a*) $f(x) = 7xe^{2x}$

Çarpım kuralından,

$$f'(x) = 7x(2e^{2x}) + e^{2x}(7)$$
$$= 14xe^{2x} + 7e^{2x}$$
$$= 7e^{2x}(2x + 1)$$

(*b*) $y = 2x^4e^{5x}$

$$y' = 2x^4(5e^{5x}) + e^{5x}(8^{x^3})$$
$$= 10x^4e^{5x} + 8x^3e^{5x}$$
$$= 2x^3e^{5x}(5x + 4)$$

(*c*) $y = (e^{-4x})^3$

Genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralından,

$$y' = 3 \cdot (e^{-4x})^2 \cdot (-4e^{-4x})$$
$$= -12(e^{-4x})^3 = -12e^{-12x}$$

Not: Üslülerin özelliklerinden $(e^{-4x})^3 = e^{-12x}$ ve e^{-12x} in türevi kolayca $-12e^{-12x}$ şeklindedir.

(*d*) $f(x) = (e^{4x} + e^{-3x})^5$

$$f'(x) = 5 \cdot (e^{4x} + e^{-3x})^4 \cdot (4e^{4x} - 3e^{-3x})$$
$$= (20e^{4x} - 15e^{-3x})(e^{4x} + e^{-3x})^4$$

(*e*) $f(x) = \dfrac{e^{-9x}}{1 - 9x}$

Bölüm kuralından,

$$f'(x) = \frac{(1 - 9x)(-9e^{-9x}) - (e^{-9x})(-9)}{(1 - 9x)^2} = \frac{81xe^{-9x}}{(1 - 9x)^2}$$

(*f*) $y = \dfrac{e^{7x} - 1}{e^{7x} + 1}$

$$y' = \frac{(e^{7x} + 1)(7e^{7x}) - (e^{7x} - 1)(7e^{7x})}{(e^{7x} + 1)^2} = \frac{14e^{7x}}{(e^{7x} + 1)^2}$$

11.22. (*11.6*)'da verilen $d/dx[\ln g(x)] = \dfrac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$ kuralı kullanılarak, aşağıdaki doğal logaritmik fonksiyonların türevini alınız.

(*a*) $y = \ln 7x^3$

$g(x) = 7x^3$ olsun, sonra

$g'(x) = 21x^2$ e (*11.6*)'den

$$y' = \frac{1}{7x^3}(21x^2) = 3x^{-1} = \frac{3}{x}$$

(*b*) $y = \ln(4x + 9)$

$g(x) = 4x + 9$ olsun, sonra

$g'(x) = 4$ ve (*11.6*)'den

$$y' = \frac{1}{4x + 9}(4) = \frac{4}{4x + 9}$$

(*c*) $y = \ln(8x^2 + 3)$

$$y' = \frac{1}{8x^2 + 3}(16x) = \frac{16x}{8x^2 + 3}$$

(*d*) $y = \ln(x^2 + 7x + 15)$

$$y' = \frac{1}{x^2 + 7x + 15}(2x + 7) = \frac{2x + 7}{x^2 + 7x + 15}$$

(*e*) $y = \ln 18x$

$$y' = \frac{1}{18x}(18) = \frac{1}{x}$$

(*f*) $y = 18 \ln x$

$$y' = 18 \cdot \frac{1}{x}(1) = \frac{18}{x}$$

Logaritma ifadesinde bulunan çarpım halindeki bir sabitin (*e*)'de ki gibi türevin dışına nasıl çıktığına ve logaritma ifadesinin dışında bulunan çarpım halindeki bir sabitin (*f*)'de ki gibi aynen kaldığına dikkat ediniz.

11.23. Aşağıdaki fonksiyonların türevini almak için birkaç kuralı birleştiriniz.

(*a*) $y = \ln^2 x = (\ln x)^2$

Genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kullanıldığında,

$$y' = 2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2 \ln x}{x}$$

(*b*) $y = \ln^2 4x^3 = (\ln 4x^3)^2$

Genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı tekrar kullanıldığında,

$$y' = 2(\ln 4x^3)\left(\frac{1}{4x^3}\right)(12x^2) = \frac{6 \ln 4x^3}{x}$$

(*c*) $y = \ln^2(21x + 8) = [\ln(21x + 8)]^2$

$$y' = 2[\ln(21x + 8)]\left(\frac{1}{21x + 8}\right)(21) = \frac{42 \ln(21x + 8)}{21x + 8}$$

(*d*) $y = \ln(9x + 4)^2 \neq [\ln(9x + 4)]^2$

$g(x) = (9x - 4)^2$ olsun, sonra $g'(x) = 2(9x + 4)^9 = 18(9x + 4)$. (*11.6*)'da yerine yazalım,

$$y' = \frac{1}{(9x+4)^2}[18(9x+4)] = \frac{18}{9x+4}$$

(*e*) $y = x^5 \ln x^3$

Çarpım kuralından,

$$y' = x^5\left(\frac{1}{x^3}\right)(3x^2) + \ln x^3(5x^4)$$

$$y' = 3x^4 + 5x^4 \ln x^3 = 3x^4 + 15x^4 \ln x = 3x^4(1 + 5\ln x)$$

(*f*) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

Bölüm kuralından,

$$y' = \frac{\ln x(1) - x(1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

(*g*) $y = e^{2x} \ln 3x$

Çarpım kuralından,

$$y' = e^{2x}\left(\frac{1}{3x} \cdot 3\right) + (\ln 3x)(e^{2x} \cdot 2)$$

$$y' = e^{2x}\left(\frac{1}{x}\right) + 2e^{2x} \ln 3x = e^{2x}\left(\frac{1}{x} + 2\ln 3x\right)$$

BİLEŞİK FAİZ

11.24. $P = 100$ TL olan anaparanın zaman $t = 1$ yıl, faiz oranı $r = 12$ (yüzde) olmak üzere (*a*) yıllık, (*b*) 6 aylık, (*c*) çeyreklik ve (*d*) sürekli bileşik faizde ki A değerini bulunuz; (*e*) nominal ve efektif faiz oranını ayırınız. Üstel ifadeler için Kısım 1.7.11 ve Problem 1.23 ile 1.26 arasında açıklandığı gibi hesap makinesi kullanınız.

(*a*) (*11.7*)'den $A = 100(1 + .12)^1 = 112.00\$$

(*b*) $m = 2$ olmak üzere (*11.8*)'den

$$A = 100\left(1 + \frac{.12}{2}\right)^{2(1)}$$

$A = 100(1 + .06)^2$

$A = 100(1.1236) = 112.36\$$

(*c*) $m = 4$ olmak üzere (*11.8*)'den

$$A = 100\left(1 + \frac{.12}{4}\right)^{4(1)}$$

$A = 100(1 + .03)^4$

$A = 100(1.1255) = 112.55\$$

(*d*) (*11.9*)'dan $A = 100e^{(0.12)(1)} = 100e^{.12}$

$A = 100(1.1275) = 112.75\$$

(*e*) Dört örnekte verilen veya *nominal faiz oranı* aynıdır, yani yüzde 12 dir; ancak kazanılan reel faiz bileşkenin türüne bağlı olarak değişir. Çoklu bileşik faiz hesaplamasında *efektif faiz oranı,* bu örnekte 6 aylık bileşik faiz için yüzde 12.36, çeyreklik bileşik faiz için yüzde 12.55 ve sürekli bileşik faiz yüzde 12.75'e eşit olmak üzere faiz yılda sadece bir kez ödenecek olursa bankanın ödemesi gereken karşılaştırılabilir orandır.

11.25. $P = 3000$ TL olan anaparanın zaman $t = 6$ yıl, faiz oranı $r = 8$ (yüzde) olmak üzere (*a*) yıllık, (*b*) 6 aylık, (*c*) çeyreklik ve (*d*) sürekli bileşik faizde ki A değerini bulunuz.

(*a*) (*11.7*)'den

$$A = 2000(1 + .08)^6$$
$$A = 3000(1.5868743) = 4760.62\$$$

(*b*) $m = 2$ olmak üzere (*11.8*)'den

$$A = 300\left(1 + \frac{.08}{2}\right)^{2(6)}$$
$$A = 3000(1 + .04)^{12}$$
$$A = 3000(1.6010322) = 4803.10\$$$

(*c*) $m = 4$ olmak üzere (*11.8*)'den

$$A = 300\left(1 + \frac{.08}{4}\right)^{4(6)}$$
$$A = 3000(1 + .02)^{24}$$
$$A = 3000(1.6084373) = 4825.31\$$$

(*d*) (*11.9*)'den

$$A = 3000e^{(0.08)6} = 3000e^{0.48}$$
$$A = 3000(1.6160744) = 4848.22\$$$

11.26. $P = 10.000$ TL, $t = 3$, $r = 9$ (yüzde) olmak üzere, Problem 11.25 da ki soruları tekrar çözünüz.

(*a*)

$$A = 10,000(1 + .09)^3$$
$$A = 3000(1.295029) = 12,950.29\$$$

(*b*)

$$A = 10,000\left(1 + \frac{.09}{2}\right)^{2(3)}$$
$$A = 10,000(1 + .045)^6$$
$$A = 10,000(1.3022601) = 13,022.60\$$$

(*c*)

$$A = 10,000\left(1 + \frac{.09}{4}\right)^{4(3)}$$
$$A = 10,000(1 + .0225)^{12}$$
$$A = 10,000(1.3060) = 12,060.50$$

(*d*)

$$A = 10,000e^{(0.09)3} = 10,000e^{.27}$$
$$A = 10,000(1.3099645) = 13,099.65\$$$

11.27. $t > 1$ iken çoklu bileşik faiz oranlarında r_e efektif faiz oranını bulmak için formüle ulaşınız.

Problem 11.24 (*e*)'deki efektif faiz oranı açıklanmasından, şunu yazabiliriz:

$$P(1 + r_e)^t = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Her iki tarafı P ye bölüp t. kökünü alalım,

$$1 + r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 \qquad (11.14)$$

Sürekli bileşik faiz için,

$$P(1 + r_e)^t = Pe^{rt}$$

$$(1 + r_e) = e^r$$

$$r_e = e^r - 1 \qquad (11.15)$$

11.28. Nominal faiz oranı $r = 8$ (yüzde) olmak üzere, Problem 11.25'teki gibi (*a*) 6 aylık, (*b*) çeyreklik ve (*c*)sürekli bileşik faiz altında efektif faiz oranını bulunuz. (*11.14*) ve (*11.15*)'te zaman t ve anapara P'nin önemli olmadığına dikkat ediniz.

(*a*) (*11.14*)'ten, $r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$

Yerine yazılır, $r_e = \left(1 + \frac{.08}{2}\right)^2 - 1 = (1 + .04)^2 - 1$

$r_e = 1.08160 - 1 = 0.08160 = \%8.16$

(*b*) $r_e = \left(1 + \frac{.08}{4}\right)^4 - 1 = (1 + .02)^4 - 1$

$r_e = 1.08243 - 1 = 0.08243 = \%8.24$

(*c*) (*11.15*)'ten, $r_e = e^r - 1$

Yerine yazılır, $r_e = e^{0.08} - 1 = 1.08329 - 1 = 0.08329 = \%8.33$

11.29. Problem 11.26'da r yerine yüzde 9 yazarak efektif faiz oranını (*a*) 6 aylık, (*b*) çeyreklik ve (*c*) sürekli bileşik faiz olarak bulunuz.

(*a*) (*11.14*)'ten, $r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$

Yerine yazılır, $r_e = \left(1 + \frac{.09}{2}\right)^2 - 1 = (1 + .045)^2 - 1$

$r_e = 1.09203 - 1 = 0.09203 = \%9.20$

(*b*) $r_e = \left(1 + \frac{.09}{4}\right)^4 - 1 = (1 + .0225)^4 - 1$

$r_e = 1.09308 - 1 = 0.09308 \approx \%9.31$

(*c*) (*11.15*)'ten, $r_e = e^r - 1$

Yerine yazılır, $r_e = e^{0.09} - 1$

$r_e = 1.09417 - 1 = 0.09417 \approx \%9.42$

11.30. Yıllık bileşik faiz oranı yüzde 6 iken P parasının toplamının iki katına çıkması kaç t yıl sürecektir?

$$A = P(1 + .06)^t$$

Paranın iki katına çıkması için $A = 2P$ dır. A'yı yerine yazalım,

$$2P = P(1 + .06)^t$$

P'ye bölünür, $2 = (1 + .06)^t$

Doğal logaritması alınır, $\ln 2 = t \ln 1.06$

$0.69315 = 0.05827t$

0.05827'e bölünür, $t \approx 11.9$ yıl

11.31. Çeyreklik bileşik faiz oranı yüzde 12 ise paranın üç katına çıkması kaç yıl sürecektir?

(*11.18*)'den $A = P\left(1 + \frac{.12}{4}\right)^{4(t)} = P(1 + .03)^{4t}$

Para üç katına çıkarsa, $3 = (1 + .03)^{4t}$

Logaritması alınır, $\ln 3 = 4t \ln 1.03$

$1.09861 = 4(0.02956)t = 0.11824t$

$t \approx 9.3$ yıl

İSKONTO

11.32. *İskonto*, gelecekte alınacak toplam A parasının toplamının şu anki P değerini belirleme sürecidir. (*a*) yıllık bileşik faiz, (*b*) çoklu bileşik faiz ve (*c*) sürekli bileşik faiz altında iskonto için formül bulunuz.

(*a*) Yıllık bileşik faiz hesaplaması altında,

$$A = P(1 + r)^t$$

P için çözülür,

$$P = \frac{A}{(1+r)^t} = A(1+r)^{-t} \qquad (11.16)$$

(*b*) Çoklu bileşik faiz hesaplaması altında,

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

P için çözülür,

$$P = A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mt} \qquad (11.17)$$

(*c*) Sürekli bileşik faiz için,

$$A = Pe^{rt}$$

Dolayısıyla

$$P = Ae^{-rt} \qquad (11.18)$$

11.33. Dört yıl sonra ödenecek 1000 TL'nin bugün ki değerini, cari faiz oranı yüzde 6 iken (*a*) yıllık, (*b*) çeyreklik ve (*c*) sürekli bileşke faiz için bulunuz.

(*a*) (*11.16*) dan, $P = A(1 + r)^{-t}$

Yerine yazılır, $P = 1000(1 + .06)^{-4}$

Hesap makinesine 1.06 girilir, $\boxed{y^x}$ tuşuna basılır, negatif yapmak için $\boxed{\pm}$ tuşuna basarak 4 sayısını girilir ve son olarak Kısım 1.7.11'de açıklandığı gibi $\boxed{=}$ tuşuna basılır.

$$P = 1000(0.79209) = 792.09\$$$

(*b*) (*11.17*) den, $P = A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mt}$

Yerine yazılır, $P = 1000\left(1 + \frac{.06}{4}\right)^{-4(4)} = 1000(1 + .015)^{-16}$

$P = 1000(0.78803) = 788.03\$$

(*c*) (*11.18*) den, $P = Ae^{-rt}$

Yerine yazılır, $P = 1000e^{-(0.06)(4)} = 1000e^{-0.24}$

$P = 1000(0.78663) = 786.63\$$

11.34. Cari faiz oranı yüzde 5 iken sekiz yılda ödenecek 1500 TL'nin bugün ki değeri için Problem *11.33*'te ki soruları tekrar çözünüz.

(*a*) $P = 1500(1 + .05)^{-8}$

$P = 1500(0.67684) = 1015.26\$$

(*b*) $P = 1500\left(1 + \frac{.05}{4}\right)^{-4(8)} = 1500(1 + .0125)^{-32}$

$$P = 1500(0.67198) = 1007.97\$$$

(c) $$P = 1500e^{-(0.05)(8)} = 1500e^{-0.4}$$

$$P = 1500(0.67032) = 1005.48\$$$

VERİ NOKTALARINDAN BÜYÜME ORANLARINI TAHMİN ETME

11.35. Bir dergiye abone sayısı 1988'de 6.25 milyon ve 1993'te 11.1 milyon gibi zamanla sürekli büyüyen bir veriden iki nokta verilmiş olsun, (*a*) S_0e^{rt} zamanın doğal üstel fonksiyonu olarak abone sayılarını ifade ediniz ve (*b*) abonelikteki yıllık büyüme oranını *G* bulunuz.

(*a*) 1988 baz yılı için $t = 0$ olduğundan 1993 için $t = 5$'tir. $S = S_0e^{rt}$ e göre veri noktalarının ikisi ifade edilir ve $e^0 = 1$ olduğunu hatırlanır,

$$6.25 = S_0e^{r(0)} = S_0 \qquad (11.19)$$

$$11.1 = S_0e^{r(5)} \qquad (11.20)$$

(*11.19*)'da bulunan S_0 (*11.20*)'de yerine yazılıp cebirsel sadeleştirme yapılır,

$$11.1 = 6.25e^{5r}$$
$$1.776 = e^{5r}$$

Her iki tarafın da doğal logaritması alınıp ve (*11.13*) kullanılır,

$$\ln 1.776 = \ln e^{5r} = 5r$$
$$0.57436 = 5r \qquad r = 0.11487 \approx \%11.5$$

Uygun formdaki S_0e^{rt} de S_0 ve r değerlerini yerine yazılır,

$$S = 6.25e^{0.115t}$$

(*b*) Bir fonksiyonun *G* büyüme oranı fonksiyonun doğal logaritmasının bir türevi olarak verilir: $d/dx\,[\ln f(x)] = f'(x)/f(x)$. *S* nin doğal logaritması alınır ve böylece tekrar (*11.3*) kullanılır,

$$\ln S = \ln 6.25 + \ln e^{0.115t}$$
$$\ln S = \ln 6.25 + 0.115t$$

Sonra ln 6.25'in sabit olduğu anımsanarak türev alınır,

$$G = \frac{d}{dt}(\ln S) = 0.115 = \%11.5$$

Doğal üstel fonksiyonun büyüme oranı, daima üs de bulunan değişkenin katsayısı olacaktır.

11.36. Bir firmanın kârı π 1985'te 3.40 milyon TL'den 1993'te 6.71 milyon TL'ye zaman içinde sürekli büyümektedir. (*a*) kârı zamanın doğal üstel bir fonksiyonu $\pi = \pi_0e^{rt}$ olarak ifade ediniz ve (*b*) yıllık büyüme oranını bulunuz.

(*a*) $t = 0$ ile 1985 baz yılı olsun, 1993 için $t = 8$'dir ve,

$$3.40 = \pi_0e^{r(0)} = \pi_0$$

$$6.71 = \pi_0e^{r(8)} \qquad (11.21)$$

(*11.21*)'de $\pi_0 = 3.40$ yerine yazılır ve cebirsel düzenleme yapılır,

$$6.71 = 3.40e^{8r}$$

$$1.97353 = e^{8r}$$

Logaritması alınır, $$0.67982 = 8r$$

$$r = 0.08498 \approx 0.085$$

ve $$\pi = 3.40e^{0.085t}$$

(*b*) Büyüme oranı yüzde 8.5'tir.

11.37. Bir ülkenin nüfusu P, 1987'de 54 milyondan 1993'te 63.9 milyona ulaşıyor. Burada nüfusun büyüme oranı nedir?

1987 için $t = 0$ ve 1993 için $t = 6$ olsun ve daha önceki problemlerden $t = 0$'da fonksiyonun değerinin izleyen yıllarda fonksiyonun tabanı olduğuna dikkat edilir.

$$63.9 = 54e^{r(6)}$$

Sadeleştirildiğinde, $$1.18333 = e^{6r}$$

Doğal logaritması alındığında, $$0.16833 = 6r$$

$$r = 0.02806 \approx 0.028$$

Böylece, $$P = 54e^{0.028t}$$

ve nüfusun büyüme oranı yüzde 2.8'dir.

11.38. Bir ülkenin ormanlık arazisi T, 1 yılda yüzde 3.2 azalıyor. 8 yıl içinde ne kadar kalacaktır?

$$T = T_0e^{-0.032(8)} = T_0e^{-0.256}$$

Hesap makinesi kullanılarak,

$$T = 0.77414T_0 \approx \%77\text{'si ormanlık arazinin}$$

11.39. Bir köyün ekilebilir arazisi L, 1 yılda 1.8 oranında aşınıyor. Eğer aynı koşullar devam ederse, 15 yıl içinde ne kadar kalacaktır?

$$L = L_0e^{-0.018(15)} = L_0e^{-0.27}$$

$$L = 0.76338L_0 \approx \%76\text{'sı ekilebilir arazinin}$$

Ek Problemler

ÜSTEL-LOGARİTMİK DÖNÜŞÜM

11.40. Aşağıdaki logaritmaları denk üstel formlarına dönüştürünüz:

(*a*) $\log_{13} 169 = 2$ (*b*) $\log_5 125 = 3$ (*c*) $\log_6 (\frac{1}{36}) = -2$

(*d*) $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$ (*e*) $\log_4 (\frac{1}{64}) = -3$ (*f*) $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$

11.41. Aşağıdaki doğal logaritmaları denk doğal üstel formlara çeviriniz:

(*a*) $\ln 13 = 2.56495$ (*b*) $\ln 5.8 = 1.75786$ (*c*) $\ln 0.4 = -0.91629$

(*d*) $\ln 62 = 4.12713$ (*e*) $\ln y = 2.35t$ (*f*) $\ln y = 7 - 9t$

11.42. Aşağıdaki üstel ifadeleri denk logaritmik formlara çeviriniz:

(*a*) $64 = 8^2$ (*b*) $81 = 3^4$ (*c*) $1/8 = 2^{-3}$

(*d*) $7 = 49^{1/2}$ (*e*) $4 = 8^{2/3}$ (*f*) $216 = 36^{3/2}$

11.43. Aşağıdaki doğal üstel ifadeleri denk doğal logaritmik formlara çeviriniz:

(*a*) $6.7 = e^{1.90211}$ (*b*) $0.25 = e^{-1.38629}$ (*c*) $122 = e^{4.80402}$

(*d*) $43 = e^{3.76120}$ (*e*) $y = e^{0.06t}$ (*f*) $y = e^{5t+8}$

11.44. Aşağıdakilerin her birini bilinmeyen değişken veya parametre için çözünüz:

(*a*) $y = \log_{11} 121$ (*b*) $y = \log_3 (\frac{1}{81})$ (*c*) $\log_3 x = 5$

(*d*) $\log_{64} x = 4/3$ (*e*) $\log_a 9 = 2/3$ (*f*) $\log_a (1/8) = -1/2$

LOGARİTMA VE ÜSLÜLERİN ÖZELLİKLERİ

11.45. Aşağıdaki logaritmik ifadeleri toplam, fark veya çarpıma dönüştürünüz:

(*a*) $y = \log_a 38x^2$ (*b*) $y = \log_a x^2y^4$ (*c*) $y = \log_a(7x/9y)$ (*d*) $y = \log_a(x^5/y^3)$

11.46. Aşağıdaki doğal logaritmik ifadeleri toplam, fark veya çarpıma dönüştürünüz:

(*a*) $y = \ln\left(\frac{x^4y^2}{z^5}\right)$ (*b*) $y = \ln \sqrt[4]{x}$

(*c*) $y = \ln \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$ (*a*) $y = \ln\sqrt{\frac{x^7}{y^5}}$

11.47. Aşağıdaki üstel ifadeleri sadeleştiriniz:

(*a*) $y = x^{5x} \cdot a^{8y}$ (*b*) $y = \frac{a^{2x}}{a^{7y}}$ (*c*) $y = (a^{3x})^{2y}$ (*d*) $y = \sqrt[3]{a^{7x}}$

11.48. Aşağıdaki doğal üstel ifadeleri sadeleştiriniz:

(*a*) $y = (e^{6x})^{-1/2}$ (*b*) $y = \frac{e^{4x}}{e^{5y}}$ (*c*) $y = \sqrt{e^{5x}}$ (*d*) $y = \frac{e^{7x}}{e^{-4y}}$

TÜREV

11.49. Aşağıdaki doğal üstel fonksiyonların türevini alınız:

(*a*) $f(x) = e^{-9x}$ (*b*) $y = e^{5x^3}$ (*c*) $f(x) = 7e^{8-3x^2}$

(*d*) $y = 5e^{4x^3-17}$ (*e*) $f(x) = -\frac{1}{2}e^{(1/3)x^6}$ (*f*) $y = -\frac{1}{4}e^{5-x^2}$

11.50. Aşağıdaki doğal logaritmik fonksiyonların türevini alınız:

(*a*) $y = \ln(2x^2 - 5)$ (*b*) $f(x) = \ln 17x$ (*c*) $y = \ln 9x^5$

(*d*) $f(x) = \ln(x^3 + 4x^2 - 9x + 16)$ (*e*) $y = 3\ln 6x^4$ (*f*) $f(x) = 2\ln(5x^3 - 4)$

11.51. Aşağıdaki fonksiyonların türevinin alınması için birkaç kuralı birleştiriniz.

(*a*) $f(x) = (e^{-5x})^3$ (*b*) $y = 7xe^{4x}$

(*c*) $f(x) = (e^{3x} + e^{2x})^3$ (*d*) $y = \frac{e^{6x}}{2x+1}$

(*e*) $f(x) = \ln(3x-7)^2$ (*f*) $y = 8x^2 \ln x^3$

(*g*) $f(x) = \ln^2 5x^4$ (*h*) $y = \frac{e^x}{\ln x}$

BİLEŞİK FAİZ

Aşağıda verilen anaparaların gelecekteki (*a*) yıllık, (*a*) altı aylık, (*a*) çeyreklik ve sürekli bileşik faiz değerlerini belirleyiniz.

11.52. Yüzde 8'de 5 yıl için 1000 TL,

11.53. Yüzde 6'da 4 yıl için 2500 TL,

11.54. Yüzde 12'de 6 yıl için 500 TL,

11.55. Yüzde 9'da 8 yıl için 10,000 TL.

11.56. Yüzde 8 faiz oranında altı aylık bileşik faizde paranın ikiye katlanması ne kadar sürer?

11.57. Yüzde 9 faiz oranında yıllık bileşik faizde paranın üçe katlanması ne kadar sürer?

İSKONTO

11.58. Cari faiz oranı yüzde 10 ise 8 yılda ödenecek 5000 TL bugün ki değerini (*a*) yıllık, (*b*) 6 aylık, (*c*) çeyreklik ve (*d*) sürekli bileşik faizi belirleyiniz.

11.59. Problem 11.58. sorularını cari faiz oranı yüzde 5 iken 4 yılda ödenecek 8000 TL için tekrar çözünüz.

11.60. Yıllık cari bileşik faiz oranı yüzde 6 olmak üzere, 10,000 TL'nin (*a*) 1 yıl, (*b*) 3 yıl, (*c*) 5 yıl ve (*d*) 10 yılda ödenecek bugün ki değerini bulunuz.

11.61. 6 aylık cari bileşik faiz oranı yüzde 7 olmak üzere, 10,000 TL'nin (*a*) 1 yıl, (*b*) 3 yıl, (*c*) 5 yıl ve (*d*) 10 yılda ödenecek bugün ki değerini bulunuz.

BÜYÜME ORANI

11.62. Bir şirketin satışları 1987'de 23.2 milyon TL'den 1993'te 32.27 milyon TL'ye zamanla sürekli büyüyor. (*a*) t zamanın doğal üstel bir fonksiyonu olmak üzere satışları S ifade ediniz. (*b*) Satışların yıllık büyüme oranını G gösteriniz.

11.63. Bir firmanın zamanla sürekli büyüyen toplam geliri TR, 1985'te 345 milyon TL'den 1993'te 616.18 milyon TL'ye yükselmektedir. (*a*) üstel fonksiyonu bulunuz ve (*b*) gelirin büyüme oranını gösteriniz.

11.64. Bir şirketin 1993'te 8.9 milyon TL olan satışları 1997'de 13.82 milyon TL olarak tahmin ediliyor. (*a*) tahmin etmek için kullanılan üstel fonksiyonu belirleyiniz ve (*b*) planlanan büyüme oranını gösteriniz.

11.65. Bir ülkenin 44.35 milyonluk nüfusu bir yılda 2.65 oranında büyüyor. 5 yılda beklenen nüfusu bulunuz.

11.66. Sürekli bileşik faiz altında tahmini büyüme 8,6 iken cari gelir 48.25 milyon TL olan bir şirket için 3 yılda öngörülen gelir seviyesi nedir?

11.67. Bir danışman üstel fonksiyon kullanarak bir gazetenin tirajının şu andaki 1.25 milyondan 5 yıl içinde 1.73 milyona artacağını öne sürmektedir. Danışmanın varsaydığı büyüme oranı nedir?

11.68. Bugün ki değeri 3.8 milyon TL olan bir makinenin değeri yıllık sürekli yüzde 15 oranında düşerse 3 yılda değeri ne olacaktır?

Ek Problemlerin Cevapları

11.40. (*a*) $169 = 13^2$ (*b*) $125 = 5^3$ (*c*) $\frac{1}{36} = 6^{-2}$
(*d*) $9 = 81^{1/2}$ (*e*) $\frac{1}{64} = 4^{-3}$ (*f*) $2 = 16^{1/4}$

11.41. (*a*) $13 = e^{2.56495}$ (*b*) $5.8 = e^{1.75786}$ (*c*) $0.4 = e^{-0.91629}$
(*d*) $62 = e^{4.12713}$ (*e*) $y = e^{2.35t}$ (*f*) $y = e^{7-9t}$

11.42. (*a*) $\log_8 64 = 2$ (*b*) $\log_3 81 = 4$ (*c*) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$
(*d*) $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$ (*e*) $\log_8 4 = \frac{2}{3}$ (*f*) $\log_{36} 216 = \frac{3}{2}$

11.43. (*a*) $\ln 6.7 = 1.90211$ (*b*) $\ln 0.25 = -1.38629$ (*c*) $\ln 122 = 4.80402$
(*d*) $\ln 43 = 1.76120$ (*e*) $\ln y = 0.06t$ (*f*) $\ln y = 5t + 8$

11.44. (*a*) $y = 2$ (*b*) $y = -4$ (*c*) $x = 243$
(*d*) $x = 256$ (*e*) $a = 27$ (*f*) $a = 64$

11.45. (*a*) $y = \log_a 38 + 2\log_a x$ (*b*) $y = 2\log_a x + 4\log_a y$
(*c*) $y = \log_a 7 + \log_a x - \log_a 9 - \log_a y$ (*d*) $y = 5\log_a x - 3\log_a y$

11.46. (*a*) $y = 4\ln x + 2\ln y - \ln z$ (*b*) $y = \frac{1}{4}\ln x$
(*c*) $y = \frac{1}{3}\ln x - \frac{1}{2}\ln y$ (*d*) $y = \frac{1}{2}(7\ln x - 5\ln y)$

11.47. (*a*) $y = a^{5x+8y}$ (*b*) $y = a^{2x-7y}$ (*c*) $y = a^{6xy}$ (*d*) $y = a^{(7/3)x}$

11.48. (*a*) $y = e^{-3x} = \dfrac{1}{e^{3x}}$ (*b*) $y = e^{4x-5y}$
(*c*) $y = e^{2.5x}$ (*d*) $y = e^{7x+4y}$

11.49. (*a*) $f' = -9e^{-9x}$ (*b*) $y' = 15x^2e^{5x^3}$ (*c*) $f'(x) = -42xe^{8-3x^2}$
(*d*) $y' = 72x^2e^{4x^3-17}$ (*e*) $f' = -x^5e^{(1/3)x^6}$ (*f*) $y' = \frac{1}{2}xe^{5-x^2}$

11.50. (*a*) $y' = \dfrac{4x}{2x^2-5}$ (*b*) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ (*c*) $y' = \dfrac{5}{x}$
(*d*) $f' = \dfrac{3x^2+8x-9}{x^3+4x^2-9x+16}$ (*e*) $y' = \dfrac{12}{x}$ (*f*) $f'(x) = \dfrac{30x^2}{5x^3-4}$

11.51. (*a*) $f'(x) = -15e^{-15x}$ (*b*) $y' = 28xe^{4x} + 7e^{4x}$
(*c*) $f' = (9e^{3x} + 6e^{2x})(e^{3x} + e^{2x})^2$ (*d*) $y' = \dfrac{12xe^{6x} + 4e^{6x}}{(2x+1)^2}$
(*e*) $f'(x) = \dfrac{6}{3x-7}$ (*f*) $y' = 8x(3 + 2\ln x^3)$
(*g*) $f' = \dfrac{8\ln 5x^4}{x}$ (*h*) $y' = \dfrac{e^x[\ln x - (1/x)]}{\ln^2 x}$

11.52. (*a*) 1469.33$ (*b*) 1480.24$ (*c*) 1485.95$ (*d*) 1491.82$
11.53. (*a*) 3156.19$ (*b*) 3166.93$ (*c*) 3172.46$ (*d*) 3178.12$
11.54. (*a*) 986.91$ (*b*) 1006.10$ (*c*) 1016.40$ (*d*) 1027.22$
11.55. (*a*) 19,925.63$ (*b*) 20,233.70$ (*c*) 20,381.03$ (*d*) 20,544.33$

11.56. 8.836 yıl

11.57. 12.748 yıl

11.58. (*a*) 2332.54\$ (*b*) 2290.56\$ (*c*) 2268.85\$ (*d*) 2246.64\$

11.59. (*a*) 6581.62\$ (*b*) 6565.97\$ (*c*) 6557.97\$ (*d*) 6549.85\$

11.60. (*a*) 9433.96\$ (*b*) 8396.19\$ (*c*) 7472.58\$ (*d*) 5583.95\$

11.61. (*a*) 9335.11\$ (*b*) 8135.01\$ (*c*) 7089.19\$ (*d*) 5025.66\$

11.62. (*a*) $S = 12.2e^{0.055t}$ (*b*) $G = 0.055$ veya %5.5

11.63. (*a*) $\text{TR} = 345e^{0.0725t}$ (*b*) $G = \%7.25$

11.64. (*a*) $S = 8.9e^{0.11t}$ (*b*) $G = \%11$

11.65. 50.63 milyon

11.66. 62.45 milyon TL

11.67. $G = \%6.5$

11.68. 2.42 milyon TL

Bölüm 12

İNTEGRAL HESABI

12.1 İNTEGRAL ALMA

Bölüm 9 ve 10 fonksiyonların değişim oranını hesaplayan türev hesabına ilişkindi. Türev alma, öğrendiğimiz üzere bir $F(x)$ fonksiyonunun türevini $F'(x)$ bulma sürecidir. Bununla birlikte işletme ve iktisatta genellikle bir fonksiyonun değişim oranı olan $F'(x)$ biliyoruz ve orijinal $F(x)$ fonksiyonunu bulmaya ihtiyaç duyuyoruz. Türev alma sürecini ters çevirmek ve türevden orijinal fonksiyonu bulmak *türev almanın tersi* veya *integrasyon* olarak isimlendirilir ve orijinal fonksiyon $F(x)$'de *ters türev* veya $F'(x)$'nin *integrali* olarak isimlendirilir.

ÖRNEK 1. Basit olması için $f(x) = F'(x)$ olsun, $f(x)$'in ters türevinin matematiksel ifadesi şu şekildedir:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Burada eşitliğin sol tarafı "*x'e göre f(x)'in belirsiz integrali*" şeklinde okunur. Örnek 3'te açıklanacağı üzere, $\int$ sembolü *integral işareti*, $f(x)$ *integrand* ve *c integrasyon sabiti*dir.

12.2 BELİRSİZ İNTEGRAL İÇİN KURALLAR

Aşağıdaki belirsiz integral kuralları ilgili türevlenebilme kurallarının tersi alınarak elde edilmiştir. İntegralin türevi integranda eşit olmak zorunda olduğu için kuralların doğrulukları kolayca kontrol edilebilir. Kurallar Örnek 2 ve Problem 12.1'den 12.3'e kadar gösterilmektedir.

Kural 1. Bir k sabitinin integrali

$$\int k\,dx = kx + c$$

Kural 2. $1 \cdot dx$ şeklinde değil basitçe dx şeklinde yazılan 1'in integrali

$$\int dx = x + c$$

Kural 3. $n \neq -1$ olmak üzere *üslü kuralı* olarak verilen x^n şeklindeki üslü bir fonksiyonun integrali:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$$

Kural 4. x^{-1} (veya $\frac{1}{x}$)'in integrali

$$\int x^{-1}\,dx = \ln x + c \qquad (x > 0)$$

Sadece pozitif sayıların logaritması alındığından $x > 0$ şartı gereklidir. Negatif sayılar için,

$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c \qquad (x \neq 0)$$

Kural 5. Doğal üstel fonksiyonun integrali

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c$$

Kural 6. Fonksiyon çarpı bir sabitin integrali, sabit çarpı fonksiyonun integraline eşittir.

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

Kural 7. İki veya daha fonksiyonun toplam ya da farkının integrali, fonksiyonların integrallerinin toplam ya da farkına eşittir.

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Kural 8. Bir fonksiyonun negatifinin integrali fonksiyonun integralinin negatifine eşittir.

$$\int -f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx$$

ÖRNEK 2. Aşağıda belirsiz integralin kuralları örneklendirilmektedir. Ters türevin türevinin integranda eşit olduğundan emin olmak için cevaplarınızı kontrol ediniz.

(*a*) $$\int 9\,dx = 9x + c$$ (Kural 1)

(*b*) $$\int x^4\,dx = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$$ (Kural 3)

(*c*) $$\int 4x^3\,dx = 4\int x^3\,dx$$ (Kural 6)

$$= 4\left(\frac{1}{4}x^4 + c_1\right)$$ (Kural 3)

$$= x^4 + c$$

c_1 ve c keyfi sabittir ve $4c_1 = c$'dir. c keyfi sabit olduğu için ön hesapta göz ardı edilebilir ve nihai çözüme eklenebilir.

(*d*) $$\int (2x^2 - x + 1)\,dx = 2\int x^2\,dx - \int x\,dx + \int dx$$ (Kural 6,7,8)

$$= 2\left(\frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{2}x^2 + x + c$$ (Kural 2 ve 3)

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

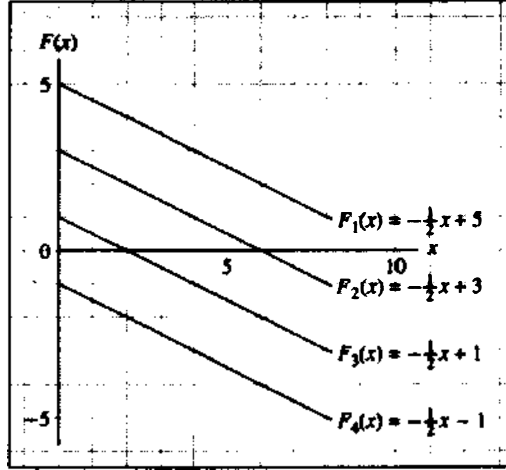
(*e*) $$\int 12x^{-1}\,dx = 12\int x^{-1}\,dx$$ (Kural 6)

$$= 12\ln|x| + c$$ (Kural 4)

(*f*) $$\int x^{-4} = \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} = -\frac{1}{3}x^{-3} + c$$ (Kural 3)

(*g*) $$\int 20e^{-4x}\,dx = 20\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-4x}\right) = -5e^{-4x} + c$$ (Kural 5)

ÖRNEK 3. Yalnızca bir k sabiti ile farklılaşan fonksiyonların aynı türeve sahip olduğunu türev alma kurallarından biliyoruz. Örneğin, fonksiyon $F(x) = -\frac{1}{2}x + k$ olmak üzere, k'nın alabileceği sonsuz sayıda değer için fonksiyon $F'(x) = f(x) = -\frac{1}{2}$ aynı türeve sahiptir. Eğer süreç tersine çevrilirse, $\int -(\frac{1}{2})dx$ sadece bir sabit ile her biri birbirinden farklılaşan sonsuz sayıda fonksiyonun olması gerektiği açıktır. Orijinal fonksiyonun bir parçası olan integrasyon sabiti c, herhangi bir sabitin değerini temsil etmek üzere kullanılır fakat türev alma kurallarında türev almaya dâhil edilmemiştir. c belirtilmemiş olmak üzere belirsiz bir integralin $\int -\frac{1}{2}dx = -\frac{1}{2}x + c$ grafiği, herhangi x'de ki $f(x)$ için teğetin eğimine paralel eğriler ailesidir. Belirtilen c eğriyi belirler; c değişirse eğri kayar. Bu Şekil 12-1'de sırasıyla c = 5, 3, 1 ve –1 olmak üzere $\int f(x)dx = F(x) + c$ belirsiz integrali ile örneklendirilmiştir.

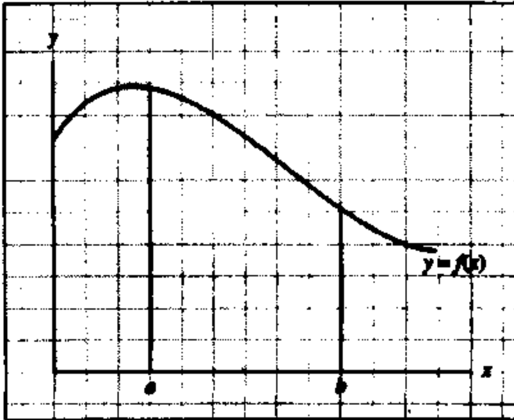


Şekil 12-1

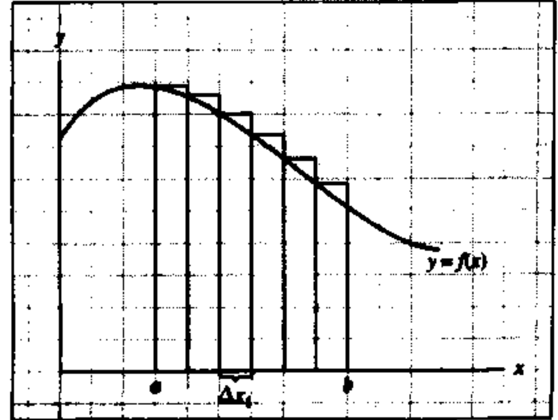
12.3 BİR EĞRİ ALTINDAKİ ALAN

Şekil 12-2 (a) da $y = f(x)$ için $x = a$ ve $x = b$ arasındaki gibi düzensiz şekilli bir eğri altında kalan alanı hesaplamak için geometrik bir formül yoktur. Bununla birlikte $[a, b]$ aralığı n sayıda alt aralığa bölünerek ve örneğin Şekil 12-2 (b)'de olduğu gibi her birinin yüksekliği alt aralıktaki fonksiyonun en büyük değerine eşit olacak şekilde dikdörtgenler oluşturularak alanın yaklaşık değeri elde edilebilir. *Riemann toplamı* olarak isimlendirilen dikdörtgenlerin alan toplamı $\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)\Delta x_i]$ ile eğrinin altındaki alanı olduğundan fazla tahmin edecektir. Daha küçük alınan her bir aralık (Δx_i) ile daha fazla dikdörtgen oluşturulur ve dikdörtgenlerin birleşimden oluşan alan $\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)\Delta x_i]$ ile eğrinin altındaki alanın değerine daha çok yaklaşır. Eğer aralık sayıları $n \rightarrow \infty$ a kadar arttırılırsa, her bir aralık bölünemeyecek kadar küçük ($\Delta x_i = dx_i = dx$) hale gelir ve eğrinin altındaki A alanı matematiksel olarak şu şekilde ifade edilir:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$



(*a*)



(*b*)

Şekil 12-2

12.4 BELİRLİ İNTEGRAL

Şekil 12-2'de olduğu gibi sürekli bir fonksiyonun grafiği altındaki alan, *a-b* aralığı boyunca $f(x)$'in *belirli integrali* olarak ifade edilebilir. Matematiksel olarak ifadesi ise,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Burada sol taraf "$f(x)\,dx$'nin *a* dan *b* ye integrali" olarak okunur ve *a* integralin *alt limiti* ve *b* integralin *üst limiti* şeklinde adlandırılır. Örnek 3'te açıklandığı gibi, $f(x)$'in tüm ters türevlerini içeren bir fonksiyonlar dizisi olan belirsiz integralin aksine belirli integral, bir sonraki kısmın başlığı olan hesabın temel teoremi kullanılarak reel bir sayı olarak hesaplanabilir.

12.5 İNTEGRAL HESABININ TEMEL TEOREMİ

Basitçe *hesabın temel teoremi* bir $f(x)$ sürekli fonksiyonunun *a-b* aralığı boyunca belirli integralin sayısal değerinin, integralin *b* üst sınırı için $F(x) + c$ ters türevinin hesaplanması, eksi aynı $F(x) + c$ ters türevinin integralin *a* alt sınırı için de hesaplanması ile belirlendiğini söyler. *c*'ler her ikisinde de ortak olduğundan çıkarma işlemi ile yok edilmiş olur. Matematiksel ifadesi,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$|_a^b$, $]_a^b$ veya $[\cdots]_a^b$ sembolleri *x* yerine sırasıyla *b* ve *a* yazılmasını ifade eder. Örnek 4, Örnek 5 ve Problem 12.4 ile 12.5'e bakınız.

ÖRNEK 4. Aşağıda verilen belirli integraller

(*a*) $\displaystyle\int_2^6 8x\,dx$ (*b*) $\displaystyle\int_1^3 (6x^2 + 5)\,dx$

şu şekilde hesaplanır:

(*a*) $$\int_2^6 8x\,dx = 4x^2\Big|_2^6 = 4(6)^2 - 4(2)^2 = 128$$

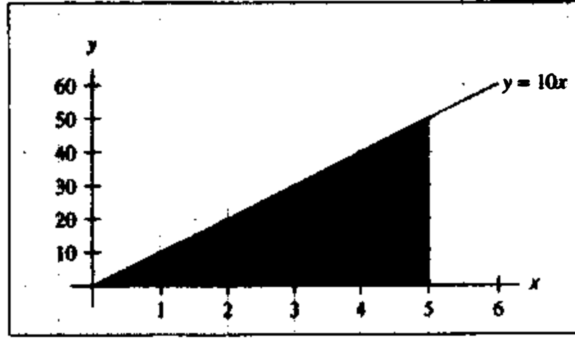
(*b*) $$\int_1^3 (6x^2 + 5)\,dx = \left[2x^3 + 5x\right]_1^3 = \left[2(3)^3 + 5(3)\right] - \left[2(1)^3 + 5(1)\right] = 69 - 7 = 62$$

ÖRNEK 5. Şekil 12-3'te 0 ve 5 aralığı boyunca eğrinin altındaki alanı belirlemek için kullanılan belirli integral aşağıdaki gibidir:

$$A = \int_0^5 10x\,dx = 5x^2\Big|_0^5 = 5(5)^2 - 5(0)^2 = 125 - 0 = 125$$

h = yükseklik ve *w* = genişlik olmak üzere $A = \frac{1}{2}hw$ geometrik formülü kullanılarak cevap kolayca kontrol edilebilir.

$$A = \frac{1}{2}hw = \frac{1}{2}yx = \frac{1}{2}(50)(5) = 125$$



Şekil 12-3

12.6 BELİRLİ İNTEGRALİN ÖZELLİKLERİ

1. İntegralin sınırlarının sırası ters çevrilirse belirli integralin işareti değişir.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{12.1}$$

2. İntegralin üst sınırı alt sınırına eşitse, belirli integralin değeri sıfırdır.

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0 \tag{12.2}$$

3. Belirli integral alt aralıkların bileşimlerinin toplamı olarak ifade edilebilir.

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \qquad a \le b \le c \tag{12.3}$$

4. Aynı sınırlara sahip iki belirli integralin toplam ve farkları, iki fonksiyonun toplam veya farkının belirli integraline eşittir.

$$\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx \tag{12.4}$$

5. Bir fonksiyon çarpı sabitin belirli integrali, sabit çarpı fonksiyonun belirli integraline eşittir.

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \tag{12.5}$$

Örnek 6 ve Problem 12.6 ile 12.7'ye bakınız.

ÖRNEK 6. Aşağıdaki belirli integraller yukarıda verilen integral özellikleri örnek üzerinde gösterilerek hesaplanmıştır.

1. $\int_1^2 3x^4\,dx = -\int_2^1 3x^4\,dx$ (Kural 1)

$$\int_1^2 3x^4\,dx = \tfrac{3}{5}x^5\Big|_1^2 = \tfrac{3}{5}(2)^5 - \tfrac{3}{5}(1)^5 = 18.6$$

$$-\int_2^1 3x^4\,dx = -\tfrac{3}{5}x^5\Big|_2^1 = -\left[\tfrac{3}{5}(1)^5 - \tfrac{3}{5}(2)^5\right] = -(-18.6) = 18.6$$

2. $\int_4^4 (3x^2 + 4x)\,dx = 0$ (Kural 2)

$$\int_4^4 (3x^2 + 4x)\,dx = (x^3 + 2x^2)\Big|_4^4$$
$$= \left[(4)^3 + 2(4)^2\right] - \left[(4)^3 + 2(4)^2\right] = 0$$

3. $\int_0^5 8x\,dx = \int_0^2 8x\,dx + \int_2^5 8x\,dx$ (Kural 3)

$$\int_0^5 8x\,dx = 4x^2\Big|_0^5 = 4(5)^2 - 4(0)^2 = 100$$
$$\int_0^2 8x\,dx = 4x^2\Big|_0^2 = 4(2)^2 - 4(0)^2 = 16$$
$$\int_2^5 8x\,dx = 4x^2\Big|_2^5 = 4(5)^2 - 4(2)^2 = 84$$

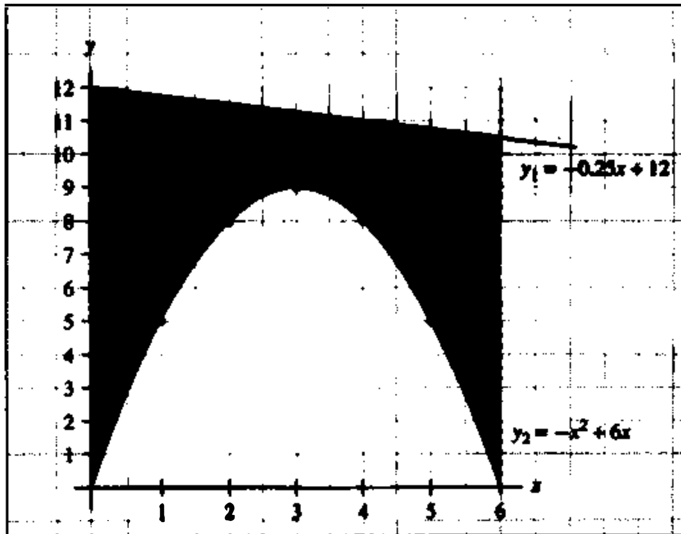
ve $16 + 84 = 100$

12.7 EĞRİLER ARASINDAKİ ALAN

İki veya daha fazla eğrinin arasındaki bir bölgenin alanı, yukarıda özetlenen belirli integralin özelliklerinden Kural 4 kullanılarak hesaplanabilir. İşlem Örnek 7'de gösterilmiştir ve Problem 12.8'den 12.15'e kadar uygulama yapılmıştır.

ÖRNEK 7. İntegralin özellikleri kullanılarak $x = 0$'dan $x = 6$'ya kadar $y_1 = -0.25x + 12$ ve $y^2 = -x^2 + 6x$ gibi iki fonksiyonun arasındaki bölgenin alanı olan A aşağıdaki gibi bulunur.

(a) Fonksiyonların grafikleri kabataslak çizilir ve Şekil 12-4'te olduğu gibi istenilen alan taranır.



Şekil 12-4

(*b*) Eğriler arasındaki ilişkiye dikkat ediniz. Gösterilen bölge boyunca y_1 y_2 nin üzerinde olduğu için istenilen bölge basitçe $x = 0$ ile $x = 6$ arasında y_1 in altında kalan alan eksi y_2 nin altında kalan alandır. Böylece,

$$A = \int_0^6 (-0.25x + 12)\,dx - \int_0^6 (-x^2 + 6x)\,dx$$

(*12.4*) kullanılır,

$$A = \int_0^6 \left[(-0.25x + 12) - (-x^2 + 6x)\right] dx$$

$$A = \int_0^6 (x^2 - 6.25x + 12)\,dx$$

$$A = \left(\frac{1}{3}x^3 - 3.125x^2 + 12x\right)\Big|_0^6 = 31.5 - 0 = 31.5$$

Problem 12.5'ten 12.8'e kadar bakınız.

12.8 YERİNE KOYMA METODU İLE İNTEGRAL ALMA

$$\int 20x^4(x^5 + 7)\,dx$$

gibi x'e göre iki türevlenenilir fonksiyonun çarpım veya bölümünün integralini almak daha önceki bölümlerde anlatılan basit kurallara göre mümkün değildir. Bununla birlikte eğer integrand başka bir fonksiyonun *sabit* bir çarpanı u ve onun türevi du/dx olarak ifade edilebiliyorsa, yerine koyma metodu ile integral almak mümkündür. İntegrand $f(x)$, u'nun bir fonksiyonu ve onun türevi du/dx olarak ifade edilip ve x'e göre integrali alındığında,

$$\int f(x)\,dx = \int \left(u\frac{du}{dx}\right) dx$$

$$\int f(x)\,dx = \int u\,du = F(u) + c$$

elde ederiz.

Yerine koyma metodu ile integral alma türev alma hesabındaki genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı ve zincir kuralı işlemini tersine çevirir. Örnek 8 ile 9 ve Problem 12.16'dan 12.23'e kadar bakınız.

ÖRNEK 8. Yerine koyma metodu ile integral alınırken belirli integrali belirlemek için aşağıdaki adımlar kullanılır.

$$\int 20x^4(x^5 + 7)\,dx$$

1. İntegrandın diğer fonksiyonun u ve onun türevi du/dx çarpı *sabit* bir katsayının çarpımı şeklinde dönüştürülebileceğinden emin olmak için kontrol ediniz. (*a*) u mutlak değeri daha büyük kuvvete sahip olan bağımsız değişkenin fonksiyonuna eşit olsun; burada $u = x^5 + 7$. (*b*) u'nun türevi alınır: $du/dx = 5x^4$. (*c*) dx için çözümlenir: $dx = du/5x^4$ ve (*d*) orijinal integranda $x^5 + 7$ yerine u ve dx yerine $du/5x^4$ yazılır:

$$\int 20x^4(x^5 + 7)\,dx = \int 20x^4 \cdot u \cdot \frac{du}{5x^4} = \int 4u\,du = 4\int u\,du$$

   4, u'nun sabit bir katsayısıdır.

2. u'ya göre integral alınır,

$$4\int u\,du = 4\left(\frac{1}{2}u^2\right) = 2u^2 + c$$

3. u yerine $x^5 + 7$ yazılarak orijinal problemdeki değişkenlere geri dönülür,

$$\int 20x^4(x^5 + 7)\,dx = 2u^2 + c = 2(x^5 + 7)^2 + c$$

4. Cevap genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı veya zincir kuralı ile türev alınarak kontrol edilir.

$$\frac{d}{dx}\left[2(x^5+7)^2+c\right]=4(x^5+7)(5x^4)=20x^4(x^5+7)$$

ÖRNEK 9. $\int 3x(x+6)^2\,dx$ integrali belirleyiniz. $u = x + 6$ olsun. Sonrasında $du/dx = 1$ ve $dx = du/1 = du$'dur. Orijinal integrandda $x + 6$ yerine u ve dx yerine du yazılır.

$$\int 3x(x+6)^2\,dx=\int 3xu^2\,du=3\int xu^2\,du$$

x değişken bir katsayı olduğundan integralin dışına çıkamaz, orijinal integrand $u\,du/dx$'in sabit katsayına dönüştürülemez. Dolayısıyla yerine koyma metodu ile integral alınamaz. Fakat kısmi integral yöntemi (Kısım 12.9) yardım edebilir.

12.9 KISMİ İNTEGRAL YÖNTEMİ

Eğer integrand x'in türevlenebilir fonksiyonlarının çarpımı veya bölümü şeklindeyse ve $u\,du/dx$'in sabit katsayısı olarak ifade edilemiyorsa, kısmi integral yöntemi yarar sağlayabilir. *Kısmi integral yöntemi* bir çarpımın türevlenebilme sürecinin tersinin alınması ile üretilmiştir. Kısım 9.7.5'te çarpım kuralından,

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)]=f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$$

Verilen türevin integrali alınır,

$$f(x)\cdot g(x)=\int\left[f(x)\cdot g'(x)\right]dx+\int\left[g(x)\cdot f'(x)\right]dx$$

Sağ taraftaki ilk integral için cebirsel çözüm yapılır,

$$\int\left[f(x)\cdot g'(x)\right]dx=f(x)\cdot g(x)-\int\left[g(x)\cdot f'(x)\right]dx \qquad (12.6)$$

Örnek 10 ile11 ve Problem 12.24'ten 12.27'e kadar bakınız.

ÖRNEK 10. Aşağıdaki integrali belirlemek için kısmi integral yöntemi kullanılmıştır.

$$\int 3x(x+6)^2\,dx$$

1. Formül (*12.6*)'da ki gibi integrandı iki parçaya ayırınız. Genel kural, daha basit fonksiyonun $f(x)$ ve daha karmaşık fonksiyonun $g'(x) = (x + 6)^2$ olarak göz önüne alınmasıdır. O halde $f(x) = 3x$ ve $g'(x) = (x + 6)^2$ olsun. Buradan $f'(x) = 3$ olur ve Kısım 12.2'de ki basit üslü kural (Kural 3) kullanılarak

   $g(x)=\int (x+6)^2\,dx$ 'in integrali alınır

$$g(x)=\frac{1}{3}(x+6)^3+c_1$$

2. (*12.6*)'da $f(x)$, $f'(x)$ ve $g(x)$'i yerine yazılır. $g'(x)$'in formülde kullanılmadığına dikkat ediniz.

$$\int 3x(x+6)^2\,dx=f(x)\cdot g(x)-\int[g(x)\cdot f'(x)]\,dx$$

$$=3x\left[\frac{1}{3}(x+6)^3+c_1\right]-\int\left[\frac{1}{3}(x+6)^3+c_1\right](3)\,dx$$

$$=x(x+6)^3+3c_1x-\int\left[(x+6)^3+3c_1\right]dx$$

3. İntegrali hesaplamak için Kural 3 kullanılır ve yerine yazılır,

$$\int 3x(x+6)^2\,dx = x(x+6)^3 + 3c_1x - \frac{1}{4}(x+6)^4 - 3c_1x + c$$

$$= x(x+6)^3 - \frac{1}{4}(x+6)^4 + c$$

c_1 teriminin nihai çözümde bulunmadığına dikkat ediniz. c_1 kısmi integral yönteminde ortak olduğu için bundan sonrasında 0 olarak varsayılacak ve sonraki problem çözümlerinde formüle eklenmeyecektir.

4. $y(x) = x(x+6)^3 - \frac{1}{4}(x+6)^4 + c$ olmak üzere cevabı kontrol ediniz. Cevabın türevini almak için çarpım ve genelleştirilmiş üslü fonksiyon kurallarını kullanınız.

$$y'(x) = \left[x \cdot 3(x+6)^2 + (x+6)^3 \cdot 1\right] - (x+6)^3$$

$$y'(x) = 3x(x+6)^2$$

ÖRNEK 11. $\int 5xe^{x-9}dx$ integrali aşağıdaki gibi belirlenir: $f(x) = 5x$ ve $g'(x) = e^{x-9}$ olsun; $f'(x) = 5$ ve Kural 5'ten $g(x) = \int e^{x-9}dx = e^{x-9}$ olur. (*12.6*)'da yerine yazılır,

$$\int 5xe^{x-9}\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\,dx$$

$$= 5x\cdot e^{x-9} - \int e^{x-9}\cdot 5\,dx = 5xe^{x-9} - 5\int e^{x-9}\,dx$$

İntegral alma işleminin sabitini hatırlayarak Kural 5 tekrar uygulanır,

$$\int 5xe^{x-9}\,dx = 5xe^{x-9} - 5e^{x-9} + c$$

Sonra $y(x) = 5xe^{x-9} - 5e^{x-9} + c$ olur ve cevap kontrol edilir,

$$y'(x) = 5x\cdot e^{x-9} + e^{x-9}\cdot 5 - 5e^{x-9} = 5xe^{x-9}$$

12.10 NAKİT AKIMININ CARİ DEĞERİ

Eşitlik (*11.8*)'de faiz sürekli bileşik faiz olduğunda, gelecekteki A parasının toplamının alacağı cari P değerinin $P = Ae^{-rt}$ olduğunu görürüz. Bu nedenle sabit bir oranda yıllık $A(t)$ doları için gelirin sürekli akımın cari değeri basitçe integraldir.

$$P_n = \int_0^n Ae^{-rt}\,dt = A\int_0^n e^{-rt}\,dt = A\left[-\frac{1}{r}e^{-rt}\right]_0^n = -\frac{A}{r}\left(e^{-rt}\right)\Big|_0^n$$

$$P_n = -\frac{A}{r}\left(e^{-rn} - e^{-r(0)}\right) = -\frac{A}{r}\left(e^{-rn} - 1\right)$$

$$P_n = \frac{A}{r}\left(1 - e^{-rn}\right) \qquad (12.7)$$

ÖRNEK 12. (*a*) Sürekli iskonto yüzde 8 iken 5 yıl için yıllık 10,000 TL'nin sabit orandaki gelirin sürekli akımının cari değeri (*12.7*) kullanılarak aşağıda hesaplanmıştır ve aynı şekilde (*b*) 4 yıl için yüzde 6'da 3,000 TL'nin cari değeri hesaplanmıştır.

(*a*)

$$P_n = \frac{10{,}000}{0.08}\left(1 - e^{-0.08(5)}\right) = 125{,}000(1 - e^{-0.4})$$

$P_n = 125{,}000(1 - 0.6703201) = 41{,}209.99\$$

(*b*)

$$P_n = \frac{3000}{0.06}\left(1 - e^{-0.06(4)}\right) = 50{,}000(1 - e^{-0.24})$$

$P_n = 50{,}000(1 - 0.7866279) = 10{,}668.61\$$

12.11 TÜKETİCİ VE ÜRETİCİ RANTI

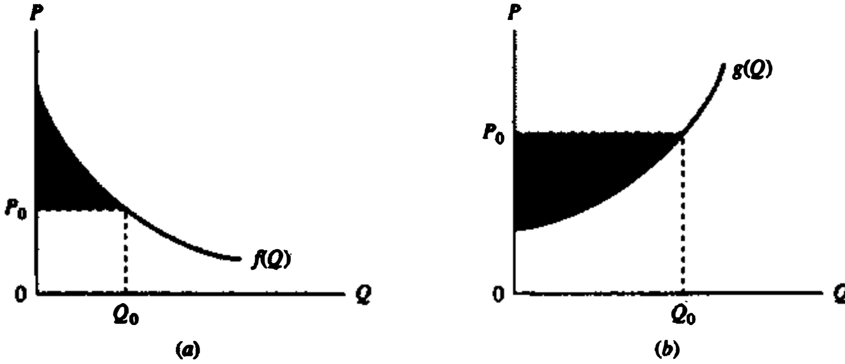
Şekil 12-5 (a)'da olduğu gibi bir talep fonksiyonu $P = f(a)$ bir malın farklı miktarları için müşterilerin ödemeye istekli oldukları farklı fiyatları ifade eder. Piyasa (Q_0, P_0) da dengede ise bütün müşterilerin aynı fiyatı ödemesi, malı satın almak için daha yüksek fiyat ödeyebilecek müşteriler fayda sağlar. Tüketici rantı olarak isimlendirilen tüketiciler için toplam fayda taralı alan ile gösterilir. Matematiksel olarak,

$$\text{Tüketici Rantı} = \int_0^{Q_0} f(Q)\,dQ - Q_0P_0 \tag{12.8}$$

Şekil 12-5 (b)'da olduğu gibi bir arz fonksiyonu $P = g(Q)$ bir malın farklı miktarları için üreticilerin arz edeceği fiyatları ifade eder. Eğer piyasa (Q_0, P_0) da dengede ise, üreticiler P_0'dan daha düşük fiyatlarda arz ederek kâr sağlamaya isteklidir. Üreticilerin toplam kazancı üretici rantı olarak ifade edilir ve taralı alan ile gösterilir. Matematiksel olarak,

$$\text{Üretici Rantı} = Q_0P_0 - \int_0^{Q_0} g(Q)\,dQ \tag{12.9}$$

Örnek 13 ile 14 ve Problem 12.40 ile 12.41'e bakınız.



Şekil 12-5

ÖRNEK 13. $P = 110 - Q^2$ talep fonksiyonu olmak üzere, piyasa dengesinin $Q_0 = 9$ ve $P_0 = 29$ iken sağlandığı varsayımı ile tüketici rantı (12.8) kullanılarak aşağıdaki gibi tahmin edilir:

$$\text{Tüketici Rantı} = \int_0^9 (110 - Q^2)\,dQ - (9)(29)$$

$$= \left[110Q - \tfrac{1}{3}Q^3\right]_0^9 - 261$$

$$= (990 - 243) - (0) - 261 = 486$$

ÖRNEK 14. $P = (Q + 6)^2$ arz fonksiyonu olmak üzere, piyasa dengesinin $Q_0 = 3$ ve $P_0 = 81$ iken sağlandığı varsayımı ile üretici rantı (*12.9*) kullanılarak aşağıdaki gibi tahmin edilir:

$$\text{Üretici Rantı} = (3)(81) - \int_0^3 (Q+6)^2\,dQ$$

$$= 243 - \left[\tfrac{1}{3}(Q+6)^3\right]_0^3$$

$$= 243 - \tfrac{1}{3}\left[(9)^3 - (6)^3\right] = 72$$

Farklı uygulamalar için Problem 12.28'den 12.41'e kadar bakınız.

Çözümlü Sorular

BELİRSİZ İNTEGRAL

12.1. Aşağıdaki belirsiz integralleri bulunuz. Vermiş olduğunuz cevaplardan emin olmak için ters türevin türevinin integranda eşit olmasını kontrol ediniz.

(*a*) $\int 8\,dx$

$$\int 8\,dx = 8x + c \qquad \text{(Kural 1)}$$

(*b*) $\int -16\,dx$

$$\int -16\,dx = -\int 16\,dx = -16x + c \qquad \text{(Kural 1 ve 8)}$$

(*c*) $\int x^5\,dx$

$$\int x^5\,dx = \frac{1}{5+1}x^{5+1} + c = \frac{1}{6}x^6 + c \qquad \text{(Kural 3)}$$

(*d*) $\int \frac{1}{x^4}\,dx$

$$\int \frac{1}{x^4}\,dx = \int x^{-4}\,dx = \left(\frac{1}{-4+1}\right)x^{-4+1} + c = -\frac{1}{3}x^{-3} + c \qquad \text{(Kural 3)}$$

(*e*) $\int 21x^6\,dx$

$$\int 21x^6\,dx = 21\int x^6\,dx = 21\cdot\frac{1}{7}\cdot x^7 + c = 3x^7 + c \qquad \text{(Kural 3 ve 6)}$$

(*f*) $\int (35x^4 - 8x^3)\,dx$

$$\int (35x^4 - 8x^3)\,dx = \frac{35}{5}x^5 - \frac{8}{4}x^4 + c = 7x^5 - 2x^4 + c \qquad \text{(Kural 3, 6, 7)}$$

(*g*) $\int -\sqrt{x}\,dx$

$$\int -\sqrt{x}\,dx = -\int x^{1/2}\,dx = \frac{-1}{(3/2)}x^{3/2} + c = -\frac{2}{3}x^{3/2} + c \qquad \text{(Kural 3 ve 8)}$$

(*h*) $\int 6e^{-1.5t}\,dt$

$$\int 6e^{-1.5t}\,dt = 6\left(\frac{1}{-1.5}\right)e^{-1.5t} + c = -4e^{-1.5t} + c \qquad \text{(Kural 5 ve 6)}$$

(*i*) $\int 20e^{1.25t}\,dt$

$$\int 20e^{1.25t}\,dt = 20\left(\frac{1}{1.25}\right)e^{1.25t} + c = 16e^{1.25t} + c \qquad \text{(Kural 5 ve 6)}$$

(*j*) $\int \frac{2}{x}\,dx$

$$\int \frac{2}{x}\,dx = \int 2x^{-1}\,dx = 2\ln|x| + c = \ln x^2 + c \qquad \text{(Kural 4 ve 6)}$$

12.2. Aşağıdaki belirsiz integralleri belirleyiniz.

(*a*) $\int 15e^{t/4}\,dt$

$$\int 15e^{t/4}\,dt = \int 15e^{(1/4)t}\,dt = 15\left[\frac{1}{(1/4)}\right]e^{(1/4)t} + c = 60e^{t/4} + c$$

(*b*) $\int x^{2/3}\,dx$

$$\int x^{2/3}\,dx = \frac{1}{(5/3)}x^{5/3} + c = \frac{3}{5}x^{5/3} + c$$

(*c*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-(1/2)}\,dx = \frac{1}{(1/2)}x^{1/2} + c = 2x^{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c$$

(*d*) $\int \frac{9}{t^4}\,dt$

$$\int \frac{9}{t^4}\,dt = \int 9t^{-4}\,dt = 9\left(\frac{1}{-3}\right)t^{-3} + c = -3t^{-3} + c$$

(*e*) $\int \sqrt{x+7}\,dx$

$$\int \sqrt{x+7}\,dx = \int (x+7)^{1/2}\,dx = \frac{1}{(3/2)}(x+7)^{3/2} + c$$

$$= \frac{2}{3}(x+7)^{3/2} + c$$

(*f*) $\int \frac{1}{x+8}\,dx$

$$\int \frac{1}{x+8}\,dx = \int (x+8)^{-1}\,dx = \ln|x+8| + c$$

(*g*) $\int 4(x-18)^{-2}\,dx$

$$\int 4(x-18)^{-2}\,dx = 4\left(\frac{1}{-1}\right)(x-18)^{-1} + c = \frac{-4}{x-18} + c$$

(*h*) $\int (e^3 + 5t^4 + 3e^{-4t})\,dt$, burada e^3 sabittir.

$$\int (e^3 + 5t^4 + 3e^{-4t})\,dt = e^3 t + t^5 - \frac{3}{4}e^{-4t} + c$$

12.3. *Başlangıç koşulu* $F(0) = k$(bir sabit) veya *sınır koşulu* $F(a) = k(a \neq 0)$ olmak üzere aşağıda verilenlerin her birinin ters türevini bulunuz.

(*a*) Başlangıç koşulu $F(0) = 19$ olmak üzere $\int (25x^{1/4} + 16x^{1/3})\,dx$

$$\int (25x^{1/4} + 16x^{1/3})\,dx = 25\left(\frac{4}{5}\right)x^{5/4} + 16\left(\frac{3}{4}\right)x^{4/3} + c$$

$$= 20x^{5/4} + 12x^{4/3} + c$$

$F(0) = 19$'da, $\quad 19 = 20(0)^{5/4} + 12(0)^{4/3} + c$

$c = 19$ ve $\quad F(x) = 20x^{5/4} + 12x^{4/3} + 19$

(*b*) $F(0) = 9$ olmak üzere $\int (16e^{2t} + 15e^{-3t})\,dt$

$$\int (16e^{2t} + 15e^{-3t})\,dt = 8e^{2t} - 5e^{-3t} + c$$

$F(0) = 9$'da, $\quad 9 = 8e^{2(0)} - 5e^{-3(0)} + c$

$e^0 = 1$ olduğundan, $\quad 9 = 8 - 5 + c \qquad c = 6$

Böylece, $\quad F(t) = 8e^{2t} - 5e^{-3t} + 6$

(*c*) $F(1) = 3$ sınır şartı olmak üzere $\int (4x^{-1} + 5x^{-2})\,dx$

$$\int (4x^{-1} + 5x^{-2})\,dx = 4\ln|x| - 5x^{-1} + c = 4\ln x - \frac{5}{x} + c$$

$F(1) = 3$'te, $\quad 3 = 4\ln 1 - \frac{5}{1} + c$

$\ln 1 = 0$ olduğundan, $\quad 3 = -5 + c \qquad c = 8$

ve $\quad F(x) = 4\ln x - \frac{5}{x} + 8$

BELİRLİ İNTEGRAL

12.4. **Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.**

(*a*) $\int_2^5 3x^2\,dx$

$$\int_2^5 3x^2\,dx = x^3\Big|_2^5 = (5)^3 - (2)^3 = 125 - 8 = 117$$

(*b*) $\int_1^3 -36x^{-3}\,dx$

$$\int_1^3 -36x^{-3}\,dx = 18x^{-2}\Big|_1^3 = \frac{18}{(3)^2} - \frac{18}{(1)^2} = 2 - 18 = -16$$

(*c*) $\int_9^{49} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int_9^{49} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_9^{49} x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2}\Big|_9^{49} = 2\sqrt{49} - 2\sqrt{9} = 8$$

(*d*) $\int_1^8 3x^{-1}\,dx$

$$\int_1^8 3x^{-1}\,dx = 3\ln x\Big|_1^8 = 3\ln 8 - 3\ln 1 = 3\ln 8 - 3(0) = 3\ln 8$$

(*e*) $\int_4^9 12\sqrt{x}\,dx$

$$\int_4^9 12\sqrt{x}\,dx = \int_4^9 12x^{1/2}\,dx = 8x^{3/2}\Big|_4^9$$

$$= 8(9)^{3/2} - 8(4)^{3/2} = 8(27) - 8(8) = 152$$

12.5. Aşağıda verilen belirli integralleri hesaplayınız.

(*a*) $\int_1^2 (9x^2 + 4x)\,dx$

$$\int_1^2 (9x^2 + 4x)\,dx = \left[3x^3 + 2x^2\right]_1^2$$

$$= \left(3(2)^3 + 2(2)^2\right) - \left(3(1)^3 + 2(1)^2\right)$$

$$= 32 - 5 = 27$$

(*b*) $\int_1^8 (8x^{1/3} + 4x^{-1/3})\,dx$

$$\int_1^8 (8x^{1/3} + 4x^{-1/3})\,dx = \left[6x^{4/3} + 6x^{2/3}\right]_1^8$$

$$= 6\left[(8)^{4/3} + (8)^{2/3}\right] - 6\left[(1)^{4/3} + (1)^{2/3}\right]$$

$$= 120 - 12 = 108$$

(*c*) $\int_0^1 e^{t/3}\,dt$

$$\int_0^1 e^{t/3}\,dt = 3e^{t/3}\Big|_0^1 = 3e^{1/3} - 3e^0 = 3(e^{1/3} - 1)$$

(*d*) $\int_0^1 20e^{-5t}\,dt$

$$\int_0^1 20e^{-5t}\,dt = -4e^{-5t}\Big|_0^1 = -4e^{-5} - (-4e^0) = 4(1 - e^{-5})$$

(*e*) $\int_0^2 (5 + x)^2\,dx$

$$\int_0^2 (5 + x)^2\,dx = \tfrac{1}{3}(5 + x)^3\Big|_0^2 = \tfrac{1}{3}\left[(7)^3 - (5)^3\right] = \tfrac{1}{3}(218) \approx 72.67$$

BELİRLİ İNTEGRALLERİN ÖZELLİKLERİ

12.6. $\int_{-3}^{3}(6x^2 + 18x)\,dx = \int_{-3}^{0}(6x^2 + 18\ \ )\,dx + \int_{0}^{3}(6x^2 + 18x)\,dx$ olduğunu gösteriniz.

$$\int_{-3}^{3}(6x^2 + 18x)\,dx = (2x^3 + 9x^2)\Big|_{-3}^{3} = 135 - 27 = 108$$

$$\int_{-3}^{0}(6x^2 + 18x)\,dx = (2x^3 + 9x^2)\Big|_{-3}^{0} = 0 - 27 = -27$$

$$\int_{0}^{3}(6x^2 + 18x)\,dx = (2x^3 + 9x^2)\Big|_{0}^{3} = 135 - 0 = 135$$

Bu cevabı kontrol edelim,

$$-27 + 35 = 108$$

12.7. $\int_{0}^{25}(5x + x^{-1/2})\,dx = \int_{0}^{9}(5x + x^{-1/2})\,dx + \int_{9}^{16}(5x + x^{-1/2})\,dx + \int_{16}^{25}(5x + x^{-1/2})\,dx$

olduğunu gösteriniz.

$$\int_{0}^{25}(5x + x^{-1/2})\,dx = (2.5x^2 + 2x^{1/2})\Big|_{0}^{25} = 1562.5 + 10 = 1572.5$$

$$\int_{0}^{9}(5x + x^{-1/2})\,dx = (2.5x^2 + 2x^{1/2})\Big|_{0}^{9} = 202.5 + 6 = 208.5$$

$$\int_{9}^{16}(5x + x^{-1/2})\,dx = (2.5x^2 + 2x^{1/2})\Big|_{9}^{16} = 648 - 208.5 = 439.5$$

$$\int_{16}^{25}(5x + x^{-1/2})\,dx = (2.5x^2 + 2x^{1/2})\Big|_{16}^{25} = 1572.5 - 648 = 924.5$$

Bu cevabı kontrol edelim,

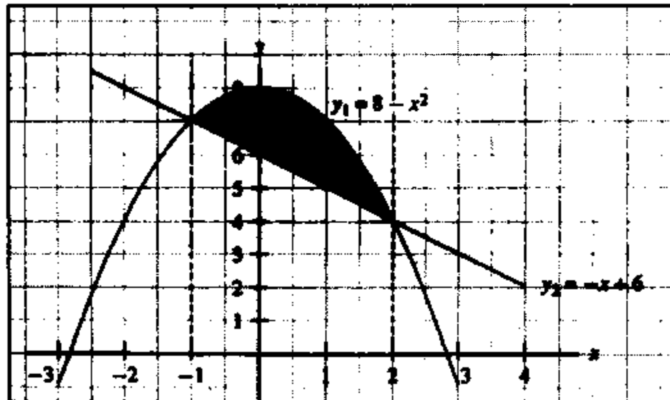
$$208.5 + 439.5 + 924.5 = 1572.5$$

EĞRİLER ARASINDAKİ ALAN

12.8. (*a*) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz ve (*b*) belirtilmiş aralık boyunca eğriler arasında kalan alanı hesaplayınız.

$x = -1$'den $x = 2$'ye $y_1 = 8 - x^2$ ve $y_2 = -x + 6$

(*a*) Şekil 12-6'ya bakınız.



Şekil 12-6

(*b*) Şekil 12-6'da istenilen alan, $x = -1$'den $x = 2$'ye $y_1 = 8 - x^2$ tarafından belirlenen eğrinin altında kalan alan eksi $x = -1$'den $x = 2$'ye $y_2 = -x + 6$ tarafından belirlenen eğrinin altında kalan alandır. Belirli integralin özellikleri kullanılır,

$$A = \int_{-1}^{2} (8 - x^2)\,dx - \int_{-1}^{2} (-x + 6)\,dx$$

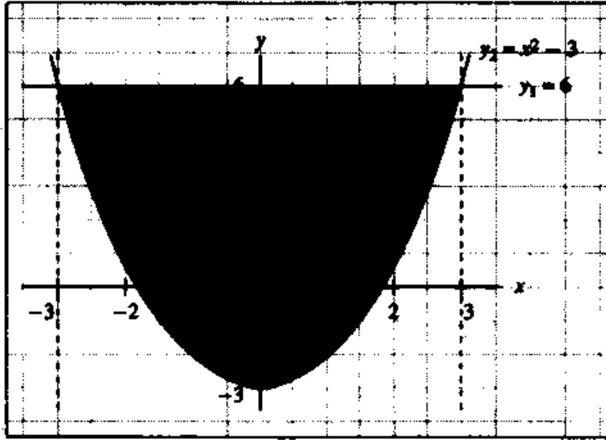
(*12.4*)'ten
$$A = \int_{-1}^{2} \left[(8 - x^2) - (-x + 6)\right] dx$$

$$A = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\,dx = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$A = 3\tfrac{1}{3} - \left(-1\tfrac{1}{6}\right) = 4\tfrac{1}{2}$$

12.9. $x = -3$'ten $x = 3$'e $y_1 = 6$, $y_2 = x^2$ olmak üzere Problem 12.8'in sorularını tekrar çözünüz.

(*a*) Şekil 12-7'ye bakınız.



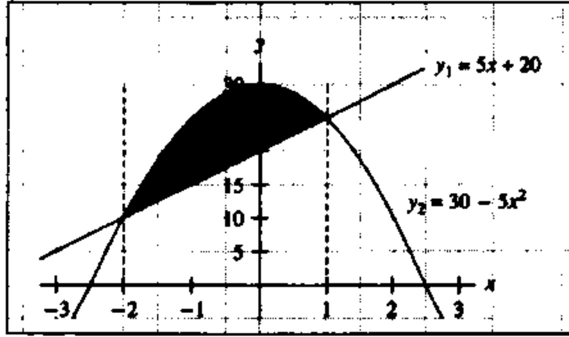
Şekil 12-7

(*b*)
$$A = \int_{-3}^{3} 6\,dx - \int_{-3}^{3} (x^2 - 3)\,dx = \int_{-3}^{3} (-x^2 + 9)\,dx$$

$$A = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + 9x\right]_{-3}^{3} = 18 - (-18) = 36$$

12.10. $x = -2$'den $x = 1$'ye $y_1 = 5x + 20$, $y_2 = 30 - 5x^2$ olmak üzere Problem 12.8'in sorularını tekrar çözünüz.

(*a*) Şekil 12-8'ye bakınız.



Şekil 12-8

(*b*)

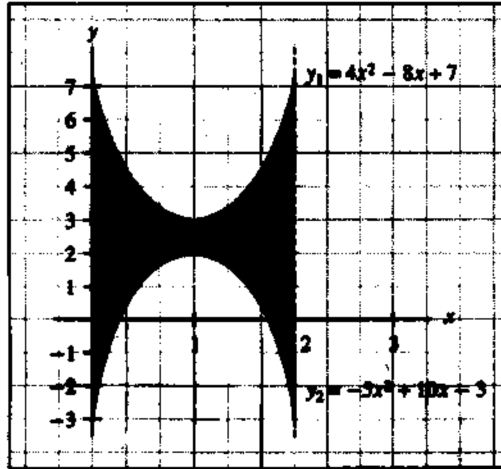
$$A = \int_{-2}^{1} (30 - 5x^2)\,dx - \int_{-2}^{1} (5x + 20)\,dx$$

$$A = \int_{-2}^{1} (-5x^2 - 5x + 10)\,dx$$

$$A = \left(-\tfrac{5}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 10x\right)\Big|_{-2}^{1} = \tfrac{35}{6} - \left(-\tfrac{50}{3}\right) = \tfrac{135}{6} = 22.5$$

12.11. $x = 0$'dan $x = 2$'ye $y_1 = 4x^2 - 8x + 7$, $y_2 = -5x^2 + 10x - 3$ olmak üzere Problem *12.8*'in sorularını tekrar çözünüz.

(*a*) Şekil 12-9'ye bakınız.



Şekil 12-9

(*b*)

$$A = \int_0^2 (4x^2 - 8x + 7)\,dx - \int_0^2 (-5x^2 + 10x - 3)\,dx$$

$$A = \int_0^2 (9x^2 - 18x + 10)\,dx$$

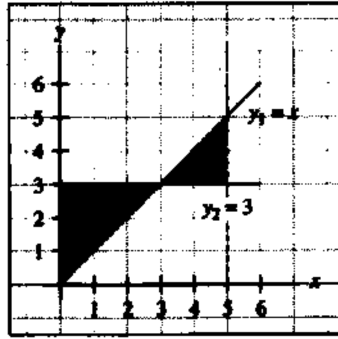
$$A = (3x^3 - 9x^2 + 10x)\Big|_0^2 = 8 - 0 = 8$$

12.12. (*a*) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz ve (*b*) verilen aralık boyunca eğrilerin arasındaki alanı hesaplayınız:

$x = 0$'dan $x = 5$'e $y_1 = x$, $y_2 = 3$

Kesişim noktasında eğrilerin ilgili pozisyonundaki değişime dikkat ediniz.

(*a*) Şekil 12-10'a bakınız.



Şekil 12-10

(*b*)

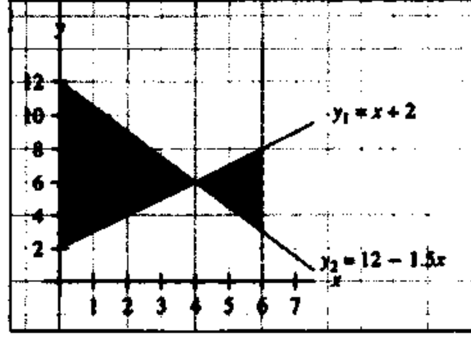
$$A = \int_0^3 (3 - x)\,dx + \int_3^5 (x - 3)\,dx$$

$$A = \left(3x - \tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^3 + \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 3x\right)\Big|_3^5$$

$$A = 4\tfrac{1}{2} + 2 = 6\tfrac{1}{2}$$

12.13. $x = 0$'dan $x = 6$'ya $y_1 = x + 2$, $y_2 = 12 - 1.5x$ olmak üzere Problem 12.12'deki soruları tekrar çözünüz.

(*a*) Şekil 12-11'e bakınız.



Şekil 12-11

(*b*)

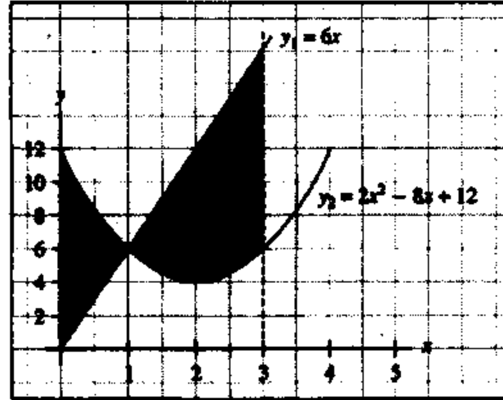
$$A = \int_0^4 [(12 - 1.5x) - (x + 2)]\,dx + \int_4^6 [(x + 2) - (12 - 1.5x)]\,dx$$

$$A = \int_0^4 (-2.5x + 10)\,dx + \int_4^6 (2.5x - 10)\,dx$$

$$A = (-1.25x^2 + 10x)\Big|_0^4 + (1.25x^2 - 10x)\Big|_4^6 = 20 + 5 = 25$$

12.14. $x = 0$'dan $x = 3$'e $y_1 = 6x$, $y_2 = 2x^2 - 8x + 12$ olmak üzere Problem 12.12'deki soruları tekrar çözünüz.

(*a*) Şekil 12-12'ye bakınız.



Şekil 12-12

(*b*)

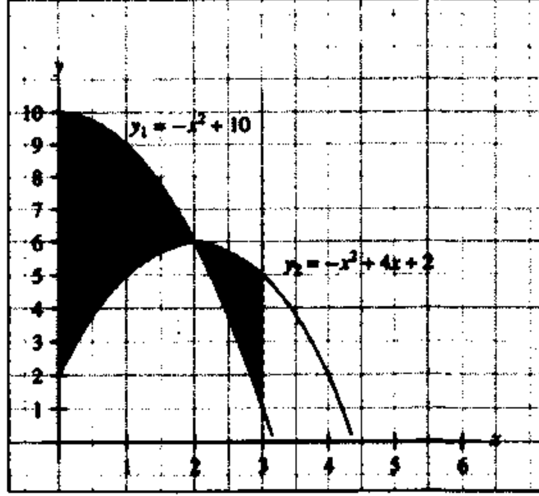
$$A = \int_0^1 \left[(2x^2 - 8x + 12) - (6x)\right] dx + \int_1^3 \left[(6x) - (2x^2 - 8x + 12)\right] dx$$

$$A = \int_0^1 (2x^2 - 14x + 12)\,dx + \int_1^3 (-2x^2 + 14x - 12)\,dx$$

$$A = \left(\tfrac{2}{3}x^3 - 7x^2 + 12x\right)\Big|_0^1 + \left(-\tfrac{2}{3}x^3 + 7x^2 - 12x\right)\Big|_1^3 = 5\tfrac{2}{3} + 14\tfrac{2}{3} = 20\tfrac{1}{3}$$

12.15. $x = 0$'dan $x = 3$'e $y_1 = -x^2 + 10$, $y_2 = -x^2 + 4x + 2$ olmak üzere Problem 12.12'deki soruları tekrar çözünüz.

(*a*) Şekil 12-13'e bakınız.



Şekil 12-13

(*b*)
$$A = \int_0^2 [(-x^2 + 10) - (-x^2 + 4x + 2)]\,dx + \int_2^3 [(-x^2 + 4x + 2) - (-x^2 + 10)]\,dx$$

$$A = \int_0^2 (-4x + 8)\,dx + \int_2^3 (4x - 8)\,dx$$

$$A = (-2x^2 + 8x)\Big|_0^2 + (2x^2 - 8x)\Big|_2^3$$

$$A = 8 + 2 = 10$$

YERİNE KOYMA METODU İLE İNTEGRAL ALMA

12.16. Yerine koyma metodu kullanarak aşağıdaki çarpma işlemi içeren fonksiyonların belirli integrallerini belirleyiniz. Cevaplarınızı kontrol ediniz.

$$\int 60x^2(x^3 + 5)^4\,dx$$

Mutlak değeri daha yüksek kuvveti içeren bağımsız değişken u fonksiyonu olarak seçilir, $u = x^3 + 5$ olsun. Sonra $du/dx = 3x^2$ ve dx için cebirsel çözüm yapıldığında, $dx = du/3x^2$. Bu değerler fonksiyonun daha basit $u\ du/dx$ şeklinde yazılabilmesi için orijinal integrandda yerine yazılır,

$$\int 60x^2(x^3 + 5)^4\,dx = \int 60x^2 \cdot u^4 \cdot \frac{du}{3x^2} = \int 20u^4\,du$$

u'ya göre basit üslü kuralı ile integral alınır,

$$\int 20u^4\,du = 20 \cdot \frac{1}{5}u^5 + c = 4u^5 + c$$

Sonra u yerine $x^3 + 5$ yazılır,

$$\int 60x^2(x^3+5)^4\,dx = 4u^5 + c = 4(x^3+5)^5 + c$$

12.17. $\int 84x(7x^2-4)^3\,dx$

için Problem 12.16 sorusunu tekrar yapınız.

$u = 7x^2 - 4$ olsun; sonra $du/dx = 14x$ ve $dx = du/14x$'tir. Orijinal integrandda yerine yazılır,

$$\int 84x(7x^2-4)^3\,dx = \int 84x \cdot u^3 \cdot \frac{du}{14x} = \int 6u^3\,du$$

İntegrali alınır, $\int 6u^3\,du = 6 \cdot \frac{1}{4}u^4 + c = 1.5u^4 + c$

Yerine yazılır, $\int 84x(7x^2-4)^3dx = 1.5u^4 + c = 1.5(7x^2-4)^4 + c$

12.18. Yerine koyma metodu kullanarak bölüm işlemi içeren aşağıdaki fonksiyonun belirsiz integralini belirleyiniz.

$$\int \frac{72x}{(9x^2+2)^5}\,dx$$

$u = 9x^2 + 2$ olsun; sonra $du/dx = 18x$ ve $dx = du/18x$'tir. Yerine yazılır,

$$\int \frac{72x}{(9x^2+2)^5}\,dx = \int 72x \cdot \frac{1}{u^5} \cdot \frac{du}{18x} = \int \frac{4}{u^5}\,du = \int 4u^{-5}\,du$$

İntegrali alınır, $\int 4u^{-5}\,du = 4\left(-\frac{1}{4}\right)u^{-4} + c = -u^{-4} + c$

Yerine yazılır, $\int \frac{72x}{(9x^2+2)^5}\,dx = -u^{-4} + c = -(9x^2+2)^{-4} + c$

$$= \frac{-1}{(9x^2+2)^4} + c$$

12.19. $\int \frac{10x^2}{5x^3-8}\,dx$

olmak üzere Problem 12.18'i tekrar çözünüz.

$u = 5x^3 - 8$ olsun; sonra $du/dx = 15x^2$ ve $dx = du/15x^2$ dir. Yerine yazılır,

$$\int \frac{10x^2}{5x^3-8}\,dx = \int 10x^2 \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{15x^2} = \int \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{u}du = \frac{2}{3}\int u^{-1}\,du$$

İntegrali alınır, $\frac{2}{3}\int u^{-1}\,du = \frac{2}{3}\ln|u| + c$

Yerine yazılır, $\int \frac{10x^2}{5x^3-8}\,dx = \frac{2}{3}\ln|u| + c = \frac{2}{3}\ln|5x^3-8| + c$

12.20. Yerine koyma metodu kullanarak köklü sayı içeren aşağıdaki fonksiyonun belirsiz integralini belirleyiniz.

$$\int 72x^2\sqrt{8x^3+5}\,dx$$

$u = 8x^3 + 5$ olsun; sonra $du/dx = 24x^2$ ve $dx = du/24x^2$ dir. Orijinal integrandda yerine yazılır,

$$\int 72x^2\sqrt{8x^3+5}\,dx = \int 72x^2 \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{du}{24x^2} = 3\int u^{1/2}\,du$$

İntegrali alınır,
$$3\int u^{1/2}\,du = 3 \cdot \frac{2}{3}u^{3/2} + c = 2u^{3/2} + c$$

Yerine yazılır,
$$\int 72x^2\sqrt{8x^3+5}\,dx = 2u^{3/2} + c = 2(8x^3+5)^{3/2} + c$$
$$= 2\left(\sqrt{8x^3+5}\right)^3 + c$$

12.21. $\displaystyle\int \frac{15x^4}{\sqrt{6x^5-34}}\,dx$

olmak üzere Problem 12.20'yi tekrar çözünüz. $u = 6x^5 - 34$ olsun; sonra $du/dx = 30x^4$ ve $dx = du/30x^4$ tür. Yerine yazılır,

$$\int \frac{15x^4}{\sqrt{6x^5-34}}\,dx = \int 15x^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{30x^4} = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du$$

İntegrali alınır,
$$\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2} \cdot 2u^{1/2} + c = u^{1/2} + c$$

Yerine yazılır,
$$\int \frac{15x^4}{\sqrt{6x^5-34}}\,dx = u^{1/2} + c = (6x^5-34)^{1/2} + c$$
$$= \sqrt{6x^5-34} + c$$

12.22. Yerine koyma metodu kullanarak aşağıdaki doğal üstel fonksiyonun belirsiz integralini bulunuz.

$$\int 6xe^{3x^2}\,dx$$

$u = 3x^2$ olsun; sonra $du/dx = 6x$ ve $dx = du/6x$'tir. Yerine yazılır,

$$\int 6xe^{3x^2}\,dx = \int 6x \cdot e^u \cdot \frac{du}{6x} = \int e^u\,du$$

İntegrali alınır,
$$\int e^u\,du = e^u + c$$

u yerine $3x^2$ yazılır,

$$\int 6xe^{3x^2}\,dx = e^u + c = e^{3x^2} + c$$

12.23.

$$\int 36x^5 e^{2x^6}\, dx$$

için Problem 12.22'yi tekrar çözünüz.

$u = 2x^6$ olsun; sonra $du/dx = 12x^5$ ve $dx = du/12x^5$ tir ve

$$\int 36x^5 e^{2x^6}\, dx = \int 36x^5 \cdot e^u \cdot \frac{du}{12x^5} = 3\int e^u\, du$$

İntegrali alınır,

$$3\int e^u\, du = 3e^u + c$$

Yerine yazılır,

$$\int 36x^5 e^{2x^6}\, dx = 3e^u + c = 3e^{2x^6} + c$$

KISMİ İNTEGRAL YÖNTEMİ

12.24. Kısmi integral yöntemi kullanarak aşağıdaki çarpım işlemi içeren fonksiyonların her birinin belirsiz integralini bulunuz. Cevaplarınızı kontrol ediniz, kısmi integral yöntemiyle elde edilen cevapları kontrol etmek için çarpım kuralının gerekli olduğunu hatırlayınız.

(*a*)

$$\int x(x-8)^3\, dx$$

Daha basit fonksiyon $f(x)$, daha karmaşık fonksiyon $g'(x)$ olmak üzere $f(x) = x$ ve $g'(x) = (x-8)^3$ olsun. $f'(x) = 1$ ve $g(x) = \int (x-8)^3 dx = \frac{1}{4}(x-8)^4 + c_1$ 'den c_1 çıkarılacaktır ve Örnek 10'da açıklandığı gibi göz ardı edilebilir. İlgili değerleri (*12.6*)'da yerine yazılır,

$$\int x(x-8)^3\, dx = f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\, dx$$

$$= x\cdot \frac{1}{4}(x-8)^4 - \int \left[\frac{1}{4}(x-8)^4 \cdot (1)\right] dx$$

$$= \frac{x}{4}(x-8)^4 - \int \frac{1}{4}(x-8)^4\, dx$$

Sonra yukarıdaki $\int \frac{1}{4}(x-8)^4\, dx = \frac{1}{20}(x-8)^5 + c$ de yerine yazılır,

$$\int x(x-8)^3\, dx = \frac{x}{4}(x-8)^4 - \frac{1}{20}(x-8)^5 + c$$

(*b*)

$$\int 56x(x+11)^6\, dx$$

$f(x) = 56x$ ve $g'(x) = (x+11)^6$ olsun, sonra $f'(x) = 56$ ve $g(x) = \dfrac{1}{7}(x+11)^7$. (*12.6*)'da yerine yazılır,

$$\int 56x(x+11)^6\, dx = 56x \cdot \frac{1}{7}(x+11)^7 - \int \left[\frac{1}{7}(x+11)^7 \cdot 56\right] dx$$

$$= 8x(x+11)^7 - \int 8(x+11)^7\, dx$$

Tekrar integral alınır,

$$\int 56x(x+11)^6\, dx = 8x(x+11)^7 - (x+11)^8 + c$$

12.25. Kısmi integral yöntemi kullanarak aşağıdaki bölme işlemi içeren fonksiyonların her birinin belirsiz integralini bulunuz.

(*a*)
$$\int \frac{24x}{(x+7)^4}\,dx$$

$f(x) = 24x$ ve $g'(x) = (x + 7)^{-4}$ olsun, sonra $f'(x) = 24$ ve $g(x) = \int (x+7)^{-4}\,dx = -\frac{1}{3}(x+7)^{-3}$ tür. Yerine yazılır,

$$\int \frac{24x}{(x+7)^4}\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\,dx$$
$$= 24x\left[-\frac{1}{3}(x+7)^{-3}\right] - \int\left[-\frac{1}{3}(x+7)^{-3}\cdot 24\right]dx$$
$$= -8x(x+7)^{-3} + 8\int (x+7)^{-3}\,dx$$

$8\int (x+7)^{-3}\,dx = -4(x+7)^{-2} + c$ yukarıda yerine yazılır, $-4\,(x+7)^{-2} + c$

$$\int \frac{24x}{(x+7)^4}\,dx = -8x(x+7)^{-3} - 4(x+7)^{-2} + c$$
$$= \frac{-8x}{(x+7)^3} - \frac{4}{(x+7)^2} + c$$

(*b*)
$$\int -\frac{22x}{(x+4)^3}\,dx$$

$f(x) = -22x$ ve $g'(x) = (x + 4)^{-3}$ olsun, sonra $f'(x) = -22$ ve $g(x) = -\frac{1}{2}(x+4)^{-2}$ dir. (*12.6*)'da yerine yazarsak,

$$\int \frac{-22x}{(x+4)^3}\,dx = -22x\left[-\frac{1}{2}(x+4)^{-2}\right] - \int\left[-\frac{1}{2}(x+4)^{-2}\cdot(-22)\right]dx$$
$$= 11x(x+4)^{-2} - \int 11(x+4)^{-2}\,dx$$

Tekrar integral alınır,

$$\int \frac{-22x}{(x+4)^3}\,dx = 11x(x+4)^{-2} + 11(x+4)^{-1} + c$$

12.26. Kısmi integral yöntemi kullanarak aşağıdaki köklü sayı içeren fonksiyonların her birinin belirsiz integralini bulunuz.

(*a*)
$$\int 30x\sqrt{9+x}\,dx$$

$f(x) = 30x$ ve $g'(x) = (9 + x)^{1/2}$ olsun, sonra $f'(x) = 30$ ve $g(x) = \int (9+x)^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}(9+x)^{3/2}$ dir. Yerine yazılır,

$$\int 30x\sqrt{9+x}\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\,dx$$
$$= 30x\cdot\frac{2}{3}(9+x)^{3/2} - \int\left[\frac{2}{3}(9+x)^{3/2}\cdot 30\right]dx$$
$$= 20x(9+x)^{3/2} - 20\int (9+x)^{3/2}\,dx$$

$-20\int (9+x)^{3/2}\,dx = -8(9+x)^{5/2} + c$ yukarıda yerine yazılır,

$$\int 30x\sqrt{9+x}\,dx = 20x(9+x)^{3/2} - 8(9+x)^{5/2} + c$$

(*b*)

$$\int \frac{9x}{\sqrt{x+23}}\,dx$$

$f(x) = 9x$ ve $g'(x) = (x+23)^{-1/2}$ olsun, sonra $f'(x) = 9$ ve $g(x) = 2\,(x+23)^{1/2}$ dir. (*12.6*)'da yerine yazılır,

$$\int \frac{9x}{\sqrt{x+23}}\,dx = 9x \cdot 2(x+23)^{1/2} - \int \left[2(x+23)^{1/2} \cdot 9\right] dx$$

$$= 18x(x+23)^{1/2} - \int 18(x+23)^{1/2}\,dx$$

Tekrar integrali alınır,

$$\int \frac{9x}{\sqrt{x+23}}\,dx = 18x(x+23)^{1/2} - 12(x+23)^{3/2} + c$$

12.27. Kısmi integral yöntemi kullanarak aşağıdaki doğal üstel fonksiyon içeren fonksiyonların her birinin belirsiz integralini bulunuz.

(*a*)

$$\int (x+5)e^x\,dx$$

$f(x) = x + 5$ ve $g'(x) = e^x$ olsun, sonra $f'(x) = 1$ ve $g(x) = \int e^x dx = e^x$ tir. Yerine yazılır,

$$\int (x+5)e^x\,dx = (x+5)e^x - \int e^x\,dx$$

$\int e^x dx = e^x + c$ yukarıda yerine yazılır,

$$\int (x+5)e^x\,dx = (x+5)e^x - e^x + c$$

(*b*)

$$\int 24x^2 e^{6x}\,dx$$

$f(x) = 24x^2$ ve $g'(x) = e^{6x}$ olsun. Sonra $f'(x) = 48x$ ve $g(x) = \frac{1}{6}e^{6x}$ tir. (*12.6*)'da yerine yazılır,

$$\int 24x^2 e^{6x}\,dx = 24x^2 \cdot \tfrac{1}{6}e^{6x} - \int \left[\tfrac{1}{6}e^{6x} \cdot 48x\right] dx$$

$$= 4x^2 e^{6x} - \int 8xe^{6x}\,dx$$

Tekrar kısmi integral yöntemi kullanılır,

$$\int 24x^2 e^{6x}\,dx = 4x^2 e^{6x} - \left[8x \cdot \tfrac{1}{6}e^{6x} - \int \left(\tfrac{1}{6}e^{6x} \cdot 8\right) dx\right]$$

$$= 4x^2 e^{6x} - \tfrac{4}{3}xe^{6x} + \int \tfrac{4}{3}e^{6x}\,dx$$

$$= 4x^2 e^{6x} - \tfrac{4}{3}xe^{6x} + \tfrac{2}{9}e^{6x} + c$$

PRATİK UYGULAMALAR

12.28. x üretilen birim sayısı olmak üzere, bir firmanın marjinal maliyet fonksiyonu $MC = x^2 - 6x +$ 125'tir. Sabit maliyetler 280 TL'dir. Üretilen x birimin toplam maliyeti TC'yi bulunuz.

$$\text{TC} = \int \text{MC}\,dx = \int (x^2 - 6x + 125)\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 125x + c$$

Sabit maliyet bilgisi yerine yazılır: TC(0) = 280,

$$280 = \tfrac{1}{3}(0)^3 - 3(0)^2 + 125(0) + c \qquad c = 280$$

Böylece, $\text{TC} = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 125x + 280$

Marjinal maliyet fonksiyonunu elde etmek için toplam maliyet fonksiyonunun integralinin alındığına, sabit maliyet FC'nin daima integralin sabiti olduğuna dikkat ediniz.

12.29. Marjinal maliyet fonksiyonu $MC = x^2 - 5x + 89$ ve sabit maliyetler 225 TL olmak üzere toplam maliyet fonksiyonu TC'yi bulunuz.

$$\text{TC} = \int (x^2 - 5x + 89)\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 2.5x^2 + 89x + c$$

c yerine FC = 225 yazılır,

$$\text{TC} = \tfrac{1}{3}x^3 - 2.5x^2 + 89x + 225$$

12.30. Bir üreticinin marjinal maliyeti $MC = 1/8x^2 - x + 320$'dir. Mevcut üretim 6 birim ise 2 birim ekstra üretimin toplam maliyeti TC nedir?

$$\text{TC}(8) - \text{TC}(6) = \int_6^8 \text{MC}\,dx = \int_6^8 \left(\tfrac{1}{8}x^2 - x + 320\right) dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{24}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 320x\right]_6^8 = 2549\tfrac{1}{3} - 1911 = 638\tfrac{1}{3}$$

12.31. Bir firmanın marjinal geliri $MR = 425 - 0.5x - 0.15x^2$ dir. Toplam geliri TR'yi bulunuz.

$$\text{TR} = \int \text{MR}\,dx = \int (425 - 0.5x - 0.15x^2)\,dx$$

$$\text{TR} = 425x - 0.25x^2 - 0.05x^3 + c$$

Satış olmadığında gelir de olmayacağı için TR(0) = 0'dır. Bir TR fonksiyonunu bulmak için MR fonksiyonunun integrali alındığından integralin sabiti c daima sıfıra eşittir. Dolayısıyla

$$\text{TR} = 425x - 0.25x^2 - 0.05x^3$$

12.32. $\text{MR} = 185 - 0.4x - 0.3x^2$ olmak üzere TR'yi bulunuz.

$$\text{TR} = \int (185 - 0.4x - 0.3x^2)\,dx = 185x - 0.2x^2 - 0.1x^3$$

12.33. $\text{MR} = 270 - 8x$ olmak üzere, günlük satışların 5 birimden 9 birime artmasından kaynaklanan ek toplam geliri bulunuz.

$$\text{TR}(9) - \text{TR}(5) = \int_5^9 \text{MR}\,dx = \int_5^9 (270 - 8x)\,dx$$

$$= \left[270x - 4x^2\right]_5^9 = 2106 - 1250 = 856$$

12.34. MR = 15 olmak üzere tam rekabet ortamında ki bir üretici için satışların 100 birimden 250 birime artmasından kaynaklanan ek toplam geliri bulunuz.

$$\text{TR}(250) - \text{TR}(100) = \int_{100}^{250} \text{MR}\,dx = \int_{100}^{250} 15\,dx$$

$$= \left[15x\right]_{100}^{250} = 3750 - 1500 = 2250$$

12.35. Bir imalatçının marjinal kârı $\pi' = -3x^2 + 80x + 140$'tır. Üretimin 2 birimden 4 birime arttırılmasıyla elde edilen ek kâr π'yi bulunuz.

$$\pi(4) - \pi(2) = \int_2^4 (-3x^2 + 80x + 140)\,dx$$

$$= \left(-x^3 + 40x^2 + 140x\right)_2^4 = 704$$

12.36. Bir fabrikanın bakım giderleri $M(t)$ bina ve ekipmanlar eskidikçe artar. Bakım giderlerinin artış oranı, t yıl olmak üzere yıllık $M'(t) = 75t^2 + 9000$ dolardır. Fabrikanın 4. yıldan 6. yıla kadar olan toplam bakım giderlerini bulunuz.

$$M(6) - M(4) = \int_4^6 (75t^2 + 9000)\,dt$$

$$= \left(25t^3 + 9000t\right)_4^6 = 21,800$$

12.37. Bir araba ilk yıllarında daha hızlı ve sonraki yıllarda ise daha yavaş değer kaybeder. Bir arabanın yıllar içinde kaybettiği değerin oranı $0 \leq t \leq 8$ için $V'(t) = 300\,(t - 8)$ ve etiket fiyatı 12,000 TL olmak üzere, (*a*) arabanın değerini $V(t)$, (*b*) ilk 4 yılda arabanın kaybettiği değerin toplam miktarını, (*c*) sonraki 4 yılda arabanın kaybettiği değerin toplam miktarını bulunuz. (*d*) (*b*) cevabını kontrol etmek için $t = 4$'te (*a*) cevabını kullanınız.

(*a*)
$$V(t) = \int 300(t - 8)\,dt = 150t^2 - 2400t + c$$

$V(0) = 12,000$ olduğundan, $\quad V(t) = 150t^2 - 2400t + 12,000 \quad$ (*12.10*)

(*b*)
$$V(4) - V(0) = \int_0^4 300(t - 8)\,dt$$

$$= (150t^2 - 2400t)_0^4 = 2400 - 9600 = -7200 \text{ TL}$$

Arabanın değeri ilk dört yılda 7200 TL azalır, yani 7200 TL değer kaybeder.

(*c*)
$$V(8) - V(4) = \int_4^8 300(t - 8)\,dt$$

$$= (150t^2 - 2400t)_4^8 = -2400 \text{ TL}$$

Araba sonraki 4 yılda 2400 TL değer kaybeder.

(*d*) $t = 4$ için (*12.10*) hesaplanır,

$$V(4) = 150(4)^2 - 2400(4) + 12,000 = 4800$$

$$V(0) - V(4) = 12,000 - 4800 = 7200 \text{ TL}$$

Araba (*b*)'de bulunduğu gibi 7200 TL değer kaybetmiştir.

12.38. Sürekli bileşik faiz oranı yüzde 10 olduğunda 4 yıl boyunca her yıl ödenecek 7500 TL'ın cari değerini bulunuz.

(*12.7*)'den,
$$P = \frac{A}{r}\left(1 - e^{-rn}\right)$$

Yerine yazılır,
$$P = \frac{7500}{0.1}\left(1 - e^{-(0.1)(4)}\right)$$

$$P = 75{,}000(0.32968) = 24{,}726 \text{ TL}$$

12.39. Sürekli bileşik faiz oranı yüzde 7.5 olduğunda her 8 yılda bir ödenecek 15,000 TL'ın cari değerini bulunuz.

(*12.7*)'de yerine yazılır,

$$P = \frac{15{,}000}{0.075}\left(1 - e^{-(0.075)(8)}\right)$$

$$= 200{,}000(0.45119) = 90{,}328 \text{ TL}$$

12.40. Belirtilen düzeylerde aşağıdaki talep eğrilerinin her biri için tüketici rantı CS'yi bulunuz.

(*a*) $P = 375 - 3Q^2$; $Q_0 = 10, P_0 = 75$

(*12.8*)'den,
$$CS = \int_0^{Q_0} f(Q)\,dQ - Q_0P_0$$
$$CS = \int_0^{10} (375 - 3Q^2)\,dQ - 10(75)$$
$$CS = (375Q - Q^3)\Big|_0^{10} - 750$$
$$CS = 3750 - 1000 - 750 = 2000$$

(*b*)
$$P = \frac{350}{Q+5};\ Q_0 = 20,\ P_0 = 12$$

$$CS = \int_0^{20} \left[350(Q+5)^{-1}\right] dQ - 12(20)$$
$$CS = [350 \ln(Q+5)]_0^{20} - 240$$
$$CS = [350(3.21888 - 1.60944)] - 240 \approx 323.30$$

12.41. Belirtilen düzeylerde aşağıdaki arz eğrilerinin her biri için üretici rantı PS'yi bulunuz.

(*a*) $P = Q^2 + 4Q + 60$; $Q_0 = 5, P_0 = 85$

(*12.9*)'dan,
$$PS = Q_0P_0 - \int_0^{Q_0} g(Q)\,dQ$$
$$PS = 5(85) - \int_0^{5} (Q^2 + 4Q + 60)\,dQ$$
$$PS = 425 - \left(\tfrac{1}{3}Q^3 + 2Q^2 + 60Q\right)\Big|_0^{5} = 425 - 391.67 = 33.33$$

(*b*) $P = 5 + \frac{1}{4}\sqrt{Q}$; $Q_0 = 144$, $P_0 = 8$

$$\text{PS} = 144(8) - \int_0^{144} \left(5 + \tfrac{1}{4}Q^{1/2}\right) dQ$$

$$\text{PS} = 1152 - \left[5Q + \tfrac{1}{6}Q^{3/2}\right]_0^{144} = 1152 - 720 - 288 = 144$$

Ek Problemler

BELİRSİZ İNTEGRALLER

12.42. Aşağıdaki belirsiz integralleri bulunuz:

(*a*) $\int (24x^5 + 35x^4 - 64x^3)\,dx$ (*b*) $\int (8x^{-5} - x^{-3} + 5x^{-2})\,dx$

(*c*) $\int 21x^{3/4}\,dx$ (*d*) $\int 8x^{-1/3}\,dx$

(*e*) $\int 6\sqrt{x}\,dx$ (*f*) $\int 9\sqrt{x - 13}\,dx$

(*g*) $\int 28e^{-1.75t}\,dt$ (*h*) $\int \frac{5}{x-6}\,dx$

12.43. Verilen başlangıç veya sınır koşulunda aşağıdakilerin her biri için belirsiz integralleri bulunuz.

(*a*) $F(0) = 13$ için $\int (16x^3 - 21x^{2/5})\,dx$ (*b*) $F(1) = 8$ için $\int (18x^5 + 4x^{-3})\,dx$

(*c*) $F(1) = -4$ için $\int (3x^8 - 2x^{-4})\,dx$ (*d*) $F(0) = 2$ için $\int (28e^{4t} - 18e^{-6t})\,dt$

BELİRLİ İNTEGRALLER

12.44. Aşağıdaki belirli integrallerin her birini hesaplayınız:

(*a*) $\int_1^4 9x^2\,dx$ (*b*) $\int_5^{15} -60x^{-2}\,dx$ (*c*) $\int_4^{64} 2.5x^{-1/2}\,dx$

(*d*) $\int_1^7 8x^{-1}\,dx$ (*e*) $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ (*f*) $\int_0^2 3e^{t/5}\,dt$

(*g*) $\int_{-0.5}^{0} -42e^{-6t}\,dt$ (*h*) $\int_{16}^{36} 15\sqrt{x}\,dx$

12.45. Aşağıdaki belirli integrallerin her birini hesaplayınız:

(*a*) $\int_2^5 (8x + 7)\,dx$ (*b*) $\int_2^4 (15x^2 - 6x)\,dx$

(*c*) $\int_8^{125} (4x^{-1/3} - x^{-2/3})\,dx$ (*d*) $\int_8^{12} 20(x - 7)^3\,dx$

(*e*) $\int_{-2}^{2} (6x^2 + 10x + 3)\,dx$ (*f*) $\int_0^{0.25} (12e^{-3t} - 8e^{-2t})\,dt$

EĞRİLER ARASINDAKİ ALAN

12.46. Aşağıdaki fonksiyon kümelerinin her biri için eğrileri çizdikten sonra belirlenen aralık boyunca eğrilerin arasında kalan alanı hesaplayınız.

(*a*) $x = -3$'ten $x = 2$'ye $y_1 = 2x^2 - 8$ ve $y_2 = -2x + 4$

(*b*) $x = -4$'ten $x = 3$'e $y_1 = -4x^2 + 64$ ve $y_2 = 4x + 16$

(*c*) $x = 0$'dan $x = 2$'ye $y_1 = 7x^2 - 14x + 13$ ve $y_2 = -3x^2 + 6x - 2$

(*d*) $x = 0$'dan $x = 4$'e $y_1 = -3x^2 + 24x - 2$ ve $y_2 = -17x + 68$

YERİNE KOYMA METODU İLE İNTEGRAL ALMA

12.47. Aşağıdaki fonksiyonların belirsiz integralini hesaplamak için yerine koyma metodunu kullanınız.

(*a*) $\int 252x^2(7x^3 - 12)^2\,dx$ (*b*) $\int 90x^3(3x^4 + 19)^4\,dx$

(*c*) $\int 672x(8x^2 - 9)^5\,dx$ (*d*) $\int \frac{120x^3}{(5x^4 - 18)^4}\,dx$

(*e*) $\int \frac{-576x^2}{(8x + 13)^5}\,dx$ (*f*) $\int \frac{30x^4}{6x^5 - 21}\,dx$

(*g*) $\int \frac{18x^3}{\sqrt{9x^4 - 5}}\,dx$ (*h*) $\int 99x^2\sqrt{22x^3 + 19}\,dx$

(*i*) $\int 96x^2e^{4x^3}\,dx$ (*j*) $\int 120x^3e^{-6x^4}\,dx$

KISMİ İNTEGRAL YÖNTEMİ

12.48. Aşağıdaki belirsiz integrallerin her birini hesaplamak için kısmi integral yöntemini kullanınız.

(*a*) $\int 20x(x + 9)^4\,dx$ (*b*) $\int 42x(x - 3)^5\,dx$

(*c*) $\int \frac{36x}{(x + 8)^5}\,dx$ (*d*) $\int \frac{-18x}{(x - 7)^3}\,dx$

(*e*) $\int \frac{6x}{\sqrt{x + 13}}\,dx$ (*f*) $\int 45x\sqrt{x + 21}\,dx$

(*g*) $\int 7xe^{x-3}\,dx$ (*h*) $\int 32x^2e^{4x}\,dx$

12.49. Bir firmanın marjinal maliyet fonksiyonu MC = $x^2 - 11x + 385$'tir. Sabit maliyetleri ise 450 TL'dır. Toplam maliyet fonksiyonu TC'i bulunuz.

12.50. MC = $3x^2 - 4x + 525$ olmak üzere bir firmanın üretim seviyesini 4'ten 7'ye çıkarması gibi 3 birim ekstra üretimin toplam maliyetini bulunuz.

12.51. Bir firmanın marjinal gelir fonksiyonu MR = $-0.24x^2 - 1.5x + 660$ olmak üzere, toplam gelir TR fonksiyonunu bulunuz.

12.52. MR = $104 - 6x$ olmak üzere satışların 10 birimden 12 birime artmasından kazanılan toplam ek geliri tahmin ediniz.

12.53. 6000 TL değerindeki bir araba $0 \le t \le 6$ olmak üzere yıllar içinde $V'(t) = 250(t - 6)$ oranında değer kaybeder. (*a*) arabanın ilk 3 yılda ve (*b*) son 3 yılda kaybettiği değerin toplam miktarını bulunuz.

12.54. Talep fonksiyonu $p = -6x^2 + 275$ olmak üzere $x_0 = 5$ ve $p_0 = 125$ için tüketici rantını bulunuz.

12.55. Arz fonksiyonu $p = 0.15x^2 + 8x + 30$ olmak üzere $x_0 = 6$ ve $p_0 = 83.4$ için üretici rantını bulunuz.

Ek Problemlerin Cevapları

12.42. (*a*) $F(x) = 4x^6 + 7x^5 - 16x^4 + c$ (*b*) $F(x) = -2x^{-4} + 1/2x^{-2} - 5x^{-1} + c$

(*c*) $F(x) = 12x^{7/4} + c$ (*d*) $F(x) = 12x^{2/3} + c$

(*e*) $F(x) = 4x^{3/2} + c$ (*f*) $F(x) = 6(x - 13)^{3/2} + c$

(*g*) $F(t) = -16e^{-1.75t} + c$ (*h*) $F(x) = 5\ln|x - 6| + c$

12.43. (*a*) $F(x) = 4x^4 - 15x^{7/5} + 13$ (*b*) $F(x) = 3x^6 - 2x^{-2} + 7$

(*c*) $F(x) = 1/3x^9 + 2/3x^{-3} - 5$ (*d*) $F(t) = 7e^{4t} + 3e^{-6t} - 8$

12.44. (*a*) $F(x) = 3x^3 \Big|_1^4 = 189$ (*b*) $F(x) = \dfrac{60}{x}\Big|_5^{15} = -8$

(*c*) $F(x) = 5x^{1/2}\Big|_4^{64} = 30$ (*d*) $F(x) = 8\ln x\Big|_1^7 = 8\ln 7$

(*e*) $F(x) = \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_8^{27} = 7.5$ (*f*) $F(x) = 15e^{t/5}\Big|_0^2 = 15(e^{2/5} - 1)$

(*g*) $F(x) = 7e^{-6t}\Big|_{-0.5}^0 = 7(1 - e^3)$ (*h*) $F(x) = 10x^{3/2}\Big|_{16}^{36} = 1520$

12.45. (*a*) $F(x) = (4x^2 + 7x)\Big|_2^5 = 105$ (*b*) $F(x) = (5x^3 - 3x^2)\Big|_2^4 = 244$

(*c*) $F(x) = (6x^{2/3} - 3x^{1/3})\Big|_8^{125} = 117$ (*d*) $F(x) = 5(x - 7)^4\Big|_8^{12} = 3120$

(*e*) $F(x) = (2x^3 + 5x^2 + 3x)\Big|_{-2}^2 = 44$ (*f*) $F(x) = 4(e^{-2t} - e^{-3t})\Big|_0^{0.25} = 0.5366564$

12.46. (*a*) $F(x) = \left(-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 12x\right)\Big|_{-3}^2 = 41.67$ (*b*) $F(x) = \left(-\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 48x\right)\Big|_{-4}^3 = 228.67$

(*c*) $F(x) = \left(3\frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + 15x\right)\Big|_0^2 = 16.67$

(*d*) $F(x) = (x^3 - 20.5x^2 + 70x)\Big|_0^2 + (-x^3 + 20.5x^2 - 70x)\Big|_2^4 = 116$

12.47. (*a*) $F(x) = 4(7x^3 - 12)^3 + c$ (*b*) $F(x) = 1.5(3x^6 + 19)^5 + c$

(*c*) $F(x) = 7(8x^2 - 9)^6 + c$ (*d*) $F(x) = -2(5x^4 - 18)^{-3} + c$

(*e*) $F(x) = 6(8x^3 + 13)^{-4} + c$ (*f*) $F(x) = \ln|6x^5 - 21| + c$

(*g*) $F(x) = \sqrt{9x^4 - 5} + c$ (*h*) $F(x) = (22x^3 + 19)^{3/2} + c$

(*i*) $F(x) = 8e^{4x^3} + c$ (*j*) $F(x) = -5e^{-6x^4} + c$

12.48. (*a*) $F(x) = 4x(x + 9)^5 - 2/3(x + 9)^6 + c$ (*b*) $F(x) = 7x(x - 3)^6 - 2/3(x - 3)^7 + c$

(*c*) $F(x) = -9x(x + 8)^{-4} - 3(x + 8)^{-3} + c$ (*d*) $F(x) = 9x(x - 7)^{-2} - 2/3(x - 7)^{-1} + c$

(*e*) $F(x) = 12x(x + 13)^{1/2} - 8(x + 13)^{3/2} + c$ (*f*) $F(x) = 30x(x + 21)^{3/2} - 12(x + 21)^{5/2} + c$

(*g*) $F(x) = 7xe^{x-3} - 7e^{x-3} + c$ (*h*) $F(x) = 8x^2e^{4x} - 4xe^{4x} + e^{4x} + c$

12.49. $\text{TC} = \frac{1}{3}x^3 - 5.5x^2 + 385x + 450$

12.50. $\text{TC} = (x^3 - 2x^2 + 525x)\Big|_4^7 = 1788$

12.51. $\text{TR} = -0.08x^3 - 0.75x^2 + 660x$

12.52. $\text{TR} = (104x - 3x^2)\Big|_{10}^{12} = 76$

12.53. (*a*) $(125t^2 - 1500t)\Big|_0^3 = -3375\$$ (*b*) $(125t^2 - 1500t)\Big|_3^6 = -1125\$$

12.54. $\text{CS} = (-2x^3 + 275x)\Big|_0^5 - 625 = 500$

12.55. $\text{PS} = 500.4 - (0.05x^3 + 4x^2 + 30x)\Big|_0^6 = 165.6$

Bölüm 13

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR HESABI

13.1 ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

Bölüm 9 ve 10'da anlatılan türev çalışmaları $y = f(x)$ gibi tek bağımsız değişkenli fonksiyonlar ile sınırlıydı. Fakat çoğu ekonomik faaliyet bir değişkenden fazlasını içerdiği için şimdi iki veya daha fazla bağımsız değişkenli fonksiyonları göz önüne alacağız. Tanımsal olarak $z = f(x, y)$, f'nin tanım kümesinde reel sayılardan oluşan her bir sıralı ikili (x, y) için, f'nin değer kümesinde z'nin yalnız ve yalnız tek bir değeri var ise *iki bağımsız değişkenli bir fonksiyondur*. Genel kabule göre, *z bağımlı değişkendir* ve x ile *y bağımsız değişkendir*.

ÖRNEK 1. Bir firmanın ürettiği x malı için maliyet fonksiyonu $C(x) = 125 + 7x$ ve y malı için maliyet fonksiyonu $C(y) = 305 + 9y$'dir. Bireysel maliyetler de eklendiğinde, firma için toplam maliyet basitçe şu şekildedir:

$$C(x, y) = 125 + 7x + 305 + 9y$$

$$C(x, y) = 430 + 7x + 9y$$

Çok değişkenli veya çoklu fonksiyonların diğer örnekleri;

$$f(x, y) = x^2 + 5xy + y^2$$

$$Q(K, L) = -2K^2 + 78KL - 3L^2$$

ÖRNEK 2. Çok değişkenli fonksiyonlar $x = 2$ ve $y = 4$ gibi belirli x ve y değerlerinin yerine yazılması ile hesaplanabilir. Örnek 1'deki fonksiyonlar kullanıldığında,

$$C(2, 4) = 430 + 7(2) + 9(4) = 480$$

$$f(2, 4) = (2)^2 + 5(2)(4) + (4)^2 = 60$$

$$Q(2, 4) = -2(2)^2 + 78(2)(4) - 3(4)^2 = 568$$

13.2 KISMİ TÜREV

$z = f(x, y)$ çok değişkenli bir fonksiyon olmak üzere bağımsız değişkenlerden (x veya y) birindeki değişimin z bağımlı değişkeni üzerindeki etkisini ölçmek için kısmi türeve ihtiyaç duyulur. Bağımsız değişkenlerin her birinin ayrı kısmi türevi vardır. *x'e göre z'nin kısmi türevi*, y sabit tutulurken x'e göre z'nin anlık değişim oranını ölçer. $\partial z/\partial x$, $\partial f/\partial x$, $f_x(x, y)$, f_x, z_x, f_1 veya z_1 olarak yazılır ve şu şekilde tanımlanır:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad (13.1a)$$

Benzer şekilde *y'ye göre z'nin kısmi türevi*, x sabit tutulurken y'ye göre z'nin değişim oranını ölçer. $\partial z/\partial y$, $\partial f/\partial y$, $f_y(x, y)$, f_y, z_y, f_2 veya z_2 olarak yazılır ve şu şekilde tanımlanır:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \qquad (13.1a)$$

Bağımsız değişkenlerden birine göre bir fonksiyonun kısmi türevini bulmak için, diğer değişken sabit tutulur ve sıradan türev alma kuralları izlenir. Örnek 3 ile 4 ve Problem 13.1'den 13.8'e kadar bakınız.

ÖRNEK 3. $z = 8x^3y^5$ gibi çok değişkenli bir fonksiyonun kısmi türevi aşağıdaki gibi bulunur.

(*a*) x'e göre türev alınırken, katsayı ile birlikte y paranteze alınarak sabit gibi davranılır:

$$z = \left[8y^5\right] \cdot x^3$$

Sonra x'in türevi alınır, y sabit olarak tutulur,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \left[8y^5\right] \cdot \frac{d}{dx}(x^3)$$
$$= \left[8y^5\right] \cdot 3x^2$$

Türev alma işleminde çarpım halindeki bir sabitin aynen kaldığını hatırlayınız, çarpma işlemi ve terimlerin yeniden düzenlenmesi ile elde edilen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 24x^2y^5$$

(*b*) y'ye göre türev alınırken, katsayı ile birlikte x paranteze alınarak sabit gibi davranılır, sonra y'ye göre türev alınır:

$$z = \left[8x^3\right] \cdot y^5$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = \left[8x^3\right] \cdot \frac{d}{dy}(y^5)$$
$$= \left[8x^3\right] \cdot 5y^4 = 40x^3y^4$$

ÖRNEK 4. $z = 12x^4 - 10x^2y^2 + 15y^6$ için kısmi türevi bulunuz.

(*a*) x'e göre türev alınırken, sabit gibi davranmak için y'nin tüm terimleri paranteze alınır:

$$z = 12x^4 - [10y^3]x^2 + [15y^6]$$

Sonra x'e göre türev alınır, çarpım halindeki sabitlerin aynen kaldığını fakat toplam halindeki bir sabitin türevinin sıfır olduğunu hatırlayanız.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d}{dx}(12x^4) - \left[10y^3\right] \cdot \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}\left[15y^6\right]$$
$$= 48x^3 - \left[10y^3\right] \cdot 2x + 0$$
$$= 48x^3 - 20xy^3$$

(*b*) y'e göre türev alınırken, bütün x terimlerini kapatılır ve y'e göre türev alınır.

$$z = \left[12x^4\right] - \left[10x^2\right]y^3 + 15y^6$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d}{dy}\left[12x^4\right] - \left[10x^2\right] \cdot \frac{d}{dy}(y^3) + \frac{d}{dy}(15y^6)$$
$$= 0 - \left[10x^2\right] \cdot 3y^2 + 90y^5$$
$$= -30x^2y^2 + 90y^5$$

Problem 13.1'e bakınız.

13.3 KISMİ TÜREV ALMA KURALLARI

Kısmi türev alma kuralları Kısım 9.7'de gösterilen sıradan türev alma kuralları gibi basit bir yapıya sahiptir. Birkaç önemli kural aşağıda verilmiştir, Örnek 5'ten 9'a kadar örneklendirilmiş, Problem 13.2'den 13.8'e kadar uygulama yapılmış ve Problem 13.45'te doğrulanmıştır.

13.3.1 Çarpım Kuralı

$z = g(x, y) \cdot h(x, y)$ olmak üzere,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g(x,y) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + h(x,y) \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \quad (13.2a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = g(x,y) \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + h(x,y) \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \quad (13.2b)$$

ÖRNEK 5. Verilen $z = (4x + 9)(8x + 5y)$, çarpım kuralına göre,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (4x+9)(8) + (8x+5y)(4) = 64x + 72 + 20y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (4x+9)(5) + (8x+5y)(0) = 20x + 45$$

13.3.2 Bölüm Kuralı

$h(x, y) \neq 0$, $z = \dfrac{g(x,y)}{h(x,y)}$ olmak üzere,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h(x,y) \cdot \partial g/\partial x - g(x,y) \cdot \partial h/\partial x}{[h(x,y)]^2} \quad (13.3a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h(x,y) \cdot \partial g/\partial y - g(x,y) \cdot \partial h/\partial y}{[h(x,y)]^2} \quad (13.3b)$$

ÖRNEK 6. Verilen $z = (2x + 9y)/(8x + 7y)$, bölüm kuralına göre,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(8x+7y)(2) - (2x+9y)(8)}{(8x+7y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{16x + 14y - 16x - 72y}{(8x+7y)^2} = \frac{-58y}{(8x+7y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(8x+7y)(9) - (2x+9y)(7)}{(8x+7y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{72x + 63y - 14x - 63y}{(8x+7y)^2} = \frac{58x}{(8x+7y)^2}$$

13.3.3 Genelleştirilmiş Üslü Fonksiyon Kuralı

$z = [g(x, y)]^n$ olmak üzere,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = n\,[g(x,y)]^{n-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \quad (13.4a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = n\,[g(x,y)]^{n-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \quad (13.4b)$$

ÖRNEK 7. Verilen $z = (5x^2 + 9y^3)^5$, genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralına göre,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5\left(4x^2 + 9y^3\right)^4 \cdot (8x) = 40x\left(4x^2 + 9y^3\right)^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5\left(4x^2 + 9y^3\right)^4 \cdot (27y^2) = 135y^2\left(4x^2 + 9y^3\right)^4$$

13.3.4 Doğal Üstel Fonksiyon Kuralı

$z = e^{g(x,y)}$ olmak üzere,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{g(x,y)} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \qquad (13.5a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{g(x,y)} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \qquad (13.5b)$$

ÖRNEK 8. Verilen $z = e^{4x^2y^3}$, doğal üstel fonksiyon kuralına göre,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{4x^2y^3} \cdot 8xy^3 = 8xy^3e^{4x^2y^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{4x^2y^3} \cdot 12x^2y^2 = 12x^2y^2e^{4x^2y^3}$$

13.3.5 Doğal Logaritmik Fonksiyon Kuralı

$z = \ln |g(x, y)|$ olmak üzere,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{g(x,y)} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \qquad (13.6a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{g(x,y)} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \qquad (13.6b)$$

ÖRNEK 9. Verilen $z = \ln |3x^3 + 4y^2|$, doğal logaritmik fonksiyon kuralına göre,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3x^3+4y^2} \cdot 9x^2 = \frac{9x^2}{3x^3+4y^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3x^3+4y^2} \cdot 8y = \frac{8y}{3x^3+4y^2}$$

13.4 İKİNCİ MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLER

$z = f(x, y)$ olmak üzere fonksiyonun bağımsız değişkenlerinden biri sabit tutulurken diğerine göre iki kez kısmi türevi alınması *ikinci mertebeden (direkt) kısmi türev* anlamına gelir.

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Aslında, f_{xx} y sabit tutulurken x'e göre $f(x)$'in birinci mertebeden türevinin değişim oranını ölçer. f_{yy} de kesinlikle aynı anlamdadır. Problem 13.9 ve 13.10'a bakınız.

Çapraz (karışık) kısmi türev, f_{xy} ve f_{yx}, ilkel fonksiyonun bağımsız bir değişkene göre kısmi türevinin alınıp ve sonra sırayla diğer bağımsız değişkene göre kısmi türevinin alınmasını ifade eder:

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} \qquad f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

Kısaca, çapraz kısmi türev diğer bağımsız değişkene göre birinci mertebeden kısmi türevin değişim oranını ölçer. Bağımsız değişkene bağlı olarak gösterimlerin farklı formlara dönüştüğüne dikkat ediniz. Problem 13.11 ve 13.12'ye bakınız.

ÖRNEK 10. $z = 4x^5 + 7xy + 8y^4$ için (*a*) birinci, (*b*) ikinci ve (*c*) çapraz kısmi türev aşağıda gösterildiği gibi alınır.

(*a*) $$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 20x^4 + 7y \qquad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 7x + 32y^3$$

(*b*) $$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 80x^3 \qquad z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 96y^2$$

(*c*) $$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(20x^4 + 7y) = 7$$

$$z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(7x + 32y^3) = 7$$

ÖRNEK 11. $z = 2x^3y^4$ için (*a*) birinci, (*b*) ikinci ve (*c*) çapraz kısmi türev aşağıda gösterildiği gibi bulunur ve $x = 1, y = 2$ için hesaplanır.

(*a*) $$z_x = 6x^2y^4 \qquad z_y = 8x^3y^3$$

$$z_x(1,2) = 6(1)^2(2)^4 = 96 \qquad z_y(1,2) = 8(1)^3(2)^3 = 64$$

(*b*) $$z_{xx} = 12xy^4 \qquad z_{yy} = 24x^3y^2$$

$$z_{xx}(1,2) = 12(1)(2)^4 = 192 \qquad z_{yy}(1,2) = 24(1)^3(2)^2 = 96$$

(*c*) $$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(6x^2y^4) = 24x^2y^3 \qquad z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(8x^3y^3) = 24x^2y^3$$

$$z_{xy}(1,2) = 24(1)^2(2)^3 = 192 \qquad z_{yx}(1,2) = 24(1)^2(2)^3 = 192$$

Young teoremine göre, eğer her iki çapraz kısmi türevde sürekli ise, özdeş olacaktır. Problem 13.11 ve 13.12'ye bakınız.

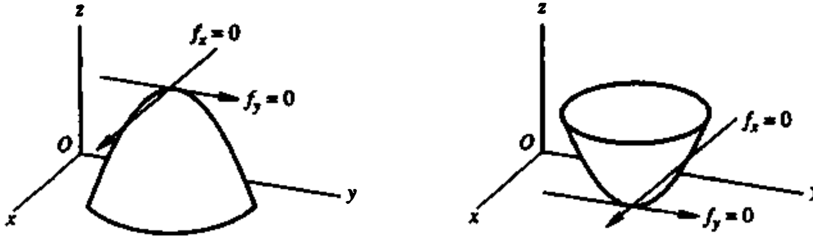
13.5 ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN OPTİMİZASYONU

$z = f(x, y)$ gibi çok değişkenli bir fonksiyonun bağıl maksimum veya minimumda olması için üç koşul gerçekleşmelidir:

1. Birinci mertebeden kısmi türevler aynı anda sıfıra eşit olmalıdır. Bu, kritik nokta olarak isimlendirilen verilen (*a*, *b*) noktasında fonksiyonun asal eksene göre ne artan ne de azalan olmadığını fakat bağıl düz (yatay) olduğunu gösterir.

2. İkinci mertebeden direkt kısmi türevler kritik (*a*, *b*) noktasında hesaplandığında minimum için ikisi de pozitif, maksimum için ikisi de negatif olmalıdır. Bu, fonksiyonun (*a*, *b*) noktasında bağıl düzden minimumda olması durumunda asal eksene göre yukarı doğru ve maksimum olması durumunda asal eksene göre aşağıya doğru hareket ettiğini kesinleştirir.

3. Kritik noktada hesaplanan ikinci mertebeden direkt kısmi türevlerin çarpımı, kritik nokta için hesaplanan çapraz kısmi türevlerin çarpımından büyük olmalıdır. Kısaca, Şekil 13-1'de gösterildiği gibi, (*a*, *b*) kritik noktası hesaplanırken, aşağıdaki değerler bağıl maksimum ve bağıl minimum için uygulanır.



Şekil 13-1

Bağıl Maksimum	Bağıl Minimum
$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$
$f_{xx}, f_{yy} < 0$	$f_{xx}, f_{yy} > 0$
$f_{xx} \cdot f_{yy} > (f_{xy})^2$	$f_{xx} \cdot f_{yy} > (f_{xy})^2$

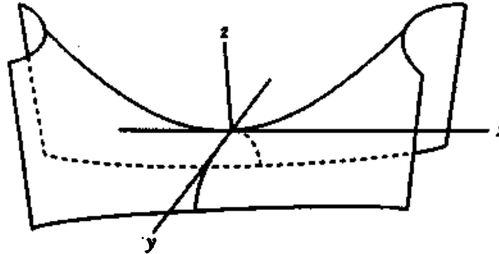
Aşağıdaki incelemelere dikkat etmeniz önemlidir.

1) Young teoremine göre $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xy} \cdot f_{yx} = (f_{xy})^2$ dir. Üçüncü adım olarak $f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$ yazılabilir.

2) $f_{xx} \cdot f_{yy} < (f_{xy})^2$ için, (*a*) f_{xx} ve f_{yy} aynı işaretlere sahipken, fonksiyon *büküm noktasındadır*; (*b*) f_{xx} ve f_{yy} farklı işaretlere sahipken, fonksiyon Şekil 13-2'de görüldüğü gibi bir eksenden bakıldığında minimumda (burada x ekseni), fakat diğer eksenden bakıldığında maksimumda (burada y ekseni) olduğundan *semer noktasındadır*.

3) Eğer $f_{xx} \cdot f_{yy} = (f_{xy})^2$ ise test geçersizdir.

Örnek 12 ve Problem 13.3'ten 13.20'ye kadar bakınız; büküm noktası için Problem 13.15, 13.18 ve 13.19; semer noktası için Problem 13.16, 13.17 ve 13.20'ye bakınız.



Semer noktası

Şekil 13-2

ÖRNEK 12. $z = 3x^3 + 2y^3 + 9x^2 - 72x - 126y + 19$ için (*a*) kritik noktaları bulunuz ve (*b*) fonksiyon bağıl maksimum veya minimumda ise görmek için test yapınız.

(*a*) Birinci mertebeden kısmi türevler alınır, sıfıra eşitlenir ve x ve y için çözümlenir:

$$z_x = 9x^2 + 18x - 72 = 0 \qquad z_y = 6y^2 - 24y - 126 = 0 \qquad (13.7)$$

$$9(x^2 + 2x - 8) = 0 \qquad 6(y^2 - 4y - 21) = 0$$

$$9(x - 2)(x + 4) = 0 \qquad 6(y + 3)(y - 7) = 0$$

$$x = 2 \quad x = -4 \qquad y = -3 \quad y = 7$$

Böylece burada dört farklı kritik nokta vardır: (2, –3), (2, 7), (–4, –3) ve (–4, 7).

(*b*) (*13.7*)'den ikinci mertebeden direkt kısmi türevleri alınır, kritik noktaların her biri için hesaplanır ve işaretleri kontrol edilir:

$$z_{xx} = 18x + 18 \qquad z_{yy} = 12y - 24$$

(1) $z_{xx}(2, -3) = 18(2) + 18 = 54 > 0$ $\qquad z_{yy}(2, -3) = 12(-3) - 24 = -60 < 0$

(2) $z_{xx}(2, 7) = 18(2) + 18 = 54 > 0$ $\qquad z_{yy}(2, 7) = 12(7) - 24 = 60 > 0$

(3) $z_{xx}(-4, -3) = 18(-4) + 18 = -54 < 0$ $\qquad z_{yy}(-4, -3) = 12(-3) - 24 = -60 < 0$

(4) $z_{xx}(-4, 7) = 18(-4) + 18 = -54 < 0$ $\qquad z_{yy}(-4, 7) = 12(7) - 24 = 60 > 0$

(1) ve (4)'te ikinci mertebeden kısmi türevlerin işaretleri farklı olduğu için, fonksiyon (2, –3) ve (–4, 7)'de bağıl maksimum veya minimumda olamaz. f_{xx} ve f_{yy}'in işaretleri farklı olduğundan, $f_{xx} \cdot f_{yy}$, $(f_{xy})^2$ den büyük olamaz ve fonksiyon semer noktasındadır. İkinci direkt kısmi türevlerin işaretleri (2) de pozitif ve (3) de negatif olduğundan, fonksiyon (2, 7)'de bağıl minimum ve (–4, –3)'te bağıl maksimum olabilir, fakat büküm noktası olma olasılığına karşı emin olabilmek için öncelikle üçüncü koşul test edilmelidir.

(*c*) (*13.7*)'den çapraz kısmi türevleri alınır ve $z_{xx}(a, b) \cdot z_{yy}(a, b) > [z_{xy}(a, b)]^2$ sağlandığından emin olmak için kontrol edilir.

$$z_{xy} = 0 \qquad z_{yx} = 0$$

$$z_{xx}(a, b) \cdot z_{yy}(a, b) > [z_{xy}(a, b)]^2$$

(2)'den, $\quad (54) \cdot (60) > (0)^2$

$$3240 > 0$$

(3)'ten, $\quad (-54) \cdot (-60) > (0)^2$

$$3240 > 0$$

Böylece (2, 7)'de bağıl minimum ve (–4, –3)'te bağıl maksimum için üç koşulda sağlanır. Öncesinde (–4, 7) ve (2, –3)'ün semer noktaları olduğunu bulmuştuk. Büküm noktası örnekleri için Problem 13.15, 13.18 ve 13.19'a bakınız.

13.6 LAGRANGE ÇARPANLARI İLE KISITLI OPTİMİZASYON

Türev, kısıtlara bağlı bir fonksiyonu minimize veya maksimize etmek için de kullanılır. $f(x, y)$ fonksiyonu $g(x, y) = k$ (bir sabit) kısıtına bağlı olmak üzere, yeni bir fonksiyon F, (1) kısıt sıfıra eşitlenip, (2) λ (Lagrange çarpanı) ile çarpılıp ve (3) orijinal fonksiyona çarpım eklenerek oluşturulabilir:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[k - g(x, y)] \tag{13.8}$$

Lagrange fonksiyonu olarak isimlendirilen $F(x, y, \lambda)$'de $f(x, y)$ orijinal veya amaç fonksiyonu ve $k - g(x, y)$ ise sıfıra eşitlenen kısıttır. Kısıt daima sıfıra eşitlenene kadar yeniden yazılır, çarpım $\lambda[k - g(x, y)]$ da sıfıra eşittir ve terim eklenmesi amaç fonksiyonunun değerini değiştirmez. Fonksiyonun optimize olduğu x_0, y_0 ve λ_0 kritik değerleri, üç bağımsız değişkene göre F'nin kısmi türevlerinin alınması, sıfıra eşitlenmesi ve aynı anda çözülmesi ile bulunur:

$$F_x(x, y, \lambda) = 0$$

$$F_y(x, y, \lambda) = 0$$

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

Not: Yukarıda $\lambda[k - g(x, y)] = 0 = \lambda[g(x, y) - k]$ olduğu için (*13.8*)'de, x ve y'nin kritik değerleri değiştirilmeksizin amaç fonksiyonuna terim eklenebilir ya da çıkarılabilir. Yalnızca λ'nin işareti etkilenecektir. Lagrange çarpanı λ, kısıtın sabitindeki küçük bir değişimin amaç fonksiyonundaki etkisini tahmin eder. Örnek 13'e bakınız. λ'nin ekonomik yorumu için Dowling, *Shaum's Outline of Introduction to Mathematical Economics* Kısım 5.6'ya ve Problem 5.12'den 5.14'e kadar bakınız. Kısıtlı optimizasyon için ikinci dereceden koşullara ise Dowling, age., Kısım 12.5 ve Problem 12.23'ten 12.32'ye kadar bakınız.

ÖRNEK 13. $2x + y = 96$ kısıtına bağlı olan $z = 6x^2 + 5xy + 2y^2$ fonksiyonunu optimize etmek için Lagrange çarpanı yöntemini kullanınız.

1. Kısıtı sıfıra eşitleyerek başlanır,

$$96 - 2x - y = 0$$

λ ile çarpılır ve Lagrange fonksiyonu formundaki Z amaç fonksiyonuna eklenir,

$$Z = 6x^2 + 5xy + 2y^2 + \lambda(96 - 2x - y) \qquad (13.9)$$

2. Birinci mertebeden kısmi türevlerini alınır, sıfıra eşitlenir ve eş anlı çözülür:

$$Z_x = 12x + 5y - 2\lambda = 0 \qquad (13.10)$$

$$Z_y = 5x + 4y - \lambda = 0 \qquad (13.11)$$

$$Z_\lambda = 96 - 2x - y = 0 \qquad (13.12)$$

(*13.11*) 2 ile çarpılıp (*13.10*)'dan çıkarılarak λ yok edilir,

$$2x - 3y = 0 \qquad x = 1.5y$$

(*13.12*)'de $x = 1.5y$ yerine yazılır, böylece üç denklemin hepsi kullanılmıştır.

$$96 - 2(1.5y) - y = 0 \qquad y_0 = 24$$

x_0'ı bulmak için (*13.12*)'de $y_0 = 24$ tekrar yerine yazılır.

$$96 - 2x - 24 = 0 \qquad x_0 = 36$$

λ'ı bulmak için (*13.10*) veya (*13.11*)'de $x_0 = 36$, $y_0 = 24$ yerine yazılır.

$$5(36) + 4(24) - \lambda = 0 \qquad \lambda_0 = 276$$

Son olarak kritik değerler (*13.9*)'da yerine yazılır,

$$Z = 6(36)^2 + 5(36)(24) + 2(24)^2 + (276)[96 - 2(36) - 24]$$

$$Z = 6(1296) + 5(864) + 2(576) + 276(0) = 13{,}248$$

Yukarıdaki kısıtın sıfıra eşit olduğu kritik değerlerde Lagrange fonksiyonu Z'nin amaç fonksiyonu z'ye kesinlikle eşit olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca $\lambda_0 = 276$ olduğu için kısıtın sabitinde 96'dan 97'ye meydana gelen bir artışın Z'de yaklaşık 276'lık bir artışa yol açacağına da dikkat ediniz. Problem 13.21'den 13.24'e kadar bakınız.

13.7 GELİR BELİRLEME ÇARPANLARI

Bir gelir belirleme modelinin farklı çarpanlarını üretmek için kısmi türev alma kullanılır.

$$Y = C + I \qquad C = C_0 + bY_d \qquad T = T_0 + tY \qquad Y_d = Y - T \qquad I = I_0$$

olmak üzere, Problem 4.19'un (*4.52*) eşitliğinden aşağıdakini buluruz:

$$Y_e = \frac{1}{1 - b + bt}(C_0 + I_0 - bT_0) \qquad (13.13)$$

Herhangi bir bağımsız değişken veya parametreye göre (*13.13*)'un kısmi türevi alındığında, bu o değişken veya parametre için çarpanı verir. Böylece, $1/(1-b+bt)$ kesrinin parantez içindeki her bir terimle sırayla çarpıldığını hatırlayınız, *otonom tüketim çarpanı*

$$\frac{\partial Y_e}{\partial C_0} = \frac{1}{1-b+bt} \text{'dir.}$$

Otonom vergi çarpanı,

$$\frac{\partial Y_e}{\partial T_0} = \frac{-b}{1-b+bt} \text{'dir.}$$

ve bölüm kuralı kullanılarak, vergi oranında t bir değişiklik için çarpan,

$$\frac{\partial Y_e}{\partial t} = \frac{(1-b+bt)(0)-(C_0+I_0-bT_0)(b)}{(1-b+bt)^2} = \frac{-b(C_0+I_0-bT_0)}{(1-b+bt)^2} \text{'dir.}$$

Sonra sadeleştirmek için (*13.13*) kullanılır,

$$\frac{\partial Y_e}{\partial t} = \frac{-bY_e}{(1-b+bt)}$$

$\partial Y/\partial b$ için, MPC'de ki bir değişmede çarpana, Problem 13.25 ve 13.26'dan bakınız.

13.8 İŞLETME VE İKTİSATTA ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN OPTİMİZE EDİLMESİ

Tekelci rekabette, üreticiler fiyat kontrolüne sahiptir, şirketler genellikle aynı ürünün birden fazla çeşidini üretir: çeşitli markadan diş macunu, sabun ve deodorantlar; kadın kıyafetlerinin çeşitli türleri; tasarım elbiselerden hazır giyim benzerlerine ve görsel ve işitsel elektronik aletlerin farklı niteliğe sahip olanları. Talep aşağıda verildiği gibi iken toplam kârı maksimize etmek isteyen tekelci bir firmanın, iki ürünü için talep etmesi gereken fiyatları bulalım.

$$P_1 = 105 - 3Q_1 \qquad (13.14)$$

$$P_2 = 86 - 2Q_2 \qquad (13.15)$$

ve ortak maliyet fonksiyonu,

$$TC = 2Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + Q_2^2\text{'dir.}$$

Öncelikle $TR = P_1Q_1 + P_2Q_2$ den toplam kâr fonksiyonu $\pi = TR - TC$ bulunur. Verilen bilgiler yerine yazılır, toplam maliyet fonksiyonunda her bir terimin çıkarıldığı hatırlanır,

$$\pi = (105 - 3Q_1)Q_1 + (86 - 2Q_2)Q_2 - (2Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + Q_2^2)$$

$$\pi = 105Q_1 - 5Q_1^2 + 86Q_2 - 3Q_2^2 - 4Q_1Q_2$$

Sonrasında fonksiyon optimize edilir,

$$\pi_1 = \frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 105 - 10Q_1 - 4Q_2 = 0$$

$$\pi_2 = \frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 86 - 4Q_1 - 6Q_2 = 0$$

ve kritik değerler için eş anlı çözülür,

$$\bar{Q}_1 = 6.5 \qquad \bar{Q}_2 = 10$$

İkinci dereceden koşullar kontrol edilir.

$$\pi_{11} = -10 \qquad \pi_{22} = -6 \qquad \pi_{12} = -4 = \pi_{21}$$

İkinci mertebeden kısmi türevlerin her ikisi de negatif ve $\pi_{11}\pi_{22} > (\pi_{12})^2$ olduğu için fonksiyon kritik değerlerde maksimize edilmektedir.

Son olarak, kârın maksimum olduğu fiyatları bulmak için $\overline{Q}_1 = 6.5$ ve $\overline{Q}_2 = 10$ sırasıyla (*13.14*) ve (*13.15*)'te yerine yazılır.

$$\overline{P}_1 = 105 - 3(6.5) = 85.5$$

$$\overline{P}_2 = 86 - 2(10) = 66$$

ve $\pi = 105(6.5) - 5(6.5)^2 + 86(10) - 3(10)^2 - 4(6.5)(10) = 771.25$ Problem 13.27'den 13.32'ye kadar bakınız.

13.9 ÇOK DEĞİŞKENLİ İKTİSAT FONKSİYONLARININ KISITLI OPTİMİZASYONU

İşletmeciler ve iktisatçılar belirli kısıtlar altında fonksiyonların optimize edilmesine sıklıkla ihtiyaç duyarlar. Bazen bütçe kısıtlamasına bağlı olarak faydayı maksimize etmek isteyebilirler; bazen de üretim kotası gibi bazı minimum çıktı gereksinimine bağlı olarak maliyetleri en aza indirgemek için istekli olabilirler. Bir firmanın x ve y ürünlerinden oluşan toplam piyasa değeri 140 TL olan ürünlerinden yardım amaçlı bağışta bulunacağına dair söz verdiğini varsayalım. $P_x = 2$ TL ve $P_y = 3$ TL olmak üzere kısıt altında verilen sözün yerine getirilmesinin maliyetini minimize etmek için, serbest toplam maliyet

$$c = 18x^2 - 6xy + 20.5y^2 \text{ dir.}$$

Lagrange fonksiyonu $2x + 3y = 140$ kısıtıyla birleştirilerek oluşturulur,

$$C = 18x^2 - 6xy + 20.5y^2 + \lambda(140 - 2x - 3y)$$

Üç değişkene göre de kısmi türev alınır ve kritik değerler için eş anlı çözülür.

$$C_x = 36x - 6y - 2\lambda = 0 \qquad (13.16)$$

$$C_y = -6x + 41y - 3\lambda = 0 \qquad (13.17)$$

$$C_\lambda = 140 - 2x - 3y = 0 \qquad (13.18)$$

λ yok etmek için (*13.16*) 1.5 ile çarpılıp (*13.17*)'den çıkarılır,

$$-60x + 50y = 0 \qquad y = 1.5x$$

(*13.18*)'de yerine yazılır,

$$140 - 2x - 3(1.2x) = 0 \qquad x_0 = 25$$

Bulduklarımızı ard arda yerine yazdığımızda, $y_0 = 30$, $\lambda_0 = 360$'dır. Problem 13.33'ten 13.38'e kadar bakınız.

13.10 COBB-DOUGLAS ÜRETİM FONKSİYONUNU KISITLI OPTİMİZASYONU

Cobb-Douglas üretim fonksiyonu, ekonomik analizlerde olumlu özelliklerinden dolayı kullanılan bir fonksiyondur:

$$q = AK^{\alpha}L^{\beta} \qquad (A > 0; \qquad 0 < \alpha, \beta < 1)$$

q fiziksel çıktı miktarı, K sermaye miktarı ve L emek miktarıdır. Burada α, L sabit tutulurken K'daki yüzde 1 lik bir değişim için q'da meydana gelen yüzdesel değişmeyi ölçen *sermayenin üretim esnekliği*; β aynı şekilde *emeğin üretim esnekliği* ve A teknoloji düzeyini yansıtan etkinlik parametresidir. $\alpha + \beta = 1$ olan *sabit* bir Cobb-Douglas fonksiyonunda, ölçeğe göre sabit getiri söz konusudur ve sıklıkla $q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ $(0 < \alpha < 1)$ şeklinde yazılır.

$\alpha + \beta \neq 1$ olan genelleştilmiş Cobb-Douglas fonksiyonunda ise, $\alpha + \beta > 1$ ise *ölçeğe göre artan getiri* ve $\alpha + \beta < 1$ ise *ölçeğe göre azalan getiri* söz konusudur.

Ölçeğe göre sabit getiri ile çalışan bir firmanın (sabit) Cobb-Douglas üretim fonksiyonu,

$$q = 3K^{0.2}L^{0.8}$$

ve bütçe değişkenleri

$$P_K = 9 \qquad P_L = 4 \qquad B = 450 \text{ olmak üzere}$$

Maksimize edilecek Lagrange fonksiyonu

$$Q = 3K^{0.2}L^{0.8} + \lambda(450 - 9K - 4L)$$

Optimizasyon için kısmi türevler alınır,

$$Q_K = 0.6K^{-0.8}L^{0.8} - 9\lambda \tag{13.19}$$

$$Q_L = 2.4K^{0.2}L^{-0.2} - 4\lambda \tag{13.20}$$

$$Q_\lambda = 450 - 9K - 4L \tag{13.21}$$

λ'ı yok etmek için yeniden düzenleme yapılıp (*13.19*) (*13.20*)'ye bölünür.

$$\frac{0.6K^{-0.8}L^{0.8}}{2.4K^{0.2}L^{-0.2}} = \frac{9\lambda}{4\lambda}$$

Bölme işleminde paydanın üssünün negatif olarak yazılabildiğini hatırlayınız,

$$0.25K^{-1}L^{1} = 2.25$$

$$\frac{L}{K} = 9 \qquad L = 9K$$

(*13.21*)'de $L = 9K$ yerine yazılır,

$$450 - 9K - 4(9K) = 0 \qquad K_0 = 10$$

Son olarak (*13.21*)'de $K_0 = 10$ yerine yazılır,

$$L_0 = 90$$

Problem 13.39'dan 13.42'ye kadar bakınız. İkame esnekliği sabit bir üretim fonksiyonunun (CES) kısıtlı optimizasyonu için Dowling, *Shaum's Outline of Introduction to Mathematical Economics*'ın Kısım 6.11 ve Problem 6.47, 6.48 ile 6.63'ten 6.73'e kadar bakınız.

13.11 KAPALI VE TERS FONKSİYON KURALLARI (SEÇMELİ)

Kısım 4.9'da tartışıldığı gibi, $y = f(x)$ formundaki fonksiyonlarda y x'e göre açıktır ve *açık fonksiyonlar* olarak isimlendirilir. $f(x, y) = 0$ formundaki fonksiyonlar y'nin x'e göre açık olduğunu ifade etmez ve *kapalı fonksiyonlar* olarak isimlendirilir. x'e göre y'nin ilk çözümü olmaksızın bir kapalı fonksiyonun türevini dy/dx kapalı fonksiyon kuralı yardımıyla bulmak mümkündür. *Kapalı fonksiyon kuralı*, eğer $f(x, y)$ kapalı fonksiyonu var ve kapalı fonksiyon olarak tanımlandığı noktalarda $f_y \neq 0$ ise,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} \tag{13.22}$$

olduğunu ifade eder.

$y = f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere, eğer y'nin her bir değeri için x'in bir ve yalnız bir değeri varsa $x = f^{-1}(y)$ şeklinde *ters fonksiyon* vardır. Ters fonksiyonun olduğunu ve en iktisadi fonksiyonların ters fonksiyona sahip olduğunu göz önünde tutarsak, *ters fonksiyon kuralı* ters fonksiyonun türevinin orijinal fonksiyonun türevinin tersi olduğunu ifade etmektedir. Böylece, eğer $Q = f(P)$ orijinal fonksiyon ise orijinal fonksiyonun türevi

dQ/dP'dir, $[P = f^{-1}(Q)]$ ters fonksiyonun türevi dP/dQ'dur ve

$$\frac{dQ}{dP} \neq 0 \qquad \text{olmak kaydıyla} \qquad \frac{dP}{dQ} = \frac{1}{dQ/dP} \tag{13.23}$$

Örnek 14 ve 15 ile Problem 13.43 ve 13.44'e bakınız.

ÖRNEK 14. Aşağıdaki kapalı fonksiyonların her biri için dy/dx türevlerini bulalım:

(*a*) $$9x^2 - y = 0$$

(*13.22*)'den, $$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

Burada $f_x = 18x$ ve $f_y = -1$'dir. Yukarıda yerine yazılır,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{18x}{(-1)} = 18x$$

Cevabın x' e göre y çözümlenip, sonra direkt türevi alınarak kolayca kontrol edilebilmesi için fonksiyon kasten basit tutulmuştur. $y = 9x^2$ için $dy/dx = 18x$'dir.

(*b*) $$5x^4 - 3y^5 - 49 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{20x^3}{-15y^4} = \frac{4x^3}{3y^4}$$

dy/dx türevinin daima kendisine karşılık gelen kısmi türevlerin *tersinin negatifi* olduğuna dikkat ediniz: $-f_x/f_y$.

ÖRNEK 15. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin tersi için türevlerini bulalım:

(*a*) $$Q = 94 - 3P$$

(*13.23*)'ten, $$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{dQ/dP}$$

Burada $dQ/dP = -3$. Bu yüzden

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

(*b*) $$Q = 14 + 4P^3$$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{dQ/dP} = \frac{1}{12P^2} \qquad (P \neq 0)$$

Çözümlü Sorular

BİRİNCİ MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLER

13.1. Aşağıdaki fonksiyonların her biri için birinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz.

(*a*) $z = 7x^2 - 13xy + 5y^2$
$z_x = 14x - 13y$
$z_y = -13x + 10y$

(*b*) $z = 5x^4 + 3x^2y^5 - 9y^3$
$z_x = 20x^3 + 6xy^5$
$z_y = 15x^2y^4 - 27y^2$

(*c*) $z = 8w^3 + 6wx + 4x^2 - 9xy - 5y^2$

$z_w = 24w^2 + 6x$

$z_x = 6w + 8x - 9y$

$z_y = -9x - 10y$

(*d*) $z = 3w^3 + 7wxy - x^2 + y^3$

$z_w = 12w^3 + 7xy$

$z_x = 7w - 8x$

$z_y = 7wx + 3y^2$

13.2. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin birinci mertebeden kısmi türevini bulmak için eşitlik (*13.2*) de ki çarpım kuralını kullanınız:

(*a*) $$z = (8x + 15y)(12x - 7y)$$

$z_x = (8x + 15y)(12) + (12x - 7y)(8)$

$z_x = 96x + 180y + 96x - 56y$

$z_x = 192x + 124y$

$z_y = (8x + 15y)(-7) + (12x - 7y)(15)$

$z_y = -56x - 105y + 180x - 105y$

$z_y = 124x - 210y$

(*b*) $$z = (4x^2 - 5y)(3x + 2y^3)$$

$z_x = (4x^2 - 5y)(3) + (3x + 2y^3)(8x)$

$z_x = 12x^2 - 15y + 24x^2 + 16xy^3$

$z_x = 36x^2 - 15y + 16xy^3$

$z_y = (4x^2 - 5y)(6y^2) + (3x + 2y^3)(-5)$

$z_y = 24x^2y^2 - 30y^2 - 15x - 10y^3$

$z_y = 24x^2y^2 - 15x - 40y^3$

(*c*) $$z = (5w - 3x + 8y)(7w^2 + 9x^4 - 2y^5)$$

$$z_w = (5w - 3x + 8y)(14w) + (7w^2 + 9x^4 - 2y^5)(5)$$

$$z_w = 105w^2 - 24wx + 112wy + 45x^4 - 10y^5$$

$$z_x = (5w - 3x + 8y)(36x^3) + (7w^2 + 9x^4 - 2y^5)(-3)$$

$$z_x = 180wx^3 - 135x^4 + 288x^3y - 21w^2 + 6y^5$$

$$z_y = (5w - 3x + 8y)(-10y^4) + (7w^2 + 9x^4 - 2y^5)(8)$$

$$z_y = -50wy^4 + 30xy^4 - 96y^5 + 56w^2 + 72x^4$$

13.3. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin birinci mertebeden kısmi türevini bulmak için eşitlik (*13.3*) de ki bölüm kuralını kullanınız:

(*a*) $$z = \frac{14x}{9x - 4y}$$

$$z_x = \frac{(9x - 4y)(14) - (14x)(9)}{(9x - 4y)^2} = \frac{-56y}{(9x - 4y)^2}$$

$$z_y = \frac{(9x - 4y)(0) - (14x)(-4)}{(9x - 4y)^2} = \frac{56x}{(9x - 4y)^2}$$

(*b*) $$z = \frac{4x^2 + 3y^3}{5x - 2y}$$

$$z_x = \frac{(5x - 2y)(8x) - (4x^2 + 3y^3)(5)}{(5x - 2y)^2} = \frac{20x^2 - 16xy - 15y^3}{(5x - 2y)^2}$$

$$z_y = \frac{(5x - 2y)(9y^2) - (4x^2 + 3y^3)(-2)}{(5x - 2y)^2} = \frac{45xy^2 - 12y^3 + 8x^2}{(5x - 2y)^2}$$

(*c*) $$z = \frac{4w + 9x - 2y}{7w - 2x + 3y}$$

$$z_w = \frac{(7w - 2x + 3y)(4) - (4w + 9x - 2y)(7)}{(7w - 2x + 3y)^2} = \frac{-71x + 26y}{(7w - 2x + 3y)^2}$$

$$z_x = \frac{(7w - 2x + 3y)(9) - (4w + 9x - 2y)(-2)}{(7w - 2x + 3y)^2} = \frac{71w + 23y}{(7w - 2x + 3y)^2}$$

$$z_y = \frac{(7w - 2x + 3y)(-2) - (4w + 9x - 2y)(3)}{(7w - 2x + 3y)^2} = \frac{-26w - 23x}{(7w - 2x + 3y)^2}$$

13.4. Eşitlik (*13.4*) de ki genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralını kullanarak aşağıdaki fonksiyonların her birinin birinci mertebeden kısmi türevini bulunuz:

(*a*) $$z = (6x - 7y)^3$$

$$z_x = 3(6x - 7y)^2(6) = 18(6x - 7y)^2$$

$$z_y = 3(6x - 7y)^2(-7) = -21(6x - 7y)^2$$

(*b*) $$z = (24x^4 + 9y^2)^5$$

$$z_x = 5(24x^4 + 9y^2)^4(8x^3) = 40x^3(24x^4 + 9y^2)^4$$

$$z_y = 5(24x^4 + 9y^2)^4(18y) = 90y(24x^4 + 9y^2)^4$$

(*c*) $$z = (4w^3 - 7x^5 + 8y^2)^4$$

$$z_w = 4(4w^3 - 7x^5 + 8y^2)^3(12w^2) = 48w^2(4w^3 - 7x^5 + 8y^2)^3$$

$$z_x = 4(4w^3 - 7x^5 + 8y^2)^3(-35x^4) = -140x^4(4w^3 - 7x^5 + 8y^2)^3$$

$$z_y = 4(4w^3 - 7x^5 + 8y^2)^3(16y) = 64y(4w^3 - 7x^5 + 8y^2)^3$$

13.5. Eşitlik (*13.5*)'i kullanarak aşağıdaki doğal üstel fonksiyonların birinci mertebeden kısmi türevini bulunuz:

(*a*) $$z = 9e^{4xy}$$

$$z_x = 9e^{4xy} \cdot 4y = 36ye^{4xy} \qquad z_y = 9e^{4xy} \cdot 4x = 36ye^{4xy}$$

(*b*) $$z = 9e^{(2x+7y)}$$

$$z_x = 9e^{(2x+7y)} \cdot 2 = 2e^{(2x+7y)} \qquad z_y = e^{(2x+7y)} \cdot 7 = 7e^{(2x+7y)}$$

(*c*) $$z = 25e^{(5w-8x+3y)}$$

$$z_w = 25e^{(5w-8x+3y)} \cdot 5 = 125e^{(5w-8x+3y)}$$

$$z_x = 25e^{(5w-8x+3y)} \cdot (-8) = -200e^{(5w-8x+3y)}$$

$$z_y = 25e^{(5w-8x+3y)} \cdot 3 = 75e^{(5w-8x+3y)}$$

13.6. Aşağıdaki doğal logaritmik fonksiyonların birinci mertebeden kısmi türevini bulmak için Eşitlik (*13.6*)'yı kullanınız:

(*a*) $$z = \ln|4x + 9y|$$

$$z_x = \frac{1}{4x + 9y} \cdot 4 = \frac{4}{4x + 9y}$$

$$z_y = \frac{1}{4x + 9y} \cdot 9 = \frac{9}{4x + 9y}$$

(*b*)

$$z = \ln|x^3 + y^2|$$

$$z_x = \frac{1}{x^3 + y^2} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3 + y^2}$$

$$z_y = \frac{1}{x^3 + y^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^3 + y^2}$$

(*c*)

$$z = \ln|w^4x^5y^3|$$

$$z_w = \frac{1}{w^4x^5y^3} \cdot 4w^3x^5y^3 = \frac{4}{w} \qquad z_x = \frac{1}{w^4x^5y^3} \cdot 5w^4x^4y^3 = \frac{5}{x}$$

$$z_y = \frac{1}{w^4x^5y^3} \cdot 3w^4x^5y^2 = \frac{3}{y}$$

13.7. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin birinci mertebeden kısmi türevini bulmak için gerekli olan kural kombinasyonlarını kullanınız:

(*a*)

$$z = \frac{(8x + 15y)^4}{3x + 7y}$$

Bölüm kuralı ve genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kullanılır,

$$z_x = \frac{(3x + 7y)\left[4(8x + 15y)^3(8)\right] - (8x + 15y)^4(3)}{(3x + 7y)^2} = \frac{(96x + 224y)(8x + 15y)^3 - 3(8x + 15y)^4}{(3x + 7y)^2}$$

$$z_y = \frac{(3x + 7y)\left[4(8x + 15y)^3(15)\right] - (8x + 15y)^4(7)}{(3x + 7y)^2} = \frac{(180x + 420y)(8x + 15y)^3 - 7(8x + 15y)^4}{(3x + 7y)^2}$$

(*b*)

$$z = \frac{(9x + 4y)(3x - 8y)}{5x - 2y}$$

Bölüm kuralı ve çarpım kuralı kullanılır,

$$z_x = \frac{(5x - 2y)\left[(9x + 4y)(3) + (3x - 8y)(9)\right] - (9x + 4y)(3x - 8y)(5)}{(5x - 2y)^2}$$

$$z_x = \frac{(5x - 2y)(27x + 12y + 27x - 72y) - (9x + 4y)(15x - 40y)}{(5x - 2y)^2}$$

$$z_x = \frac{135x^2 - 108xy + 280y^2}{(5x - 2y)^2}$$

$$z_y = \frac{(5x - 2y)\left[(9x + 4y)(-8) + (3x - 8y)(4)\right] - (9x + 4y)(3x - 8y)(-2)}{(5x - 2y)^2}$$

$$z_y = \frac{(5x - 2y)(-72x - 32y + 12x - 32y) - (9x + 4y)(-6x + 16y)}{(5x - 2y)^2}$$

$$z_y = \frac{-246x^2 - 320xy + 64y^2}{(5x - 2y)^2}$$

(*c*)

$$z = (3x - 5y)^3(6x + 7y)$$

Çarpım kuralı ve genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kullanılır,

$$z_x = (3x - 5y)^3(6) + (6x + 7y)\left[3(3x - 5y)^2(3)\right] = 6(3x - 5y)^3 + (54x + 63y)(3x - 5y)^2$$

$$z_y = (3x - 5y)^3(7) + (6x + 7y)\left[3(3x - 5y)^2(-5)\right] = 7(3x - 5y)^3 - (90x + 105y)(3x - 5y)^2$$

(*d*) $$z = \left(\frac{2x + 9y}{5x + 4y}\right)^2$$

Genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı ve bölüm kuralı kullanılır,

$$z_x = 2\left(\frac{2x + 9y}{5x + 4y}\right)\left[\frac{(5x + 4y)(2) - (2x + 9y)(5)}{(5x + 4y)^2}\right] = \frac{4x + 18y}{5x + 4y}\left[\frac{-37y}{(5x + 4y)^2}\right]$$

$$z_x = \frac{-(148xy + 666y^2)}{(5x + 4y)^3}$$

$$z_y = 2\left(\frac{2x + 9y}{5x + 4y}\right)\left[\frac{(5x + 4y)(9) - (2x + 9y)(4)}{(5x + 4y)^2}\right] = \frac{4x + 18y}{5x + 4y}\left[\frac{37x}{(5x + 4y)^2}\right]$$

$$z_y = \frac{666xy + 148x^2}{(5x + 4y)^3}$$

13.8. Aşağıdaki doğal üstel ve logaritmik fonksiyonlar için Problem 13.7'yi tekrar çözünüz.

(*a*) $$z = 7x^3e^{5xy}$$

Çarpım kuralı ve doğal üstel fonksiyon kuralı kullanılır,

$$z_x = 7x^3 \cdot 5ye^{5xy} + e^{5xy} \cdot 21x^2 \qquad z_y = 7x^3 \cdot 5xe^{5xy} + e^{5xy} \cdot 0$$

$$z_x = 7x^2 5e^{5xy}(5xy + 3) \qquad z_y = 35x^4e^{5xy}$$

(*b*) $$z = \ln|3x + 8y| \cdot e^{2xy}$$

Çarpım, logaritmik ve üstel fonksiyon kuralları ile,

$$z_x = \ln|3x + 8y| \cdot 2ye^{2xy} + e^{2xy}\left[\frac{1}{3x + 8y} \cdot 3\right] = e^{2xy}\left[2y(\ln|3x + 8y|) + \frac{3}{3x + 8y}\right]$$

$$z_y = \ln|3x + 8y| \cdot 2xe^{2xy} + e^{2xy}\left(\frac{1}{3x + 8y} \cdot 8\right) = e^{2xy}\left[2x(\ln|3x + 8y|) + \frac{8}{3x + 8y}\right]$$

(*c*) $$z = \frac{6xy}{e^{5x+2}}$$

Bölüm ve doğal üstel fonksiyon kuralı ile,

$$z_x = \frac{e^{5x+2}(6y) - 6xy(5e^{5x+2})}{(e^{5x+2})^2} \qquad z_y = \frac{e^{5x+2}(6x) - 6xy(0)}{(e^{5x+2})^2}$$

$$z_x = \frac{6ye^{5x+2}(1 - 5x)}{(e^{5x+2})^2} \qquad z_y = \frac{6xe^{5x+2}}{(e^{5x+2})^2}$$

$$z_x = \frac{6y(1 - 5x)}{e^{5x+2}} \qquad z_y = \frac{6x}{e^{5x+2}}$$

(*d*) $$z = 6xye^{-(5x+2)}$$

Bu (*c*) deki fonksiyonun aynısıdır. Çarpım ve doğal üstel fonksiyon kuralları ile,

$$z_x = 6xy\left(-5e^{-(5x+2)}\right) + e^{-(5x+2)}(6y) \qquad z_y = 6xy(0) + e^{-(5x+2)}(6x)$$

$$z_x = 6ye^{-(5x+2)}(-5x + 1) \qquad z_y = 6xe^{-(5x+2)}$$

$$z_x = \frac{6y(1 - 5x)}{e^{5x+2}} \qquad z_y = \frac{6x}{e^{5x+2}}$$

İKİNCİ MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLER

13.9. Aşağıdaki fonksiyonlarının her biri için z_{xx} ve z_{yy} ikinci mertebeden direkt kısmi türevleri bulunuz:

(*a*)
$$z = 6x^4 - 17xy + 4y^5$$
$$z_x = 24x^3 - 17y \qquad z_y = -17x + 20y^4$$
$$z_{xx} = 72x^2 \qquad z_{yy} = 80y^3$$

(*b*)
$$z = 7x^6 - 2x^3y^2 + 9xy^4 - 13y^5$$
$$z_x = 42x^5 - 6x^2y^2 + 9y^4 \qquad z_y = -4x^3y + 36xy^3 - 65y^4$$
$$z_{xx} = 210x^4 - 12xy^2 \qquad z_{yy} = -4x^3 + 108xy^2 - 260y^3$$

(*c*)
$$z = 5w^3x^6y^4$$
$$z_w = 15w^2x^6y^4 \qquad z_x = 30w^3x^5y^4 \qquad z_y = 20w^3x^6y^3$$
$$z_{ww} = 30wx^6y^4 \qquad z_{xx} = 150w^3x^4y^4 \qquad z_{yy} = 60w^3x^6y^2$$

(*d*)
$$z = (4x - 7y)^3$$
$$z_x = 3(4x - 7y)^2(4) \qquad z_y = 3(4x - 7y)^2(-7)$$
$$= 12(4x - 7y)^2 \qquad = -21(4x - 7y)^2$$
$$z_{xx} = 24(4x - 7y)(4) \qquad z_{yy} = -42(4x - 7y)(-7)$$
$$= 96(4x - 7y) \qquad = 294(4x - 7y)$$

13.10. Aşağıdaki Cobb-Douglas fonksiyonlarının her biri için z_{xx} ve z_{yy} ikinci mertebeden direkt kısmi türevleri bulunuz:

(*a*)
$$z = x^{0.1}y^{0.9}$$
$$z_x = 0.1x^{-0.9}y^{0.9} \qquad z_y = 0.9x^{0.1}y^{-0.1}$$
$$z_{xx} = -0.09x^{-1.9}y^{0.9} \qquad z_{yy} = -0.09x^{0.1}y^{-1.1}$$

(*b*)
$$z = 2x^{0.6}y^{0.3}$$
$$z_x = 1.2x^{-0.4}y^{0.3} \qquad z_y = 0.6x^{0.6}y^{-0.7}$$
$$z_{xx} = -0.48x^{-1.4}y^{0.3} \qquad z_{yy} = -0.42x^{0.6}y^{-1.7}$$

(*c*)
$$z = 3x^{0.4}y^{0.5}$$
$$z_x = 1.2x^{-0.6}y^{0.5} \qquad z_y = 1.5x^{0.4}y^{-0.5}$$
$$z_{xx} = -0.72x^{-1.6}y^{0.5} \qquad z_{yy} = -0.75x^{0.4}y^{-1.5}$$

13.11. Aşağıdaki fonksiyonlarının her biri için z_{xy} ve z_{yx} çapraz kısmi türevlerini bulunuz:

(*a*)
$$z = 7x^4 - 15xy + 2y^5$$
$$z_x = 28x^3 - 15y \qquad z_y = -15x + 10y^4$$
$$z_{xy} = -15 \qquad z_{yx} = -15$$

(*b*)
$$z = 8x^3 - 11x^6y^4 - 6y^2$$
$$z_x = 24x^2 - 66x^5y^4 \qquad z_y = -44x^6y^3 - 12y$$
$$z_{xy} = -264x^5y^3 \qquad z_{yx} = -264x^5y^3$$

(*c*)

$$z = 10(9x - 4y)^5$$

$$z_x = 50(9x - 4y)^4(9) \qquad z_y = 50(9x - 4y)^4(-4)$$

$$z_x = 450(9x - 4y)^4 \qquad z_y = -200(9x - 4y)^4$$

$$z_{xy} = 1800(9x - 4y)^3(-4) \qquad z_{yx} = -800(9x - 4y)^3(9)$$

$$z_{xy} = -7200(9x - 4y)^3 \qquad z_{yx} = -7200(9x - 4y)^3$$

(*d*)

$$z = w^3x^{-5}y^4$$

$$z_w = 3w^2x^{-5}y^4 \qquad z_x = -5w^3x^{-6}y^4 \qquad z_y = 4w^3x^{-5}y^3$$

$$z_{wx} = -15w^2x^{-6}y^4 \qquad z_{xw} = -15w^2x^{-6}y^4 \qquad z_{yw} = 12w^2x^{-5}y^3$$

$$z_{wy} = 12w^2x^{-5}y^3 \qquad z_{xy} = -20w^3x^{-6}y^3 \qquad z_{yx} = -20w^3x^{-6}y^3$$

(*a*)'dan (*c*)'ye kadar $z_{xy} = z_{yx}$ ve (*d*) $z_{wx} = z_{xw}$, $z_{wy} = z_{yw}$ ve $z_{xy} = z_{yx}$ Young teoremi ile nasıl yapıldığına dikkat ediniz.

13.12. Aşağıdaki Cobb-Douglas fonksiyonlarının her biri için çapraz kısmi türevleri bulunuz:

(*a*)

$$z = 1.25x^{0.4}y^{0.6}$$

$$z_x = 0.5x^{-0.6}y^{0.6} \qquad z_y = 0.75x^{0.4}y^{-0.4}$$

$$z_{xy} = 0.3x^{-0.6}y^{-0.4} \qquad z_{yx} = 0.3x^{-0.6}y^{-0.4}$$

(*b*)

$$z = 1.4x^{0.2}y^{0.7}$$

$$z_x = 0.28x^{-0.8}y^{0.7} \qquad z_y = 0.98x^{0.2}y^{-0.3}$$

$$z_{xy} = 0.196x^{-0.8}y^{-0.3} \qquad z_{yx} = 0.196x^{-0.8}y^{-0.3}$$

(*c*)

$$Q = 2.5K^{0.3}L^{0.9}$$

$$Q_K = 0.75K^{-0.7}L^{0.9} \qquad Q_L = 2.25K^{0.3}L^{-0.1}$$

$$Q_{KL} = 0.675K^{-0.7}L^{-0.1} \qquad Q_{LK} = 0.675K^{-0.7}L^{-0.1}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN OPTİMİZASYONU

13.13. Aşağıdaki ikinci dereceden fonksiyon için, (1) fonksiyonun optimumda olabileceği kritik noktaları bulunuz ve (2) bu noktalarda fonksiyonun bağıl maksimum, bağıl minimum, büküm noktası veya semer noktasında olup olmadığını belirleyiniz.

$$z = 5x^2 - 8x - 2xy - 6y + 4y^2 + 27 \qquad (13.24)$$

(1) Birinci mertebeden kısmi türevler alınır, sıfıra eşitlenir ve Kısım 13.5'teki yöntemler kullanılarak eş anlı çözülür.

$$z_x = 10x - 8 - 2y = 0 \qquad (13.25)$$

$$z_y = -2x - 6 + 8y = 0 \qquad (13.26)$$

$$x = 1 \qquad y = 1 \qquad (1, 1) \text{ kritik nokta}$$

(2) (*13.25*) ve (*13.26*)'dan ikinci mertebeden direkt kısmi türevler alınır, kritik noktalar için hesaplanır ve işaretleri kontrol edilir.

$$z_{xx} = 10 \qquad z_{yy} = 8$$

$$z_{xx}(1, 1) = 10 > 0 \qquad z_{yy}(1, 1) = 8 > 0$$

İkinci mertebeden direkt kısmi türevlerin ikisi de pozitif olduğu için fonksiyon muhtemelen bağıl minimumdadır. Şimdi (*13.25*) ve (*13.26*)'dan çapraz kısmi türev alınır.

$$z_{xy} = -2 = z_{yx}$$

Kritik noktalar için hesaplanır,

$$z_{xy}(1, 1) = -2 = z_{yx}(1, 1)$$

ve $z_{xx} \cdot z_{yy} > (z_{xy})^2$ den emin olmak için üçüncü koşul test edilir. Burada

$$10 \cdot 8 > (-2)^2$$

$z_{xx}, z_{yy}, > 0$ ve $z_{xx} \cdot z_{yy} > (z_{xy})^2$ ile, fonksiyon aslında (1, 1)'de bağıl minimumdadır. (*13.24*)'te $z = 20$'dir.

13.14. $f(x, y) = -7x^2 + 88x - 6xy + 42y - 2y^2 + 4$ için Problem 13.13'ü tekrar çözünüz.

(1) Birinci kısmi türevini alınır, sıfıra eşitlenir ve çözülür.

$$f_x = -14x + 88 - 6y = 0 \qquad (13.27)$$

$$f_y = -6x + 42 - 4y = 0 \qquad (13.28)$$

$$x = 5 \qquad y = 3 \qquad (5, 3) \text{ kritik nokta}$$

(2) İkinci direkt kısmi türev alınır, kritik noktalarda hesaplanır ve işaretleri kontrol edilir.

$$f_{xx} = -14 \qquad f_{yy} = -4$$

$$f_{xx}(5, 3) = -14 < 0 \qquad f_{yy}(5, 3) = -4 < 0$$

(*13.27*) ve (*13.28*)'den çapraz kısmi türevlerini alınır ve kritik noktalarda hesaplanır.

$$f_{xy} = -6 = f_{yx}$$

$$f_{xy}(5, 3) = -6 = f_{yx}(5, 3)$$

Sonra üçüncü koşul $f_{xx}, f_{yy} > (f_{xy})^2$ kontrol edilir. Burada

$$(-14) \cdot (-4) > (-6)^2$$

$f_{xx}, f_{yy} < 0$ ve $f_{xx} \cdot f_{yy} > (f_{xy})^2$ ile fonksiyonun (5,3)'te bağıl maksimumda olduğuna eminiz.

13.15. $z = 4x^2 + 128x - 12xy + 96y + 3y^2 + 17$ için Problem 13.13'ü tekrar çözünüz.

(1)

$$z_x = 8x + 128 - 12y = 0$$

$$z_y = -12x + 96 + 6y = 0$$

$$x = 20 \qquad y = 24 \qquad (20, 24) \text{ kritik nokta}$$

(2) Kritik noktalarda ikinci direkt kısmi türev test edilir.

$$z_{xx} = 8 \qquad z_{yy} = 6$$

$$z_{xx}(20, 24) = 8 > 0 \qquad z_{yy}(20, 24) = 6 > 0$$

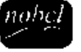
z_{xx} ve $z_{yy} > 0$ kritik noktalarda olduğu için fonksiyon bağıl minimumda olabilir. Çapraz kısmi türevleri kontrol edilir,

$$z_{yx} = -12 = z_{yx}$$

$$z_{yx}(20, 24) = -12 = z_{yx}(20, 24)$$

ve üçüncü koşul test edilir. Burada

$$8 \cdot 6 \not> (-12)^2$$



z_{xx} ve z_{yy} aynı işaretlere sahiptir ve $z_{xx} \cdot z_{yy} < (z_{xy})^2$ olduğundan fonksiyon (20, 24)'te büküm noktasındadır.

13.16. $f(x, y) = 6x^2 - 108x + 4xy + 12y - 2y^2 - 19$ için Problem 13.13'ü tekrar çözünüz.

(1)
$$f_x = 12x - 108 + 4y = 0$$
$$f_y = 4x + 12 - 4y = 0$$
$$x = 6 \qquad y = 9 \qquad (6, 9) \text{ kritik nokta}$$

(2)
$$f_{xx} = 12 \qquad f_{yy} = -4$$
$$f_{xx}(6, 9) = 12 > 0 \qquad f_{yy}(6, 9) = -4 < 0$$

Çapraz kısmi türevleri alınır,

$$f_{xy} = 4 = f_{yx}$$
$$f_{xy}(6, 9) = 4 = f_{yx}(6, 9)$$

ve üçüncü koşul test edilir,

$$(12)\cdot(-4) \not> (4)^2$$

f_{xx} ve f_{yy} nin işaretleri farklı ve $f_{xx} \cdot f_{yy} < (f_{xy})^2$ olduğu için fonksiyon semer noktasındadır. f_{xx} ve f_{yy} farklı işaretlere sahip olduğunda $f_{xx} \cdot f_{yy}$ $(f_{xy})^2$ den büyük olamaz ve fonksiyon semer noktasında olacaktır.

13.17. Aşağıdaki üçüncü dereceden fonksiyon için, (1) fonksiyonun kritik noktalarını bulunuz ve (2) bu noktalarda fonksiyonun bağıl maksimum, bağıl minimum, büküm noktası veya semer noktasında olup olmadığını belirleyiniz.

$$z(x, y) = 2y^3 - 15x^2 + 60x - 284y + 95$$

(1) Birinci mertebeden kısmi türevleri alınır ve sıfıra eşitlenir.

$$z_x = -30x + 60 = 0 \qquad (13.29)$$
$$z_y = 9y^2 - 384 = 0 \qquad (13.30)$$

Kritik noktalar için çözümlenir.

$$-30x + 60 = 0 \qquad 6y^2 - 384 = 0$$
$$x = 2 \qquad y^2 = 64$$
$$y = \pm 8$$
$$(2, 8) \qquad (2, -8) \text{ kritik noktalar}$$

(2) (*13.29*) ve (*13.30*)'dan ikinci direkt kısmi türevleri alınır,

$$z_{xx} = -30 \qquad z_{yy} = 12y$$

Kritik noktalar için hesaplanır ve işaretlere dikkat edilir.

$$z_{xx}(2, 8) = -30 < 0 \qquad z_{yy}(2, 8) = 12(8) = 96 > 0$$
$$z_{xx}(2, -8) = -30 < 0 \qquad z_{yy}(2, -8) = 12(-8) = -96 < 0$$

Sonra (*13.29*) veya (*13.30*)'dan çapraz kısmi türevleri alınır.

$$z_{xy} = 0 = z_{yx}$$

Kritik noktalarda hesaplanır ve üçüncü koşul test edilir.

$$z_{xx}(a, b)\cdot z_{yy}(a, b) > [z_{xy}(a, b)]^2$$

(2, 8)'de $-30\cdot 96 < 0$

(2, –8)'de $-30\cdot -96 > 0$

(2, 8) noktasında f_{xx} ve f_{yy}'nin işaretleri farklı ve $f_{xx}\cdot f_{yy} < (f_{xy})^2$ olduğu için $f(2, 8)$ bir semer noktasıdır. (2, –8) noktasında $f_{xx}, f_{yy} < 0$ ve $f_{xx}\cdot f_{yy} > (f_{xy})^2$ olduğu için $f(2, -8)$ bir bağıl maksimumdur.

13.18. $f(x, y) = 4x^3 - 60xy + 5y^2 + 397$ için Problem 13.17'yi tekrar çözünüz.

(1) Birinci mertebeden kısmi türevi sıfıra eşitlenir,

$$f_x = 12x^2 - 60y = 0 \qquad (13.31)$$

$$f_y = 10y - 60x = 0 \qquad (13.32)$$

ve kritik değerler için çözülür:

$$60y = 12x^2 \qquad 10y = 60x$$

$$y = 1/3x^2 \qquad y = 6x \qquad (13.33)$$

y'ler birbirine eşitlenir, $1/5x^2 = 6x$

$$x^2 - 30x = 0$$

$$x(x - 30) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 30$$

(*13.33*)'ten $y = 6x$'de $x = 0$ ve $x = 30$ değerleri yerine yazılır,

$$y = 6(0) = 0$$

$$y = 6(30) = 180$$

Böylece, (0, 0) (30, 180) kritik değerler

(2) (*13.31*) ve (*13.32*)'den ikinci mertebeden direkt kısmi türevler alınır,

$$f_{xx} = 24x \qquad f_{yy} = 10$$

kritik noktalar için hesaplanır ve işaretlere dikkat edilir,

$$f_{xx}(0, 0) = 24(0) = 0 \qquad f_{yy}(0, 0) = 10 > 0$$

$$f_{xx}(30\ 180) = 24(30) = 720 > 0 \qquad f_{yy}(30\ 180) = 10 > 0$$

Sonra (*13.31*) veya (*13.32*)'den çapraz kısmi türev alınır,

$$f_{xy} = -60 = f_{yx}$$

Kritik noktalarda hesaplanır ve üçüncü koşul için test edilir:

$$f_{xx}(a, b)\cdot f_{yy}(a, b) > [f_{xy}(a, b)]^2$$

(0, 0) da $0\cdot 10 < (-60)^2$

(30, 180) de $720\cdot 10 > (-60)^2$

$$7200 > 3600$$

(0, 0) noktasında f_{xx} ve f_{yy} nin işaretleri aynı ve $f_{xx}\cdot f_{yy} < (f_{xy})^2$ olduğu için $f(0, 0)$ bir büküm noktasıdır. (30, 180) noktasında $f_{xx}, f_{yy} > 0$ ve $f_{xx}\cdot f_{yy} > (f_{xy})^2$ olduğu için $f(30, 180)$ bir bağıl minimumdur.

13.19. $z = 8x^3 + 96xy - 2y^3$ için Problem 13.17'yi tekrar yapınız.

(1)
$$z_x = 24x^2 + 96xy = 0 \qquad (13.34)$$
$$z_y = 96x - 24y^2 = 0 \qquad (13.35)$$

(*13.34*)'ten

$$96y = -24x^2$$
$$y = -\tfrac{1}{4}x^2$$

(*13.35*)'te $y = -\frac{1}{4}x^2$ yerine yazılır ve cebirsel olarak çözülür,

$$96x - 24\left(-\tfrac{1}{4}x^2\right)^2 = 0$$
$$96x - \tfrac{3}{2}x^4 = 0$$
$$3x(64 - x^3) = 0$$

$$3x = 0 \qquad \text{veya} \qquad 64 - x^3 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x^3 = 64$$
$$x = 4$$

Sonra bu değerler (*13.34*)'te yerine yazılır ve $x = 0$ için $y = 0$ ve $x = 4$ için $y = -4$ bulunur. Dolayısıyla

$$(0, 0) \qquad \text{ve} \qquad (4, -4) \text{ kritik değerler}$$

(2) (*13.34*) ve (*13.35*)'ten ikinci mertebeden koşullar test edilir,

$$z_{xx} = 48x \qquad z_{yy} = -48y$$
$$z_{xx}(0, 0) = 48(0) = 0 \qquad z_{yy}(0, 0) = -48(0) = 0$$
$$z_{xx}(4, -4) = 48(4) = 192 > 0 \qquad z_{yy}(4, -4) = -48(-4) = 192 > 0$$

$$z_{xy} = 96 = z_{yx}$$
$$z_{xx}(a, b) \cdot z_{yy}(a, b) > \left[z_{xy}(a, b)\right]^2$$

(0, 0)'da $\qquad 0 \cdot 0 < (96)^2$

(4, –4)'te $\qquad 192 \cdot 192 > (96)^2$

(0, 0) noktasında z_{xx} ve z_{yy}'nin işaretleri aynı ve $z_{xx} \cdot z_{yy} < (z_{xy})^2$ olduğu için fonksiyon büküm noktasındadır. (4, –4) noktasında z_{xx} ve $z_{yy} > 0$ ve $z_{xx} \cdot z_{yy} > (z_{xy})^2$ olduğu için fonksiyon bağıl minimumdadır.

13.20. $f(a, b) = 3x^3 - 9x^2 + 2y^3 + 24y^2 - 432x - 54y + 127$ için Problem 13.17'yi tekrar yapınız.

(1)
$$f_x = 9x^2 - 18x - 432 = 0 \qquad f_y = 6y^2 + 48y - 54 = 0 \qquad (13.36)$$
$$9(x^2 - 2x - 48) = 0 \qquad 6(y^2 + 8y - 9) = 0$$
$$(x + 6)(x - 8) = 0 \qquad (y - 1)(y + 9) = 0$$
$$x = -6 \quad x = 8 \qquad y = 1 \quad y = -9$$

Böylece (–6, 1), (–6, –9), (8, 1) ve (8, –9) kritik noktalardır.

(2) Kritik noktaların her biri için ikinci mertebeden kısmi türevleri test ediniz. (*13.36*)'dan,

$$f_{xx} = 18x - 18 \qquad f_{yy} = 12y + 48$$

(i) $f_{xx}(-6, 1) = -126 < 0 \qquad f_{yy}(-6, 1) = 60 > 0$

(ii) $f_{xx}(-6, -9) = -126 < 0 \qquad f_{yy}(-6, -9) = -60 < 0$

(iii) $f_{xx}(8, 1) = 126 < 0 \qquad f_{yy}(8, 1) = 60 > 0$

(iv) $f_{xx}(8, -9) = 126 < 0 \qquad f_{yy}(8, -9) = -60 > 0$

(i) ve (iv)'nin işaretleri farklı olduğu için (–6, 1) ve (8, –9) semer noktalarıdır, göz ardı edilebilir. (*13.36*)'dan çapraz kısmi türevleri alınır ve üçüncü koşulu test ediniz.

$$f_{xy} = 0 = f_{yx}$$

$$f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) > [f_{xy}(a, b)]^2$$

(ii)'den $(-126) \cdot (-60) > (0)^2$

(iii)'ten $(126) \cdot (60) > (0)^2$

Fonksiyon (–6, –9)'da bağıl maksimum, (8, 1)'de bağıl minimum ve (–6, 1) ile (8, –9) semer noktalarındadır.

KISITLI OPTİMİZASYON VE LAGRANGE ÇARPANI

13.21. Aşağıdaki fonksiyonu verilen kısıta bağlı olarak optimize eden kritik değerleri bulmak için Lagrange çarpanı yöntemini kullanınız.

$x + y = 60$ bağlı olarak $z = 5x^2 - 2xy + 8y^2$

(1) Kısıt sıfıra eşitlenir, λ ile çarpılır ve amaç fonksiyonuna eklenerek elde edilen

$$Z = 5x^2 - 2xy + 8y^2 + \lambda(60 - x - y)$$

Birinci dereceden koşullar

$$Z_x = 10x - 2y - \lambda = 0 \qquad (13.37)$$

$$Z_y = -2x + 16y - \lambda = 0 \qquad (13.38)$$

$$Z_\lambda = 60 - x - y = 0 \qquad (13.39)$$

λ yok etmek için (*13.37*)'den (*13.38*)'i çıkartırız,

$$12x - 18y = 0 \qquad x = 1.5y$$

(*13.39*)'da $x = 1.5y$ yerine yazılır ve tekrar düzenlenir,

$$1.5y + y = 60 \qquad y_0 = 24$$

Ardından (*13.39*)'da $y_0 = 24$ yerine yazılır ve tekrar düzenlenir,

$$x + 24 = 60 \qquad x_0 = 36$$

Son olarak, (*13.37*) veya (*13.38*)'de $x_0 = 36$ ve $y_0 = 24$ yerine yazıldığında $\lambda_0 = 312$ bulunur. Kritik değerlerde birinci derece koşulları çözerken matris cebirinin nasıl kullanıldığını görmek için, aynı sonucu bulmak adına Cramer kuralının kullanıldığı Problem 6.13'e bakınız. İkinci derece koşulları test etmek amacıyla ve fonksiyonun bağıl maksimum veya bağıl minimumda olup olmadığını belirlemek için sınırlı Hessian matrisi gereklidir. Dowling, *Shaum's Outline of Introduction to Mathematical Economics* kitabı Kısım 12.5'e bakınız.

13.22. Verilen kısıta bağlı olarak aşağıdaki fonksiyonu optimize etmek için Lagrange çarpanı yöntemini kullanınız.

$2x + y = 104$ bağlı olarak $\qquad f(x, y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$

Lagrange fonksiyonu

$$F = 4x^2 - 6xy + 9y^2 + \lambda(104 - 2x - y) \text{ dir.}$$

Birinci dereceden koşullar

$$F_x = 8x - 6y - 2\lambda = 0 \quad (13.40)$$

$$F_y = -6x + 18y - \lambda = 0 \quad (13.41)$$

$$F_\lambda = 104 - 2x - y = 0 \quad (13.42)$$

λ yok etmek için (*13.41*)'i 2 ile çarpıp (*13.40*)'dan çıkartırız,

$$20x - 42y = 0 \qquad x\,2.1y$$

(*13.42*)'de $x = 2.1y$ yerine yazılır ve tekrar düzenlenir,

$$2(2.1y) + y = 104 \qquad y_0 = 20$$

Sonra (*13.42*)'de $y_0 = 20$ yerine yazılır ve tekrar düzenlenir,

$$2x + 20 = 104 \qquad x_0 = 42$$

Son olarak (*13.40*) ya da (*13.41*)'de $x_0 = 42$ ve $y_0 = 20$ yerine yazılır ve $\lambda_0 = 108$ olduğu görülür.

13.23. Verilen kısıta bağlı olarak aşağıdaki fonksiyonu optimize ediniz:
$x + 3y = 69$ bağlı olarak $x = 120x - 4x^2 + 2xy - 3y^2 + 96y - 102$

Kısıt dâhil edilip ve optimize edildiğinde,

$$Z = 120x - 4x^2 + 2xy - 3y^2 + 96y - 102 + \lambda(69 - x - 3y)$$

$$Z_x = 120 - 8x + 2y - \lambda = 0 \quad (13.43)$$

$$Z_y = 96 + 2x - 6y - 3\lambda = 0 \quad (13.44)$$

$$Z_\lambda = 69 - x - 3y = 0 \quad (13.45)$$

λ yok etmek için (*13.43*) 3 ile çarpılıp (*13.44*)'ten çıkarılır,

$$-264 + 26x - 12y = 0$$

y yok etmek için (*13.45*) 4 ile çarpılıp (*13.46*)'dan çıkarılır,

$$-540 + 30x = 0$$

$$x_0 = 18$$

y 'yi bulmak için (*13.45*)'te $x_0 = 18$ yerine yazılır,

$$y_0 = 17$$

Sonra (*13.43*) ya da (*13.44*)'te $x_0 = 18$ ve $y_0 = 17$ yerine yazılır ve $\lambda_0 = 10$ olduğu görülür

13.24. Kısıta bağlı olarak aşağıdaki fonksiyonu optimize ediniz:
$3x + y = 408$ bağlı olarak $f(x, y) = 120x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 160y + 7$

Lagrange fonksiyonu kurulup optimize edilir,

$$F = 120x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 160y + 7 + \lambda(480 - 3x - y)$$

$$F_x = 120 - 4x - y - 3\lambda = 0 \quad (13.47)$$

$$F_y = 160 - x - 6y - \lambda = 0 \quad (13.48)$$

$$F_\lambda = 480 - 3x - y = 0 \quad (13.49)$$

λ yok etmek için (*13.48*) 3 ile çarpılıp (*13.47*)'den çıkarılır,

$$-360 - x + 17y = 0 \quad (13.50)$$

x yok etmek için (*13.50*) 3 ile çarpılıp (*13.49*)'dan çıkarılır,

$$1560 - 52y = 0$$
$$y_0 = 30$$

x 'i bulmak için (*13.49*)'da $y_0 = 30$ yerine yazılır,

$$x_0 = 150$$

Sonra (*13.47*) ya da (*13.48*)'de $x_0 = 150$ ve $y_0 = 30$ yerine yazıldığında $\lambda_0 = -170$ bulunur. λ negatif olduğundan, $f(x, y)$ bağıl minimumdadır.

GELİR BELİRLEME ÇARPANLARI

13.25. Problem 4.20'den (*4.53*)'teki azalan formdaki eşitlik,

$$Y_e = \frac{1}{1-b+z}(C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0) \qquad (13.51)$$

olmak üzere, (1) otonom yatırım I_0 çarpanını, (2) otonom ithalat Z_0 çarpanını ve (3) b tüketimi için marjinal tüketim eğiliminin çarpanını bulunuz.

(1) Farklı çarpanlardan herhangi birini bulmak için, istenilen değişken ya da parametreye göre Y_e'nin kısmi türevi alınır. Kesirin parantez içindeki her bir terim ile ayrı ayrı çarpıldığını hatırlayarak,

$$\frac{\partial Y_e}{\partial I_0} = \frac{1}{1-b+z}$$

(2)
$$\frac{\partial Y_e}{\partial Z_0} = \frac{-1}{1-b+z}$$

(3) Bölüm kuralı kullanılır,

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{(1-b+z)(0) - (C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0)(-1)}{(1-b+z)^2}$$

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{1(C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0)}{(1-b+z)^2} = \frac{1}{(1-b+z)}\left(\frac{C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0}{(1-b+z)}\right)$$

ve sadeleştirmek için (*13.51*) kullanılır,

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{Y_e}{(1-b+z)}$$

13.26. Problem 4.19'dan (*4.52*)'deki azalan formdaki eşitlik,

$$Y_e = \frac{1}{1-b+bt}(C_0 + I_0 - bT_0) \qquad (13.52)$$

olmak üzere, b marjinal tüketim eğilimi çarpanını bulunuz.

Bölüm kuralı kullanılır,

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{(1-b+bt)(-T_0) - (C_0 + I_0 - bT_0)(-1+t)}{(1-b+bt)^2}$$

Eksi ile çarpılıp tekrar düzenlendiğinde,

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{-(1-b+bt)T_0 + (1-t)(C_0 + I_0 - bT_0)}{(1-b+bt)^2}$$

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{-(1-b+bt)T_0 - t(C_0 + I_0 - bT_0) + (C_0 + I_0 - bT_0)}{(1-b+bt)^2}$$

Paydanın paydaki her üç terimi ayrı ayrı böldüğünü hatırlayalım ve sadeleştirmek için (*13.52*) kullanıldığında,

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{-T_0}{1-b+bt} - \frac{tY_e}{1-b+bt} + \frac{Y_e}{1-b+bt}$$

Yeniden düzenlenip tekrar sadeleştirilir,

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{1}{1-b+bt}[Y_e - (T_0 + tY_e)] = \frac{1}{1-b+bt}(Y_e - T_e)$$

Fakat $Y - T = Y_d$ ya da kullanılabilir gelir, bu yüzden

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{1}{1-b+bt}Y_d$$

İŞLETME VE İKTİSAT FONKSİYONLARININ OPTİMİZASYONU

13.27. Bir firma x ve y olmak üzere ürettiği iki mal için (*a*) kâr maksimize eden x ve y düzeyini bulunuz, (*b*) ikinci dereceden şartları test ediniz ve (*c*) x_0 ve y_0 kritik değerlerinde fonksiyonu hesaplayınız, aşağıda kâr fonksiyonu verilmiştir:

$$\pi = 120x - 2x^2 - 3xy - 3y^2 + 165y - 250$$

(*a*) Birinci kısmi türevini alınır ve sıfıra eşitlenir,

$$\pi_x = 120x - 4x - 3y = 0 \qquad (13.53)$$

$$\pi_y = 165 - 3x - 6y = 0 \qquad (13.54)$$

y'yi yok etmek için (*13.53*) 2 ile çarpılıp (*13.54*)'ten çıkarılır,

$$-75 + 5x = 0$$

$$x_0 = 15$$

y_0'ı bulmak için (*13.53*) veya (*13.54*)'te $x_0 = 15$ yerine yazılır,

$$y_0 = 20$$

(*b*) (*13.53*) ve (*13.54*)'ün ikinci kısmi türevleri alınır,

$$\pi_{xx} = -4 \qquad \pi_{yy} = -6 \qquad \pi_{xy} = -3$$

π_{xx} ve π_{yy}'nin ikisi de negatif ve $\pi_{xx} \cdot \pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$ olduğu için π maksimumdadır.

(*c*) Orijinal fonksiyonda $x_0 = 15$ ve $y_0 = 20$ yerine yazıldığında,

$$\pi = 2300$$

13.28. $\pi = 324x - 5x^2 - 2xy - 4y^2 + 308y - 1240$ için Problem 13.27'yi tekrar çözünüz.

(*a*)

$$\pi_x = 324 - 10x - 2y = 0 \qquad (13.55)$$

$$\pi_y = 308 - 2x - 8y = 0 \qquad (13.56)$$

y'yi yok etmek için (*13.55*) 4 ile çarpılıp (*13.56*)'dan çıkarılır,

$$-988 + 38x = 0$$

$$x_0 = 26$$

y_0'ı bulmak için (*13.55*) veya (*13.56*)'da $x_0 = 26$ yerine yazılır,

$$y_0 = 32$$

(*b*) $\pi_{xx} = -10 \qquad \pi_{yy} = -8 \qquad \pi_{xy} = -2$

π_{xx} ve π_{yy} nin ikisi de negatif ve $\pi_{xx} \cdot \pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$ olduğu için π maksimumdadır.

(*c*) $\pi = 7900$

13.29. Bir tekelci üreticinin *x* ve *y* olmak üzere ürettiği iki ürünün talep fonksiyonları

$$P_x = 315 - 4x \qquad (13.57)$$

$$P_y = 260 - 3y \qquad (13.58)$$

şeklindedir ve ortak toplam maliyet fonksiyonu ise,

$$c = 2x^2 + 3xy + y^2 + 400$$

dır. (*a*) her bir ürün için kârı maksimize eden çıktı seviyesini, (*b*) her bir ürün için kârı maksimize eden fiyatı ve (*b*) maksimum kârı bulunuz.

(*a*) $\pi = \text{TR} - \text{TC}$ olmak üzere, burada $\text{TR} = P_x \cdot x + P_y \cdot y$

$$\pi = P_x \cdot x + P_y \cdot y - c$$

Verilen bilgiler yerine yazılır ve optimize edilir,

$$\pi = (315 - 4x)x + (260 - 3y)y - (2x^2 + 3xy + y^2 + 400)$$

$$\pi = 315 - 6x^2 - 3xy - 4y^2 + 260y - 400$$

$$\pi_x = 315 - 12x - 3y = 0 \qquad (13.59)$$

$$\pi_y = 260 - 3x - 8y = 0 \qquad (13.60)$$

x'i yok etmek için (*13.60*) 4 ile çarpılıp (*13.59*)'dan çıkarılır,

$$-725 + 29y = 0$$

$$y_0 = 25$$

x_0'ı bulmak için (*13.59*) veya (*13.60*)'da $y_0 = 25$ yerine yazılır,

$$x_0 = 20$$

Maksimumdan emin olmak için ikici derece koşullar test edilir,

$$\pi_{xx} = -12 \qquad \pi_{yy} = -8 \qquad \pi_{xy} = -3$$

π_{xx} ve π_{yy} nin ikisi de negatif ve $\pi_{xx} \cdot \pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$ olduğu için π maksimumdadır.

(*b*) (*13.57*) ve (*13.58*)'de $x_0 = 20$ ve $y_0 = 25$ yerine yazıldığında,

$$P_x = 315 - 4(20) = 235 \qquad P_y = 260 - 3(25) = 185$$

(*c*) $\pi = 6000$

13.30. Tekelci bir piyasa için talep fonksiyonları

$$P_x = 92 - 2x \qquad (13.61)$$

$$P_y = 176 - 5y \qquad (13.62)$$

ve maliyet fonksiyonu $c = 3x^2 + xy + 2y^2 + 424$ olmak üzere kârı maksimize eden (*a*) çıktı, (*b*) fiyat ve (*c*) kâr seviyesini bulunuz.

(*a*) Kâr fonksiyonu yerine yazılır ve optimize edilir,

$$\pi = (92 - 2x)x + (176 - 5y)y - (3x^2 + xy + 2y^2 + 424)$$

$$\pi = 92x - 5x^2 - xy - 7y^2 + 176y - 424$$

$$\pi_x = 92 - 10x - y = 0 \qquad (13.63)$$

$$\pi_y = 176 - x - 14y = 0 \qquad (13.64)$$

x'i yok etmek için (*13.64*) 10 ile çarpılıp (*13.63*)'ten çıkarılır,

$$-1668 + 139y = 0$$

$$y_0 = 12 \qquad x_0 = 8$$

İkinci derece koşullar test edilir,

$$\pi_{xx} = -10 \qquad \pi_{yy} = -14 \qquad \pi_{xy} = -1$$

π_{xx} ve π_{yy} nin ikisi de negatif ve $\pi_{xx} \cdot \pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$ olduğu için π maksimumdadır.

(*b*) (*13.61*) ve (*13.62*)'de $x_0 = 8$ ve $y_0 = 12$ yerine yazılır,

$$P_x = 76 \qquad P_y = 116$$

(*c*)

$$\pi = 1000$$

13.31. Tekelci bir piyasa için talep fonksiyonları

$$P_1 = 138 - 1.5Q_1 \qquad (13.65)$$

$$P_2 = 202 - 3.5Q_2 \qquad (13.66)$$

ve toplam maliyet fonksiyonu $c = 4Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 3Q_2^2 + 204$ olmak üzere kârı maksimize eden (*a*) çıktı, (*b*) fiyat ve (*c*) kâr seviyesini bulunuz.

(*a*) Kâr fonksiyonu oluşturulur ve optimize edilir,

$$\pi = (138 - 1.5Q_1)Q_1 + (202 - 3.5Q_2)Q_2 - (4Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 3Q_2^2 + 204)$$

$$\pi = 138Q_1 - 5.5Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 6.5Q_2^2 - 204)$$

$$\pi_1 = 138 - 11Q_1 - 2Q_2 = 0 \qquad (13.67)$$

$$\pi_2 = 202 - 2Q_1 - 13Q_2 = 0 \qquad (13.68)$$

Q_1'i yok etmek için (*13.68*) 5.5 ile çarpılıp (*13.67*)'den çıkarılır,

$$-973 + 69.5Q_2 = 0$$

$$\overline{Q}_2 = 14 \qquad \overline{Q}_1 = 10$$

İkinci derece koşullar kontrol edilir,

$$\pi_{11} = -11 \qquad \pi_{22} = -13 \qquad \pi_{12} = -2$$

$\pi_{xx}, \pi_{yy} < 0$ ve $\pi_{xx} \cdot \pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$ olduğu için π maksimumdadır.

(*b*) $P_1 = 138 - 1.5(10) = 123 \qquad P_2 = 202 - 3.5(14) = 153$

(*c*)

$$\pi = 1900$$

13.32. Tekelci bir piyasa için talep fonksiyonları

$$P_1 = 920 - 10Q_1 \qquad (13.69)$$

$$P_2 = 950 - 6Q_2 \qquad (13.70)$$

ve toplam maliyet fonksiyonu $c = 2Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + 4Q_2^2 + 1800$ olmak üzere kârı maksimize eden (*a*) çıktı, (*b*) fiyat ve (*c*) kâr seviyesi bulunuz.

(*a*) Kâr fonksiyonu oluşturulur ve optimize edilir,

$$\pi = (920 - 10Q_1)Q_1 + (950 - 6Q_2)Q_2 - (2Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + 4Q_2^2 + 1800)$$

$$\pi = 920Q_1 - 12Q_1^2 - 5Q_1Q_2 - 10Q_2^2 + 950Q_2 - 1800)$$

$$\pi_1 = 920 - 24Q_1 - 5Q_2 = 0 \qquad (13.71)$$

$$\pi_2 = 950 - 5Q_1 - 20Q_2 = 0 \qquad (13.72)$$

Q_2 yi yok etmek için (*13.71*) 4 ile çarpılıp (*13.72*)'den çıkarılır,

$$-2730 + 91Q_1 = 0$$

$$\overline{Q}_2 = 30 \qquad \overline{Q}_1 = 40$$

İkinci derece koşullar kontrol edilir,

$$\pi_{11} = -24 \qquad \pi_{22} = -20 \qquad \pi_{12} = -5$$

$\pi_{xx}, \pi_{yy} < 0$ ve $\pi_{xx} \cdot \pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$ olduğu için π maksimumdadır.

(*b*) $P_1 = 920 - 10(30) = 620 \qquad P_2 = 950 - 6(40) = 710$

(*c*) $\pi = 31{,}000$

LAGRANGE ÇARPANI YÖNTEMİNİN EKONOMİK UYGULAMALARI

13.33. Bir kadın giyim üreticisi x etek ve y pantolondan seçilen herhangi bir kombinasyondan 77 birim teslim etmek üzere sözleşme yapıyor. (*a*) Firmanın toplam maliyet fonksiyonu $c = 7x^2 - 2xy + 5y^2 + 64$ olmak üzere sözleşmeyi sağlayacak minimum maliyetli kombinasyonu bulunuz.

(*b*) Kısıtın sabiti bir birim arttırılır veya azaltılırsa maliyet ne olur?

(*a*) İlk haliyle kısıt,

$$x + y = 77$$

sonra Lagrange fonksiyonu kurulur ve optimize edilir,

$$C = 7x^2 - 2xy + 5y^2 + 64 + \lambda(77 - x - y)$$

$$C_x = 14x - 2y - \lambda = 0 \qquad (13.73)$$

$$C_y = -2x + 10y - \lambda = 0 \qquad (13.74)$$

$$C_\lambda = 77 - x - y = 0 \qquad (13.75)$$

λ'i yok etmek için (*13.73*)'ten (*13.74*) çıkarılır,

$$16x - 12y = 0$$

$$y = \frac{4}{3}x$$

(13.75)'te yerine yazılır,

$$77 - x - (\frac{4}{3}x) = 0$$

$$x_0 = 33$$

(13.75)'te $x_0 = 33$ yerine yazılırsa, $y_0 = 44$. $x_0 = 33$, $y_0 = 44$ (13.73) veya (13.74)'te yerine yazılırsa, $\lambda_0 = 374$ bulunur.

(*b*) $\lambda_0 = 374$ için, kısıtın sabiti bir birim arttırılarak 78 birim olduğunda, toplam maliyet yaklaşık 374 TL artacaktır. Ve kısıtın sabiti bir birim azaltılarak 76 birim olduğunda, toplam maliyet yaklaşık 374 TL azalacaktır. Bu problemin birinci derece koşullarının matris cebiri ile çözümü için, Problem 6.14'e bakınız.

13.34. Bir ayakkabı üreticisi x makosen ve y bağcıklı ayakkabı ile yaptığı herhangi bir kombinasyondan 36 çift teslim etmek üzere sözleşme yapıyor. (*a*) $c = 2x^2 - xy + 3y^2 + 18$ olmak üzere sözleşmeyi sağlayacak en az maliyetli kombinasyonu bulunuz.

(*b*) Sözleşmeye eklenen her bir ayakkabı çifti için C ne olur?

(*a*) Lagrange fonksiyonu kurulur ve optimize edilir,

$$C = 2x^2 - xy + 3y^2 + 18 + \lambda(36 - x - y)$$

$$C_x = 4x - y - \lambda = 0 \qquad (13.76)$$

$$C_y = -x + 6y - \lambda = 0 \qquad (13.77)$$

$$C_\lambda = 36 - x - y = 0 \qquad (13.78)$$

λ'i yok etmek için (13.76)'dan (13.77) çıkarılır,

$$5x - 7y = 0$$

$$y = \frac{5}{7}x$$

(13.78)'de yerine yazılır,

$$36 - x - (\frac{5}{7}x) = 0$$

$$x_0 = 21$$

ve $\qquad y_0 = 15 \qquad \lambda_0 = 69$

(*b*) $\lambda_0 = 69$ olduğundan, C yaklaşık 69 TL artacaktır.

13.35. (*a*) $\pi = 160x - 4x^2 - xy - 3y^2 + 210y$ iken maksimum ortak üretim kapasitesi 22 olan bir firma için kârı maksimize eden çıktı kombinasyonunu bulunuz.

(*b*) Çıktı kapasitesinin bir birim arttırılmasının kâr üzerindeki etkisini tahmin ediniz.

(*a*) Kısıt denkleme dâhil edilip optimize edilir,

$$\Pi = 160 - 4x^2 - xy - 3y^2 + 210y + \lambda(22 - x - y)$$

$$\Pi_x = 160 - 8x - y - \lambda = 0 \qquad (13.79)$$

$$\Pi_y = 210 - x - 6y - \lambda = 0 \qquad (13.80)$$

$$\Pi_y = 22 - x - y - \lambda = 0 \qquad (13.81)$$

λ'i yok etmek için (*13.79*)'dan (*13.80*) çıkarılır,

$$-50 - 7x + 5y = 0 \qquad (13.82)$$

y'i yok etmek için (*13.81*) 5 ile çarpılıp (*13.82*)'ye eklenir,

$$60 - 12x = 0$$

$$x_0 = 5 \qquad y_0 = 17 \qquad \lambda_0 = 103$$

(*b*) $\lambda_0 = 103$ olduğundan, π yaklaşık 103 TL artacaktır.

13.36. Bir mağaza $z = 420x - 2x^2 - 3xy - 5y^2 + 640y + 1725$ olmak üzere z satış değerini, x el ilanları ve y gazetelerdeki reklam sayısına bağlı olarak bulmuştur. İlan başına fiyat el ilanlarında 1 TL ve gazetelerde 4 TL ve reklam bütçesi 180 TL ise, (*a*) Bütçe kısıtına bağlı olarak satışları maksimize edecek gazete ve el ilanındaki reklam sayısını bulunuz. (*b*) Reklam bütçesinde 1 TL' lık bir artışın satışlar üzerindeki etkisini tahmin ediniz.

(*a*) Lagrange fonksiyonu kurulur,

$$Z = 420x - 2x^2 - 3xy - 5y^2 + 640y + 1725 + \lambda(180 - x - 4y)$$

$$Z_x = 420 - 4x - 3y - \lambda = 0 \qquad (13.83)$$

$$Z_y = 640 - 3x - 10y - 4\lambda = 0 \qquad (13.84)$$

$$Z_\lambda = 180 - x - 4y - \lambda = 0 \qquad (13.85)$$

λ'i yok etmek için (*13.83*) 4 ile çarpılıp (*13.84*)'ten çıkarılır,

$$-1040 + 13x + y = 0 \qquad (13.86)$$

y'i yok etmek için (*13.86*) 2 ile çarpılıp (*13.85*)'e eklenir,

$$-1900 + 25x = 0$$

$$x_0 = 76 \qquad y_0 = 26 \qquad \lambda_0 = 38$$

(*b*) $\lambda_0 = 38$ olduğundan, satışlar 38 TL artacaktır.

13.37. Mevcut tadilattan dolayı depo alanının azalması nedeniyle, normal kâr fonksiyonuna sahip bir firmanın

$$\pi = 160x - 3x^2 - xy - 2y^2 + 240y - 665$$

depolama alanı geçici olarak 40 fit kare (ft^2) azalmıştır. Eğer x 1 ft^2 ve y 2 ft^2 alan gerektiriyorsa, (*a*) geçici depolama kısıtına bağlı olarak kârı maksimize edecek x ve y kritik değerlerini bulunuz. (*b*) Depolama alanındaki 1 ft^2 artışın kâr üzerindeki etkisini tahmin ediniz.

(*a*) Kısıt denkleme dâhil edilip birinci kısmi türevi alınır,

$$\Pi = 160 - 3x^2 - xy - 2y^2 + 240y - 665 + \lambda(40 - x - 2y)$$

$$\Pi_x = 160 - 6x - y - \lambda = 0 \qquad (13.87)$$

$$\Pi_y = 240 - x - 4y - 2\lambda = 0 \qquad (13.88)$$

$$\Pi_y = 40 - x - 2y = 0 \qquad (13.89)$$

λ'i yok etmek için (*13.87*) 2 ile çarpılıp (*13.88*)'den çıkarılır,

$$-80 + 11x - 2y = 0 \qquad (13.90)$$

y'yi yok etmek için (*13.89*)'dan (*13.90*) çıkarılır,

$$120 - 12x = 0$$

$$x_0 = 10 \qquad y_0 = 15 \qquad \lambda_0 = 85$$

(*b*) $\lambda_0 = 85$ olduğundan, kâr yaklaşık olarak 85 TL artacaktır.

13.38. Gelişmekte olan küçük bir ülkede bulunan tekelci bir TV ve VCR (video kaset kayıt cihazı) üreticisinin bir günlük maksimum ortak kapasitesi 40 adettir. Talep fonksiyonu

$$P_1 = 820 - 6Q_1$$

$$P_2 = 980 - 8Q_2$$

ve toplam maliyet fonksiyonu $c = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 4Q_2^3 + 225$

olmak üzere, üretim kısıtına bağlı olarak kârı maksimize edecek üretim seviyesini bulunuz.

Öncelikle kâr fonksiyonu oluşturulur,

$$\pi = (820Q_1 - 6Q_1)Q_1 + (980 - 8Q_2)Q_2 - (2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 4Q_2^2 + 225)$$

$$\pi = 820Q_1 - 8Q_1^2 - Q_1Q_2 - 12Q_2^2 + 980Q_2 - 225)$$

Daha sonra Lagrange fonksiyonu haline getirilip optimize edilir,

$$\Pi = 820Q_1 - 8Q_1^2 - Q_1Q_2 - 12Q_2^2 + 980Q_2 - 225 + \lambda(40 - Q_1 - Q_2)$$

$$\Pi_x = 820 - 16Q_1 - Q_2 - \lambda = 0 \qquad (13.91)$$

$$\Pi_y = 980 - Q_1 - 24Q_2 - \lambda = 0 \qquad (13.92)$$

$$\Pi_\lambda = 40 - Q_1 - Q_2 = 0 \qquad (13.93)$$

λ'i yok etmek için (*13.91*)'den (*13.92*) çıkarılır,

$$-160 - 15Q_1 + 23Q_2 = 0 \qquad (13.94)$$

Q_1'i yok etmek için (*13.93*) 15 ile çarpılıp (*13.94*)'ten çıkarılır,

$$-760 + 38Q_2 = 0$$

$$\overline{Q}_2 = 20 \qquad \overline{Q}_1 = 20 \qquad \overline{\lambda} = 480$$

KISIT ALTINDA COBB-DOUGLAS FONKSİYONUNUN OPTİMİZE EDİLMESİ

13.39. Bir firmanın üretim için ölçeğe göre sabit getiride sabit Cobb-Douglas üretim fonksiyonu $q = 1.5K^{0.6}L^{0.4}$ $P_K = 6$ *TL*, $P_L = 2$ *TL* ve üretim bütçesi 960 TL olmak üzere çıktıyı maksimize ediniz.

Kısıtlı optimizasyon için Lagrange fonksiyonu oluşturulur ve birinci kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenir,

$$Q = 1.5K^{0.6}L^{0.4} + \lambda(960 - 6K - 2L)$$

$$Q_K = 0.9K^{-0.4}L^{0.4} - 6\lambda = 0 \qquad (13.95)$$

$$Q_L = 0.6K^{0.6}L^{-0.6} - 2\lambda = 0 \qquad (13.96)$$

$$Q_\lambda = 960 - 6K - 2L = 0 \qquad (13.97)$$

Tekrar düzenlenir ve sonra λ'i yok etmek için (*13.95*) (*13.96*)'ya bölünür,

$$\frac{0.9K^{-0.4}L^{0.4}}{0.6K^{0.6}L^{-0.6}} = \frac{6\lambda}{2\lambda}$$

Bölümdeki üsleri negatif olarak yazabileceğinizi hatırlayınız,

$$1.5K^{-1}L^{1} = 3$$

$$\frac{L}{K} = 2 \qquad L = 2K$$

(*13.97*)'de $L = 2K$ yerine yazılır,

$$960 - 6K - 2(2K) = 0 \qquad K_0 = 96$$

Son olarak (*13.97*)'de $K_0 = 96$ yerine yazılır,

$$L_0 = 192$$

13.40. Bir firmanın üretim için ölçeğe göre azalan getiride genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonu $q = K^{0.3}L^{0.5}$ $P_K = 12$ *TL*, $P_L = 8$ *TL* ve üretim bütçesi 1280 TL olmak üzere, bütçe kısıtına bağlı olarak çıktıyı maksimize ediniz.

Lagrange fonksiyonu oluşturulur,

$$Q = K^{0.3}L^{0.5} + \lambda(1280 - 12K - 8L)$$

$$Q_K = 0.3K^{-0.7}L^{0.5} - 12\lambda = 0 \qquad (13.98)$$

$$Q_L = 0.5K^{0.3}L^{-0.5} - 8\lambda = 0 \qquad (13.99)$$

$$Q_\lambda = 1280 - 12K - 8L = 0 \qquad (13.100)$$

Tekrar düzenlenir ve sonra λ'i yok etmek için (*13.98*) (*13.99*)'a bölünür,

$$\frac{0.3K^{-0.7}L^{0.5}}{0.5K^{0.3}L^{-0.5}} = \frac{12\lambda}{8\lambda}$$

$$0.6\frac{L}{K} = 1.5 \qquad L = 2.5K$$

(*13.100*)'de $L = 2.5K$ yerine yazılır,

$$K_0 = 40 \qquad L_0 = 100$$

13.41. $P_x = 16$ *TL*, $P_y = 4$ *TL* ve *B* bütçesi 864 TL iken fayda fonksiyonu $u = x^{0.8}y^{0.1}$ olmak üzere tüketici için faydayı maksimize ediniz.

Lagrange fonksiyonu oluşturulur ve optimize edilir,

$$U = x^{0.8}y^{0.1} + \lambda(864 - 16x - 4y)$$

$$U_x = 0.8x^{-0.2}y^{0.1} - 16\lambda = 0 \qquad (13.101)$$

$$U_x = 0.1x^{0.8}y^{0.9} - 4\lambda = 0 \qquad (13.102)$$

$$U_x = 864 - 16x - 4y = 0 \qquad (13.103)$$

Tekrar düzenlenir ve sonra λ'i yok etmek için (*13.101*) (*13.102*)'ye bölünür,

$$\frac{0.8x^{-0.2}y^{0.1}}{0.1x^{0.8}y^{-0.9}} = \frac{16\lambda}{4\lambda}$$

$$8\frac{y}{x} = 4 \qquad y = \frac{1}{2}x$$

(*13.103*)'te $y = 1/2x$ yerine yazılır,

$$x_0 = 48 \qquad y_0 = 24$$

13.42. $P_x = 3$, $P_y = 5$ ve $B = 405$'e bağlı olarak verilen $u = x^{0.2}y^{0.7}$ de tüketici için faydayı maksimize ediniz.

Lagrange fonksiyonu oluşturulur ve optimize edilir ,

$$U = x^{0.2}y^{0.7} + \lambda(405 - 3x - 5y)$$

$$U_x = 0.2x^{-0.8}y^{0.7} - 3\lambda = 0 \qquad (13.104)$$

$$U_y = 0.7x^{0.2}y^{-0.3} - 5\lambda = 0 \qquad (13.105)$$

$$U_\lambda = 405 - 3x - 5\lambda = 0 \qquad (13.106)$$

λ'i yok etmek için (*13.104*) (*13.105*)'e bölünür,

$$\frac{0.2x^{-0.8}y^{0.7}}{0.7x^{0.2}y^{-0.3}} = \frac{3\lambda}{5\lambda}$$

$$\frac{0.2y}{0.7x} = 0.6 \qquad y = 2.1x$$

(*13.106*)'da yerine yazılır,

$$x_0 = 30 \qquad y_0 = 63$$

KAPALI VE TERS FONKSİYON KURALLARI

13.43. Aşağıdaki kapalı fonksiyonların her biri için dy/dx türevini bulunuz:

(*a*) $7x^6 + 4y^5 - 96 = 0$

(*13.22*) kapalı fonksiyon kuralından,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} \qquad (f_y \neq 0)$$

Burada $f_x = 42x^5$ ve $f_y = 20y^4$ dir. Yukarıda yerine yazılır,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{42x^5}{20y^4} = -\frac{21x^5}{10y^4}$$

(*b*) $6x^2 - 7xy + 2y^2 = 81$

Burada $f_x = 12x - 7y$ ve $f_y = 4y - 7x$ dir. Formülde yerine yazılır,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\left(\frac{12x - 7y}{4y - 7x}\right) = \frac{7y - 12x}{4y - 7x}$$

(*c*) $5x^3 + 8y^4 - 3y^3 - 109 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{15x^2}{32y^3 - 9y^2}$$

(*d*) $9x^5 - 2x^2y^2 + 7y^3 = 224$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{45x^4 - 4xy^2}{21y^2 - 4x^2y}$$

(*e*) $(13x - 7)^3 + 15y^5 = 1029$

f_x için genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kullanılır,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{39(13x-7)^2}{75y^4}$$

(*f*) $(4x^4 + 9y^2)^3 = 1645$

f_x ve f_y için genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralı kullanılır,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{48x^3(4x^4+9y^2)^2}{54y(4x^4+9y^2)^2} = -\frac{8x^3}{9y}$$

(*g*) $\sqrt{2x^3+3y^5} = 98$

$\sqrt{2x^3+3y^5} = (2x^3+3y^5)^{1/2}$ olduğunu hatırlayınız,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{3x^2(2x^3+3y^5)^{-1/2}}{7.5y^4(2x^3+3y^5)^{-1/2}} = -\frac{x^2}{2.5y^4}$$

13.44. Aşağıdaki Q açık fonksiyonlarının her biri için dP/dQ ters fonksiyonunun türevini bulunuz.

(*a*) $Q = 496 - 5P$

(*13.23*) ters fonksiyon kuralından,

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{dQ/dP} \qquad \left(\frac{dQ}{dP} \neq 0\right)$$

$dQ/dP = -5$ formülde yerine yazılır,

$$\frac{dP}{dQ} = -\frac{1}{5}$$

(*b*) $Q = 87 - 0.4P$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{-0.4} = -2.5$$

(*c*) $Q = 13 + 3P^3$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{6P} \qquad (P \neq 0)$$

(*d*) $Q = 246 - P^2 + 3P$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{3-2P} \qquad (P \neq 1.5)$$

KISMİ TÜREVL ALMA KURALLARININ DOĞRULANMASI

13.45. Aşağıdaki her bir fonksiyon için, türev alma kurallarını doğrulamak amacıyla (1) $\partial z/\partial x$ bulmak için (*13.1a*)'da ki tanımı, (2) $\partial z/\partial y$ bulmak için (*13.1b*)'de ki tanımı kullanınız.

(*a*) $z = 94 + 5x - 8y$

(1) (*13.1a*)'dan,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Yerine yazılır,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[94 + 5(x+\Delta x) - 8y] - (94 + 5x - 8y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{94 + 5x + 5\Delta x - 8y - 94 - 5x + 8y}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 5 = 5$$

(2) (*13.1b*)'den,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Yerine yazılır,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[94 + 5x - 8(y+\Delta y)] - (94 + 5x - 8y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{94 + 5x - 8y - 8\Delta y - 94 - 5x + 8y}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-8\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (-8) = -8$$

(*b*) $z = 16x - 9xy + 13y$

(1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[16(x+\Delta x) - 9(x+\Delta x)y + 13y] - (16x - 9xy + 13y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{16x + 16\Delta x - 9xy - 9y\,\Delta x + 13y - 16x + 9xy - 13y}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{16\Delta x - 9y\,\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} (16 - 9y) = 16 - 9y$$

(2)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[16x - 9x(y+\Delta y) + 13(y+\Delta y)] - (16x - 9xy + 13y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{16x - 9xy - 9x\,\Delta y + 13y + 13\Delta y - 16x + 9xy - 13y}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-9x\,\Delta y + 13\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (-9x + 13) = -9x + 13$$

(*c*) $z = 7x^2y$

(1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[7(x+\Delta x)^2 y] - (7x^2y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7x^2y + 14xy\,\Delta x + 7y(\Delta x)^2 - 7x^2y}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{14xy\,\Delta x + 7y(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} (14xy + 7y\,\Delta x) = 14xy$$

(2)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[7x^2(y+\Delta y)] - (7x^2y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{7x^2y + 7x^2\Delta y - 7x^2y}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{7x^2\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} 7x^2 = 7x^2$$

(*d*) $z = 3x^2y^2$

(1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x+\Delta x)^2 y^2] - (3x^2y^2)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6y^2x\,\Delta x + 3y^2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6xy^2 + 3y^2\,\Delta x) = 6xy^2$$

(2)
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[3x^2(y+\Delta y)^2] - (3x^2y^2)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2y^2 + 6x^2y\,\Delta y + 3x^2(\Delta y)^2 - 3x^2y^2}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{6x^2y\,\Delta y + 3x^2(\Delta y)^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (6x^2y + 3x^2\,\Delta y) = 6x^2y$$

Ek Problemler

KISMİ TÜREVLER

13.46. Aşağıdaki fonksiyonların her biri için birinci mertebeden kısmi türevleri bulunuz:

(*a*) $z = 15x^2 + 23xy - 14y^2$ (*b*) $z = 6x^5 - 13x^2y^3 + 8y^4$

(*c*) $z = 7w^3 - 2w^2x + 16x^2 + 11x^3y^4 + 20y^4$

13.47. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin birinci mertebeden kısmi türevini bulmak için çarpım kuralı kullanınız:

(*a*) $z = (8x - 5y)(3x + 4y)$ (*b*) $z = (2x^3 + 5y)(6x^2 - 8y^2)$

(*c*) $z = (7w^2 - 4x^3 - 10y^4)(3w^2 + 8x^2 - 2y^{3)}$

13.48. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin birinci mertebeden kısmi türevini bulmak için bölüm kuralı kullanınız:

(*a*) $z = \dfrac{8x - 7y}{18x}$ (*b*) $z = \dfrac{27y}{12x + 5y}$

(*c*) $z = \dfrac{5x^3 - 9y^2}{4x + 3y}$ (*d*) $z = \dfrac{6w - 4x - 9y}{8w - 3x + 2y}$

13.49. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin birinci mertebeden kısmi türevini bulmak için genelleştirilmiş üslü fonksiyon kuralını kullanınız:

(*a*) $z = (12x - 13y)^5$ (*b*) $z = (3x^2 + 5y^3)^4$

(*c*) $z = (14x^3 + 9y^2)^{1/2}$ (*d*) $z = (5x^4 - 2xy + 4y^2)^{-3}$

(*e*) $z = (3x^2 + 8xy + 5y^2)^{-1/2}$ (*f*) $z = (6w^2 - 4x^4 - 9y^5)^3$

13.50. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin birinci mertebeden kısmi türevini bulmak için doğal üstel kuralını kullanınız:

(*a*) $z = 6e^{3xy}$ (*b*) $z = -15e^{-3x^2y^2}$

(*c*) $z = 7e^{(2x+5y)}$ (*d*) $z = e^{w^2x^3y^2}$

13.51. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin birinci mertebeden kısmi türevini bulmak için doğal logaritma kuralını kullanınız:

(*a*) $z = \ln|8x + 11y|$ (*b*) $z = \ln|5x^3 + 4y^2|$

(*c*) $z = \ln|6x^4y^5|$ (*d*) $z = \ln|7w^3 + 4x^2 + 5y^4|$

13.52. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin birinci mertebeden kısmi türevini bulmak için gereken kural kombinasyonlarını kullanınız:

(*a*) $z = (9x + 2y)(3x - 7y)^3$ (*b*) $z = \frac{(5x + 8y)^5}{4x - 3y}$

(*c*) $z = \frac{(2x - 9y)(8x - 5y)}{3x + 11y}$ (*d*) $z = 6x^2y^3e^{5xy}$

İKİNCİ MERTEBEDEN KISMİ TÜREV

13.53. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin ikinci mertebeden kısmi türevini bulunuz:

(*a*) $z = 7x^3 - 4xy + 12y^4$ (*b*) $z = 9x^5 + 6x^2y^4 - 3x^3y^5 - 13y^3$

(*c*) $z = 16x^3y^2$ (*d*) $z = (5x + 12y)^4$

(*e*) $z = x^{0.6}y^{0.4}$ (*f*) $z = 8x^{0.5}y^{0.7}$

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN OPTİMİZASYONU

13.54. Aşağıdaki ikinci dereceden fonksiyonların her birini optimize eden kritik değerleri bulunuz ve fonksiyonun bağıl maksimum, bağıl minimum, büküm noktası veya semer noktasında olup olmadığını görmek için ikinci dereceden koşulları test ediniz.

(*a*) $z = -8x^2 + 148x - 4xy + 118y - 5y^2 + 6$

(*b*) $z = 6x^2 - 51x - 9xy + 182y - 11y^2 - 17$

(*c*) $z = 7x^2 - 78x - 6xy - 48y + 4y^2 - 23$

(*d*) $z = -3x^2 - 6x + 14xy - 158y - 2y^2 + 37$

13.55. Aşağıdaki üçüncü dereceden fonksiyonların her birini optimize eden kritik değerleri bulunuz ve fonksiyonun bağıl maksimum, bağıl minimum, büküm noktası veya semer noktasında olup olmadığını görmek için ikinci dereceden koşulları test ediniz.

(*a*) $z = 5x^3 + 7y^2 - 240x - 154y + 61$

(*b*) $z = -9x^2 - 4y^3 + 324x + 108y - 37$

(*c*) $z = 8x^2 - 6y^3 + 144xy - 323$

(*d*) $z = 6x^3 + 6y^3 + 54xy - 195$

(*e*) $z = 4x^3 + 5y^3 + 18x^2 - 52.5y^2 - 336x - 270y + 189$

(*f*) $z = 3x^3 - 7y^3 + 22.5x^2 - 10.5y^2 - 216x + 630y - 231$

KISITLI OPTİMİZASYON

13.56. Verilen kısıtlara bağlı olarak aşağıdaki fonksiyonların her birini optimize eden kritik değerleri bulunuz.

(*a*) $z = 4x^2 - 5xy + 6y^2$ bağlı olarak $x + y = 30$

(*b*) $z = -7x^2 + 6xy + -9xy^2$ **bağlı olarak** $2x + y = 165$

(*c*) $z = 8x^2 - 70x - 4xy - 50y + 5y^2$ bağlı olarak $x + y = 35$

(*d*) $z = -3x^2 + 40x + 8xy + 288y - 10y^2$ bağlı olarak $x + 2y = 58$

İŞLETME VE İKTİSADİ FONKSİYONLARININ OPTİMİZASYONU

13.57. Aşağıda verilen kâr fonksiyonları için her bir firmanın kârını π maksimize eden kritik değerleri bulunuz:

(*a*) $\pi = 422x - 4x^2 - 7xy - 6y^2 + 522y - 167$

(*b*) $\pi = 496x - 9x^2 - 11xy - 7y^2 + 405y - 235$

(*c*) $\pi = 406x - 5x^2 - 8xy - 9y^2 + 522y - 237$

(*d*) $\pi = 685x - 12x^2 - 13xy - 8y^2 + 595y - 305$

13.58. Aşağıda verilen talep ve toplam maliyet fonksiyonları için her firmanın kârını π maksimize eden kritik değerleri bulunuz:

(*a*) $P_x = 712 - 5x, P_y = 976 - 9y, C = 3x^2 + 4xy + 2y^2 + 375$

(*b*) $P_x = 1173 - 9x, P_y = 1200 - 11y, C = 3x^2 + 5xy + 4y^2 + 222$

(*c*) $P_x = 1532 - 13x, P_y = 1396 - 8y, C = 4x^2 + 47xy + 5y^2 + 624$

(*d*) $P_x = 2501 - 15x, P_y = 1648 - 14y, C = 5x^2 + 11xy + 3y^2 + 535$

13.59. Aşağıda sağlanması gereken üretim kotaları verilmek üzere her bir firmanın toplam maliyetini C minimize eden kritik değerleri bulunuz:

(*a*) $C = 8x^2 - 3xy + 11y^2 + 1055$ bağlı olarak $x + y = 88$

(*b*) $C = 12x^2 - 4xy + 7y^2 + 945$ bağlı olarak $x + y = 69$

(*c*) $C = 9x^2 - 6xy + 13y^2 + 775$ bağlı olarak $x + 4y = 362$

(*d*) $C = 14x^2 - 9xy + 16y^2 + 835$ bağlı olarak $3x + y = 148$

13.60. Aşağıda parantez içindeki üretim sınırları aşılmamak üzere, her bir firmanın kârını π maksimize eden kritik değerleri bulunuz:

(*a*) $\pi = 145x - 5x^2 - 2xy - 8y^2 + 201y - 325$ $(x + y = 37)$

(*b*) $\pi = 440x - 7x^2 - 3xy - 4y^2 + 445y - 395$ $(x + y = 49)$

(*c*) $\pi = 210x - 11x^2 - 25xy - 9y^2 + 182y - 435$ $(2x + y = 36)$

(*d*) $\pi = 494x - 6x^2 - 2xy - 15y^2 + 240y - 565$ $(x + 3y = 81)$

Ek Problemlerin Cevapları

13.46. (*a*) $z_x = 30x + 23y,$ $z_y = 23x - 28y$

(*b*) $z_x = 30x^4 - 26xy^3,$ $z_y = -39x^2y^2 + 32y^3$

(*c*) $z_w = 31w^2 - 4wx,$ $z_x = -2w^2 + 32x + 33x^2y^4,$ $z_y = 44x^3y^3 + 80y^3$

13.47. (*a*) $z_x = 48x + 17y,$ $z_y = 17x - 40y$

(*b*) $z_x = 60x^4 - 48x^2y^2 + 60xy,$ $z_y = -32x^3y + 30x^2 - 120y^2$

(*c*) $z_w = 84w^3 + 112wx^2 - 28wy^3 - 24wx^3 - 60wy^4$

$z_w = 112w^2x - 36w^2x^2 - 160x^4 + 24x^2y^3 - 160xy^4$

$z_w = -42w^2y^2 + 24x^3y^2 - 120w^2y^3 - 320x^2y^3 + 140y^6$

13.48. (*a*) $z_x = \dfrac{126y}{(18x)^2}$ $\qquad z_y = \dfrac{-7}{18x}$

(*b*) $z_x = \dfrac{-324y}{(12x+5y)^2}$ $\qquad z_y = \dfrac{324x}{(12x+5y)^2}$

(*c*) $z_x = \dfrac{40x^3+45x^2y+36y^2}{(4x+3y)^2}$ $\qquad z_y = \dfrac{-15x^3-72xy-27y^2}{(4x+3y)^2}$

(*d*) $z_w = \dfrac{14x+84y}{(8w-3x+2y)^2}$ $\qquad z_x = \dfrac{-14w-35y}{(8w-3x+2y)^2}$

$$z_y = \frac{-84w+35x}{(8w-3x+2y)^2}$$

13.49. (*a*) $z_x = 60(12x-13y)^4$ $\qquad z_y = -65(12x-13y)^4$

(*b*) $z_x = 24x(3x^2+5y^3)^3$ $\qquad z_y = 60y^2(3x^2+5y^3)^3$

(*c*) $z_x = 21x^2(14x^3+9y^2)^{-1/2}$ $\qquad z_y = 9y(14x^3+9y^2)^{-1/2}$

(*d*) $z_x = (-60x^3+6y)(5x^4-2xy+4y^2)^{-4}$ $\qquad z_y = (6x-24y)(5x^4-2xy+4y^2)^{-4}$

(*e*) $z_x = (-3x-4y)(3x^2+8xy+5y^2)^{-3/2}$ $\qquad z_y = (-4x-5y)(3x^2+8xy+5y^2)^{-3/2}$

(*f*) $z_w = 36w(6w^2-7x^4-9y^5)^2$ $\qquad z_x = -84x^3(6w^2-7x^4-9y^5)^2$

$$z_y = -135y^4(6w^2-7x^4-9y^5)^2$$

13.50. (*a*) $z_x = 18ye^{3xy}$, $\qquad z_y = 18xe^{3xy}$

(*b*) $z_x = 90xy^2e^{-3x^2y^2}$, $\qquad z_y = 90x^2ye^{-3x^2y^2}$

(*c*) $z_x = 14e^{(2x+5y)}$, $\qquad z_y = 35e^{(2x+5y)}$

(*d*) $z_w = 2wx^3y^2e^{w^2x^3y^2}$, $\qquad z_y = 3w^2x^2y^2e^{w^2x^3y^2}$ $\qquad z_y = 2w^2x^2ye^{w^2x^3y^2}$

13.51. (*a*) $z_x = \dfrac{8}{8x+11y}$ $\qquad z_y = \dfrac{11}{8x+11y}$

(*b*) $z_x = \dfrac{15x^2}{5x^3+4y^2}$ $\qquad z_y = \dfrac{8y}{5x^3+4y^2}$

(*c*) $z_x = \dfrac{4}{x}$ $\qquad z_y = \dfrac{5}{y}$

(*d*) $z_w = \dfrac{21w^2}{7w^3+4x^2+5y^4}$ $\qquad z_x = \dfrac{8x}{7w^3+4x^2+5y^4}$

$$z_y = \frac{20y^3}{7w^3+4x^2+5y^4}$$

13.52. (*a*) $z_x = 9(3x-7y)^2 + (81x+18y)(3x-7y)^2$ $z_x = 2(3x-7y)^3 - (189x+42y)(3x-7y)^2$

(*b*) $z_x = \dfrac{-4(5x+8y)^5 + (100x-75y)(5x+8y)^4}{(4x-3y)^2}$ $z_y = \dfrac{3(5x+8y)^5 + (160x-120y)(5x+8y)^4}{(4x-3y)^2}$

(*c*) $z_x = \dfrac{48x^2 + 353xy - 1037y^2}{(3x+11y)^2}$ $z_y = \dfrac{-422x^2 + 270xy + 495y^2}{(3x+11y)^2}$

(*d*) $z_x = 30x^2y^4e^{5xy} + 12xy^3e^{5xy}$ $z_x = 30x^3y^3e^{5xy} + 18x^2y^2e^{5xy}$

13.53. (*a*) $z_{xx} = 42x$ $z_{yy} = 144y^2$ $z_{xy} = -4 = z_{yx}$

(*b*) $z_{xx} = 180x^3 + 12y - 18xy^5$ $z_{yy} = 72x^2y^2 - 60x^3y^3 - 78y$ $z_{xy} = 48xy^3 - 45x^2y^4 = z_{yx}$

(*c*) $z_{xx} = 96xy^2$ $z_{yy} = 32x^3$ $z_{xy} = 96x^2y = z_{yx}$

(*d*) $z_{xx} = 300(5x+12y)^2$ $z_{yy} = 1728(5x+12y)^2$ $z_{xy} = 720(5x+12y)^2 = z_{yx}$

(*e*) $z_{xx} = -0.24x^{-1.4}y^{0.4}$ $z_{yy} = -0.24x^{0.6}y^{-1.6}$ $z_{xy} = 0.24x^{-0.4}y^{-0.6} = z_{yx}$

(*f*) $z_{xx} = -2x^{-1.5}y^{0.7}$ $z_{yy} = -1.68x^{0.5}y^{-1.3}$ $z_{xy} = 2.8x^{-0.5}y^{-0.3} = z_{yx}$

13.54. (*a*) (7, 9), bağıl maksimum (*b*) (8, 5), semer noktası

(*c*) (12, 15), bağıl minimum (*d*) (13, 6), büküm noktası

13.55. (*a*) (–4, 11), semer noktası; (4, 11), bağıl minimum

(*b*) (18, 3), bağıl maksimum; (18, –3), semer noktası

(*c*) (0, 0), büküm noktası; (648, –72), bağıl minimum

(*d*) (0, 0), büküm noktası; (–3, –3), bağıl maksimum

(*e*) (–7, –2), bağıl maksimum; (–7, 9), semer noktası; (4, –2), semer noktası; (4, 9), bağıl minimum

(*f*) (–8, –6), semer noktası; (–8,5), bağıl maksimum; (3, –6), bağıl minimum; (3, 5), semer noktası

13.56. (*a*) (17, 13) (*b*) (63, 39) (*c*) (15, 20) (*d*) (22, 18)

13.57. (*a*) (30, 26) (*b*) (19, 14) (*c*) (27, 17) (*d*) (15, 25)

13.58. (*a*) (35, 38) (*b*) (42, 33) (*c*) (36, 44) (*d*) (54, 31)

13.59. (*a*) (50, 38) (*b*) (27, 42) (*c*) (50, 78) (*d*) (42, 22)

13.60. (*a*) (21, 16) (*b*) (15, 34) (*c*) (13, 10) (*d*) (45, 12)

Dizin

Sayfa numarasını takip eden *p* harfi bir probleme işaret eder.